

膜面の面内変位分布に基づく張力場モデルの 許容圧縮応力の設定に関する一計算例

秋田 剛^{*1}

本論文では、一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの設定パラメーターである許容圧縮応力を、リンクルを生じた膜面の面内変位分布から設定する方法について簡単な例題を用いて検証した。せん断荷重を受ける矩形張力膜に対して、張力場モデルを用いた解析及び擬似分岐座屈解析を行い、擬似分岐座屈解析で求めた面内変位分布との差が最小となるように張力場モデルの許容圧縮応力を設定する方法を試みた。数値解析結果から、本論文で提示する方法によって、一例ではあるがリンクルを生じた膜面の面内変位分布のみを用いて設定された張力場モデルによる解析を膜面構造の大域的な剛性を擬似分岐座屈解析の結果によく一致させるように設定可能であることを確認した。

1. はじめに

近年、軽量で収納効率の高い膜材を利用した膜面宇宙構造物が数多く提案されている^{1,2}。膜面宇宙構造物の設計では、大気や重力の影響から地上試験で全ての設計検証を行うことが難しく、数値解析による検証が重要となる。膜面構造の数値解析では、膜面に発生するリンクル現象のモデル化が必要となり、座屈解析を用いた方法^{3,4}や張力場モデルを用いた方法^{6,9}などいくつかの数値解析法が提案されている。このうち、座屈解析を用いた方法では、膜面を微小な曲げ剛性を有するシェル要素でモデル化し、初期不整を与えた擬似分岐座屈解析によってリンクル発生後のつり合い状態を求めることが多い。この方法は、座屈によって生じるリンクルの形状や座屈後の応力状態を力学的に求めることができる精密な解析となっている。一方で、座屈解析は不安定な解析となりやすく、多大な計算コストを要してしまうため、大規模な構造解析に適用することは容易ではない。一方、張力場モデルを用いた方法では、圧縮応力が作用した際に膜要素の構成則をリンクルの形成によって圧縮応力が完全に解放されるように修正し、張力のみによるつり合い状態を求める。この方法は、リンクル発生後の膜面の応力状態を高精度に求めることができ、非線形有限要素法に効率的に組み込む方法も提案されているため、設計パラメーターの探索に向いた方法となっている。ただし、実際の膜面ではリンクル形成後にも微小な圧縮応力が存在するため、張力場モデルを用いた解析では、座屈解析を用いた解析よりも剛性が低下した解が求められる。

著者はこれまでの研究で、張力場モデルを微小な一定の圧

縮応力を許容するように修正することで、張力場モデルによって得られる剛性を実験モデルや座屈解析で求められる剛性とよく一致させることが可能であることを示した^{9,11}。一旦、実験モデルや座屈解析に適合する許容圧縮応力を設定することができれば、解析精度の向上した張力場モデルを用いて多数の数値検証を少ない計算コストで実施することができるため、有用であると考えられる。しかし、従来の研究では、張力場モデルで許容される圧縮応力を設定するために膜面構造物の大域的な剛性を利用していましたが、実際の実験データとして画像計測のように膜面の変形状態しか得られないことも多い。そこで本研究では、膜面の変位分布のみから張力場モデルで許容される圧縮応力を設定する方法について、簡単な例題を用いて検証する。

張力場モデルでは、リンクルの形成に伴う面外の座屈変形を面内の収縮変形に置き換えて解析を行う。この際、面内の収縮量は、膜面に許容される微小な圧縮応力に依存した量になる。本研究では、張力場モデルで求められる膜面の変位分布を、リンクルを生じる膜面の面内変位分布に近づけるように許容圧縮応力を設定することを考える。例題としてリンクルに関する実験や解析のベンチマークモデルとして用いられることの多いせん断荷重を受ける矩形張力膜を考える。分岐座屈解析によって求められるリンクル形成後の膜面の面内変位分布を基準にして張力場モデルによって求められる面内変位分布の RMS 誤差を求め、RMS 誤差を最小とするように許容圧縮応力を決定する方法を考える。このように面内変位分布のみから決定された許容圧縮応力を用いることで、一例

