

Lagrange 未定乗数法を用いた ケーブル補強膜構造の形状・裁断図同時解析

宇都宮 尋史*1

本間 俊雄*2

横須賀 洋平*3

梗概

本論では、著者らが提案した座標仮定有限要素法による形状・裁断図同時解析をケーブル補強膜構造の応力指定問題に展開する。形状・裁断図同時解析の定式化ではケーブル軸力を未知量とした Lagrange 未定乗数法を採用する。解析モデルはサスペンション膜構造と空気膜構造とし、裁断図最適化及び要素細分割化の手順を詳細に示し、時刻歴応答解析に適用できる要素分割モデルを作成する。

結果的に、本裁断図解析の手順により様々な膜構造モデルの収束解を得ることができる。

1. はじめに

張力構造は軽量で無柱の大空間を構成できる構造形式として空間構造に利用されている。膜材やケーブル材等の張力材は自然状態で形状不確定な無応力状態で存在するため、境界条件と初期張力を導入することにより張力構造として安定した構造剛性を確保する。従って、張力構造特有の初期形状解析及び裁断図解析が必要になる¹⁾。張力構造の解析では、平面状態で存在する張力材を基準に変形後の座標値を直接未知量とする座標仮定有限要素法が提案され、張力構造物の静的・動的な応力・変形解析を統一的に扱えるようになった^{1)・5)}。座標仮定有限要素法による膜構造の裁断図解析に対する定性的評価は試験体作成により確認されている^{6)・8)}。ただし、これらの研究では裁断線を spline 曲線と仮定することの限界と、規模が大きくなると必要になるケーブル補強膜構造への適用が考慮されていない問題が存在する。

本研究ではケーブル軸力を未知量とする Lagrange 未定乗数法^{9)・10)}を座標仮定有限要素法に適用し、ケーブルと膜の同時解析を実施する。裁断図の表現には裁断図解析への有効性が示されている Bézier 曲面を採用