^{*1} 千葉工業大学 工学部 機械電子創成工学科 准教授・工博

ではあるが、張力場モデルで求められる膜面の大域的な剛性を疑似分岐座屈解析によって求められるものに近づけることが可能であることを報告する。

2. 一定の圧縮応力を許容する張力場モデル

2.1 張力場モデル

一般にリンクルは、図 1(a)のように 1 方向に引張状態にある膜面に圧縮応力が作用した際の座屈によって発生し、座屈後の膜面では圧縮応力がほぼ解放されて微小な値となる。張力場モデルでは、図 1(b)のように膜面に発生する座屈を面内の収縮変形に置き換え、リンクルの形成によって圧縮応力は完全に解放されるものとする。このとき膜面の応力場は、1 軸引き張りの応力（張力場）でモデル化される。このようなモデル化により膜面のリンクル現象を、座屈解析を行うことなく平面問題として簡便に扱うことが可能となる。

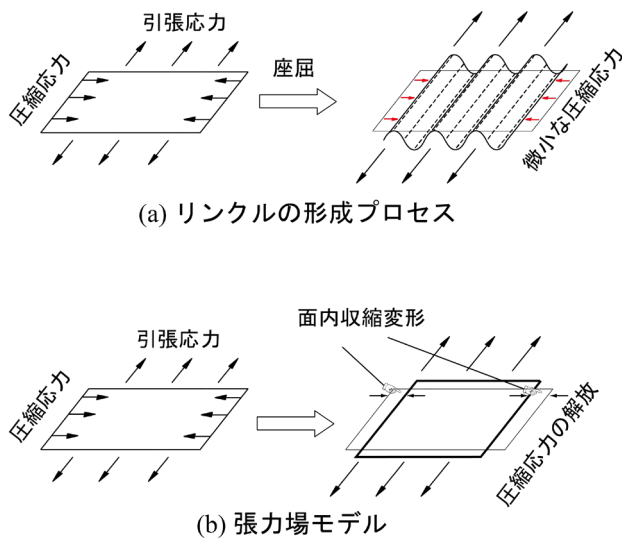


図 1 リンクルの形成プロセスと張力場モデル

2.2 一定の圧縮応力を許容する修正弾性行列

一般に張力場モデルを用いた解析では、膜面の弾性行列を引張応力のみが生じるように修正して解析を行う⁷⁾。一方で、実際のリンクル形成後の膜面には微小な圧縮応力が存在する。著者は、膜面の張力場モデルを一定の圧縮応力を許容するように拡張し、許容する圧縮応力の大きさを調整することで、実験結果とよく一致する解が求められることを示した^{9,10)}。この際、次式のように一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの修正弾性行列を提示した。

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} E + \frac{\alpha v^2}{\varepsilon_{2w}} & \frac{\alpha v}{\varepsilon_{2w}} & 0 \\ \frac{\alpha v}{\varepsilon_{2w}} & \frac{\alpha}{\varepsilon_{2w}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(\nu+1)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに E はヤング率、 ν はポアソン比、 ε_{2w} はリンクルひずみで膜の主ひずみを $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ として $\varepsilon_{2w} = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1$ で与えられる。 α は、張力場モデルの許容圧縮応力を表す。式(1)を用いることで、 α を超える圧縮応力が存在しないつり合い解を求めることができる。修正弾性行列の導出については、文献 10 に詳細が記載されている。

修正弾性行列を用いた張力場解析では、膜要素で離散化された膜面に対して、要素の数値積分点における主ひずみ値からリンクル判定を行い、判定結果が引張状態の場合は通常の弾性行列を、リンクル状態の場合は修正弾性行列を適用して解析を行う。一般的な膜要素を用いた解析では、リンクル判定を行わずに常に通常の弾性行列を用いるため、圧縮剛性を考慮したつり合い解が求められる。一方で修正弾性行列を用いた張力場解析では、修正弾性行列をひずみベクトルのうち圧縮応力に起因するひずみ成分を射影によって除去し引張応力に起因するひずみ成分のみを抽出するように構成することで、引張応力のみによるつり合い解を求めることができる。一般に修正弾性行列は、圧縮応力に起因するひずみ成分を射影によって完全に除去するように構成されるが、式(10)の修正弾性行列は、 α 以下の圧縮応力に起因する成分を射影によって除去するように構成されている¹⁰⁾。本論文では、Total Lagrange 法に基づく幾何学的非線形有限要素法を用いた定式化を行い、要素の接線剛性行列と内力ベクトルを評価する際に、修正弾性行列を適用して張力場解析を行う。

3. せん断荷重を受ける矩形張力膜の解析

3.1 解析概要

解析モデルとして図 2 に示されるような、長さ a 、幅 b の矩形膜を考える。矩形膜の下端は完全固定とし、左右端は自由とする。また上端は強制変位を受ける。解析は、まず上端の節点に対して y 方向に強制変位 dy を与えて膜面に張力を与える (図 2(a))。次に上端の節点に対して x 方向に強制変位 dx を与えて膜面をせん断変形させる (図 2(b))。このとき、せん断座屈により膜面全体にリンクルが発生する。本モデルはリンクルを生じる膜面のベンチマーク的な例題であり⁸⁾、疑似分岐座屈解析を用いたリンクルの解析を比較的安定して行えるモデルとなっている。本研究は、座屈によって発生するリンクルが面内変形に与える影響を評価することに主眼をおいているため、安定して疑似分岐座屈解析を行えるように

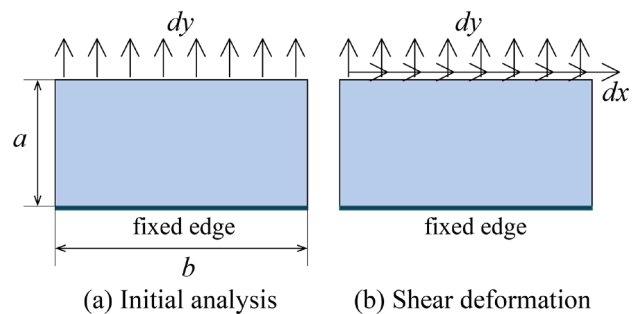


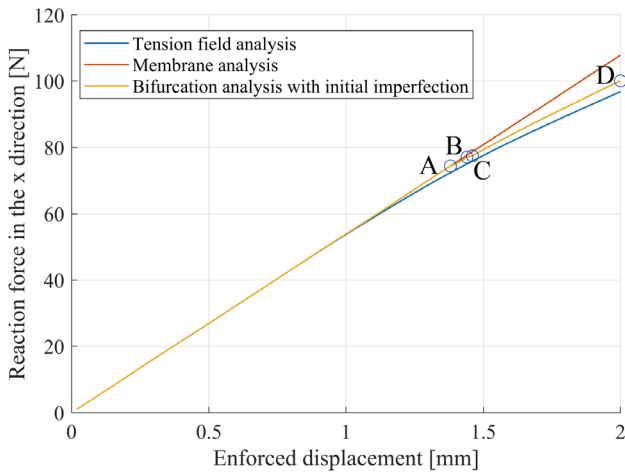
図 2 解析モデル

本モデルを選択している。本論文では、MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) 要素¹²⁾を用いた擬似分岐座屈解析により膜面の座屈により発生するリンクルを求める。また、圧縮応力を許容しない張力場モデルを用いた解析を行い、擬似分岐座屈解析との比較によりリンクルの形成が面内変形に与える影響について検討する。

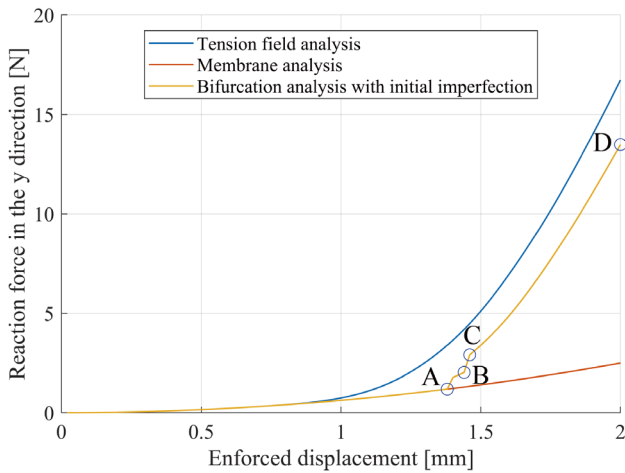
解析は、Total Lagrange 法に基づく幾何学的非線形有限要素法を用いて強制変位を増分的に与えて行う。初期解析で、 $dy = 1.0 \text{ mm}$ の強制変位を10ステップに分割して作用させ膜面を引張する。その後 $dx = 2.0 \text{ mm}$ の強制変位を100ステップに分割して作用させ、膜面をせん断変形させる。膜材の縦弾性係数を 3.38 GPa 、ポアソン比を 0.34 、膜厚 $12 \mu\text{m}$ とする。矩形膜の寸法は、長さ $a = 150 \text{ mm}$ 、幅 $b = 300 \text{ mm}$ に設定し、膜面を長さ方向に50分割、幅方向に50分割、合計2500個の要素で離散化する。

3.2 解析結果

図3に初期解析を行った後の x 方向に与えた強制変位量と反力の関係を示す。図中には、張力場モデルを用いた解析、擬似分岐座屈解析に加えて、比較のために通常の圧縮を許容



(a) x 方向の反力

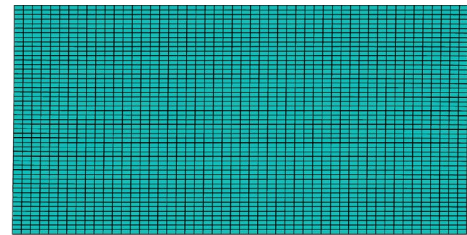


(b) y 方向の反力

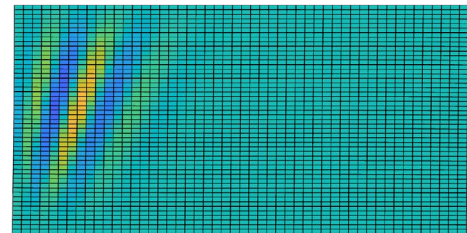
図3 強制変位量と反力の関係

する膜要素を用いた解析の結果も示している。反力は上端の51個の節点で x 方向、 y 方向でそれぞれ求められるが、図3(a), (b)では、それぞれ節点の x 方向および y 方向の反力の合計値を示している。

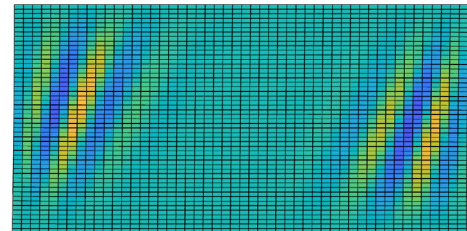
圧縮を許容する膜要素を用いた解析と擬似分岐座屈解析は、面外の座屈変形が発生するまで、ほぼ同一の結果となる。擬似分岐座屈解析では、強制変位量が 1.38 mm となる図のA点から座屈が発生する。その後、圧縮応力がほぼ解放されながら、強制変位量に応じてリンクルが成長する。圧縮を許容する膜要素を用いた解析では、強制変位量が増加するに従い、圧縮応力と引張応力が混在する応力場となる。張力場モデルを用いた解析では、擬似分岐座屈解析に対して、座屈前(A点の前)の領域で大きな差異が見られる。これは、擬似分岐



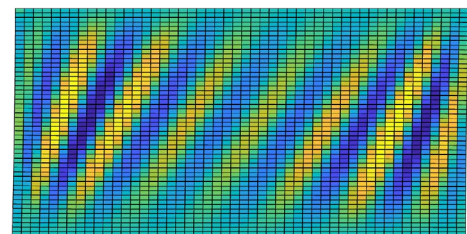
A: $dx = 1.38 \text{ mm}$



B: $dx = 1.44 \text{ mm}$



C: $dx = 1.46 \text{ mm}$



D: $dx = 2.00 \text{ mm}$

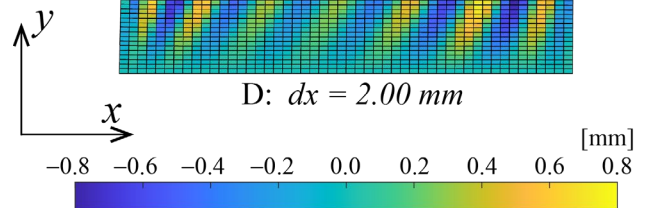
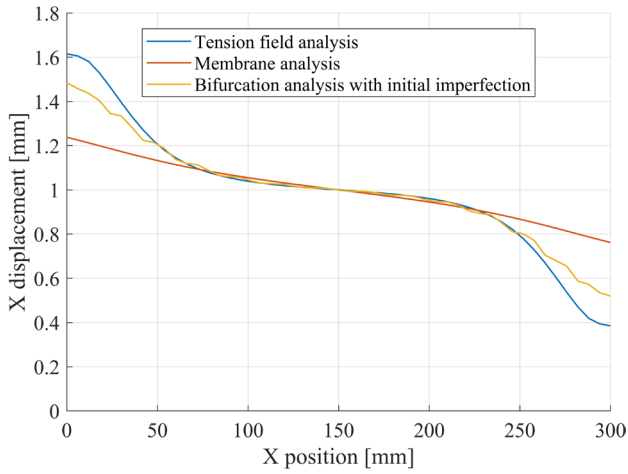
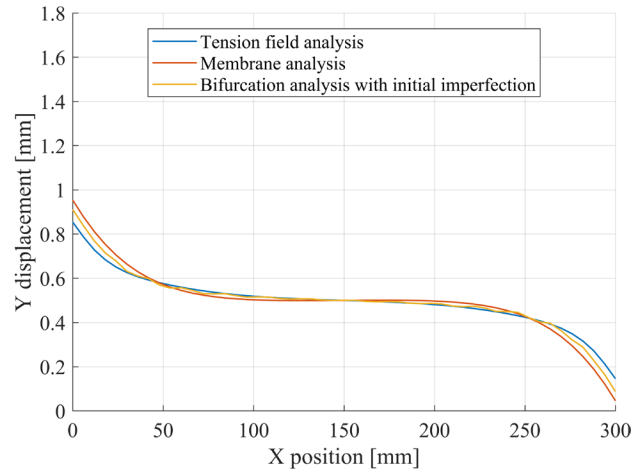


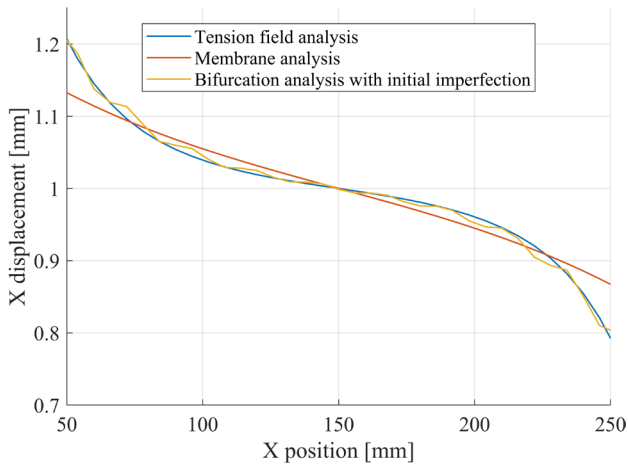
図4 膜面に形成されるリンクル



(a) 全体 ($x=0\sim 300$ mm)

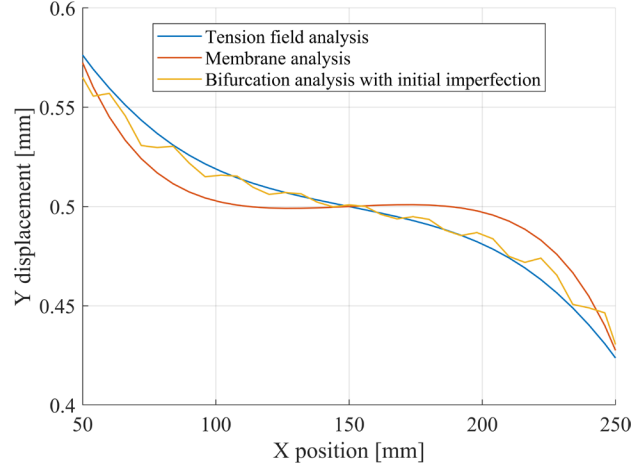


(a) 全体 ($x=0\sim 300$ mm)



(b) 中央付近の拡大図 ($x=50\sim 250$ mm)

図5 膜面中央の x 方向変位分布



(b) 中央付近の拡大図 ($x=50\sim 250$ mm)

図6 膜面中央の y 方向変位分布

座屈解析では、圧縮応力が一定の大きさになるまで座屈が発生せず圧縮応力が残存しているが、張力場モデルを用いた解析では圧縮応力は直ちに解放され、引張応力のみのつり合い状態となっているためである。また座屈後においても、擬似分岐座屈解析では微小な圧縮応力が残存するため、張力場モデルを用いた解析との間に差異を生じる。このような圧縮応力に起因する差異が、張力場モデルを用いて得られる膜面構造の大域的な剛性と分岐座屈解析や実験モデルによって得られる大域的な剛性に差が生じる大きな要因となる^{9,10)}。

図4に擬似分岐座屈解析において、座屈が発生してからリンクルが成長する過程をコンター図で示す^{3,4)}。B点(強制変位量 1.44 mm)では、膜面の左側の領域にリンクルが形成され、直後のC点(強制変位量 1.46 mm)において右側の領域にもリンクルが形成される。本来であればモデルの対称性から左右のリンクルは同時に発生すると考えられるが、擬似分岐座屈解析では初期形状に対して乱数で初期不整を与えているため、完全な対象のモデルとはならず、従って左右のリンクルの発生のタイミングにずれが生じたと考えられる。その後、強制変位量の増加によってリンクル領域が拡大していき、強制変位量 2.00 mm となるD点では、膜面全体にリ

ンクルが形成される。

図5, 6に強制変位量 2.00 mm となるD点での膜面の中央($y=75$ mm)の x 方向変位分布(図5)、 y 方向変位分布(図6)の全体図と中央付近の拡大図をそれぞれ示す。図5(a)、図6(a)の全体図より、各解析結果の面内変位分布は、膜面の左右端で差異が大きくなることがわかる。これは、今回のモデルではリンクルの形成が面内の変形に与える影響が、膜面の左右端で大きくなることを示している。このような変位分布の差を減少させるように式(1)の許容圧縮応力を設定することで、張力場モデルを用いた解析と分岐座屈解析で求められる大域的な剛性の差を減少させることが期待される。

一方で、図5(b)、図6(b)からわかるように、膜面の中央付近ではモデルによる面内変位分布の差異は小さく、リンクルの形成が面内の収縮変形に与える影響は小さいと考えられる。

4. 面内変位分布に基づく許容圧縮応力の設定例

本論文では、リンクル形成後の張力場モデルと擬似分岐座屈解析の面内変位分布の差を減少させるように、張力場モデルの許容圧縮応力を設定することを考える。式(1)の α を -0.1

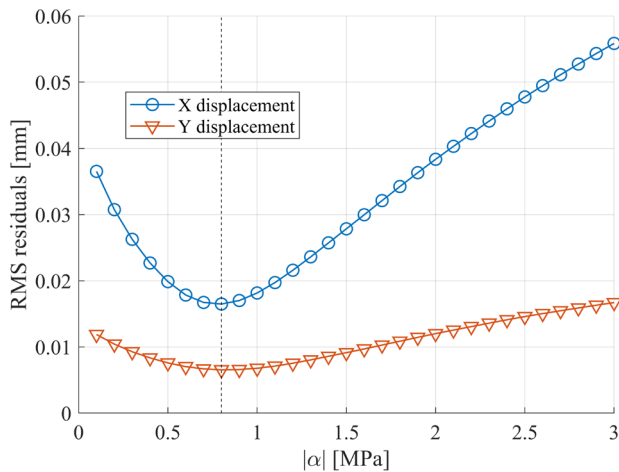
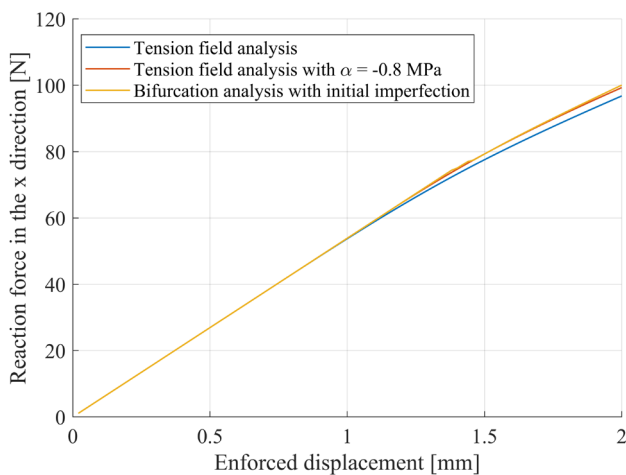
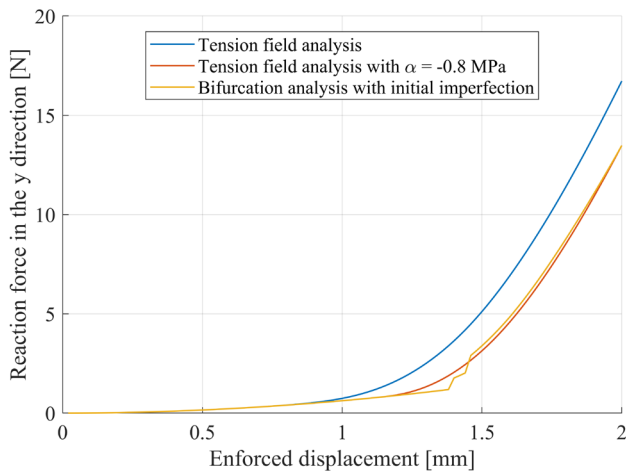


図7 許容圧縮応力と面内変位の RMS 誤差の関係
($dx = 2.0$ mm)



(a) x 方向の反力



(b) y 方向の反力

図8 強制変位量と反力の関係
($\alpha = -0.8$ MPa)

MPa から -3 MPa まで 0.1 MPa 刻みで変化させて一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの修正弾性行列を設定し、第3章と同様の解析を行なった。疑似分岐座屈解析で求められた強制変位量 2.00 mm での全節点の x 方向、 y 方向の変位に対し

て、張力場モデルを用いた解析で求められた変位の RMS 誤差を求めた結果を図7に示す。図7より、 $\alpha = -0.8$ MPa の設定で x 方向、 y 方向の RMS 誤差が共に最小となることが分かった。次に許容圧縮応力が $\alpha = -0.8$ MPa の場合の解析から求められる強制変位量と x 方向、 y 方向の反力の関係を図8に示す。図からわかるように、座屈直後では若干の差異はあるものの、疑似分岐座屈解析結果と一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの解析結果が非常に良い一致を示すことがわかる。このことから、リンクルを生じた膜面の変位分布のみから適切な許容圧縮応力が可能であると考えられる。

5. まとめ

本論文では、一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの設定パラメータである許容圧縮応力を、リンクルを生じた膜面の面内変位分布から設定する方法について報告した。せん断荷重を受ける矩形張力膜に対して、張力場モデルを用いた解析及び疑似分岐座屈解析を行った。疑似分岐座屈解析で求めた面内変位分布との差が最小となるように張力場モデルの許容圧縮応力を決定することで、膜面構造の大域的な剛性を表す強制変位量と反力の関係を疑似分岐座屈解析の結果によく一致させることが可能であることがわかった。

今後の課題として、今回の報告ではせん断荷重を受ける矩形張力膜を一例にして面内変位分布から許容圧縮応力の設定を行ったが、様々な形態の膜面に対しても同様の設定が可能であるかを検証する必要がある。特にインフレータブル膜構造のような曲面上に発生するリンクルに対する許容圧縮応力の設定法の検討が挙げられる。本論文のような平面膜を対象とした場合、計測や分岐座屈解析結果からリンクルを生じる膜面の面内変位分布を評価することが容易であるが、曲面上のリンクルでは面外変位と面内変位を分離するための方法について今後検討する必要がある。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 19K12006 の助成により行われたものである。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) Mori, O., Funase, R., Shirasawa, Y., Mimasu, Y., Tsuda, Y., Saiki, T., Yano, H., Matsuura, S., Yonetoku, D., and Kawaguchi J.: IKAROS Extended Operation for Advanced Solar Power Sail Mission, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol. 12, ists29, pp. Tk_19-Tk_24, 2014.
- 2) Ewing, A. P., Back, J. M., Schuettelpelz, B. M., and Laue, G. P.: James Webb Space Telescope Sunshield Membrane Assembly, AIAA Paper 2009-2156, 2009.
- 3) Iwasa, T., Natori, M. C. and Higuchi, K.: Evaluation of Tension Field Theory for Wrinkling Analysis with Respect to the Post Buckling Study, Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers,

- Vol. 71, pp. 531–540, 2004.
- 4) Tessler, A., Sleight, D. W. and Wang, J. T.: Effective Modeling and Nonlinear Shell Analysis of Thin Membranes Exhibiting Structural Wrinkling, *Journal of spacecraft and rockets*, Vol. 42, pp. 287–298, 2005.
 - 5) Wong, Y. W. and Pellegrino, S.: Wrinkled Membranes Part III: Numerical Simulations, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, No. 1, pp. 63–95, 2006.
 - 6) Miyazaki, Y.: Wrinkle/Slack Model and Finite Element Dynamics of Membrane, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 1179–1209, 2006.
 - 7) Akita, T., Nakashino, K., Natori, M. C., and Park, K. C.: A Simple Computer Implementation of Membrane Wrinkle Behaviour via a Projection Technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 71, pp. 1231–1259, 2007.
 - 8) Jarasjarungkiat, A., Wuchner, R., and Bletzinger, B. U., : Efficient Sub-Grid Scale Modeling of Membrane Wrinkling by a Projection Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 1097–1116, 2009.
 - 9) 菅沼和敬, 秋田剛, 石田良平: インフレータブルビームの曲げ特性について, *日本機械学会 (A 編)*, Vol. 75, pp. 388–393, 2009.
 - 10) 秋田剛, 石田良平, :一定の圧縮応力を許容する張力場モデルの定式化とそのインフレータブルビームの曲げ解析への適用, *膜構造研究論文集 2010*, No. 24, pp. 27–34, 2011.
 - 11) 秋田剛, 石田良平, :インフレータブルビームのしわ発生後の応力場に関する一考察, *膜構造研究論文集 2012*, No. 26, pp. 37–40, 2013.
 - 12) Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N.: A Formation of General Shell Elements the Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 697–722, 1986.

A numerical example on allowable compressive stress settings for tension field model based on in-plane displacement distributions of membrane surface

Takeshi AKITA ^{*1}

Summary

In this paper, a numerical example to set allowable compressive stresses in tension field models is reported. The allowable compressive stresses in the tension field model is set to minimize the difference from the in-plane displacement distribution in wrinkled membrane surfaces. For a simple example, a rectangular tension membrane under shear load was analyzed by using a pseudo-bifurcation buckling analysis to obtain the displacement field with wrinkling. The allowable compressive stresses in the tension field model was determined by using in-plane displacement distribution in the wrinkled membrane. From the tension field analysis with the allowable compressive stress determined, it is confirmed that the relationship between the forced displacement and the reaction force is in good agreement with the results of the pseudo-bifurcation buckling analysis, which indicates the effectiveness of the presented approach in this example.

^{*1} Associate Professor, Department of Innovative Mechanical and Electronic Engineering, Chiba Institute of Technology

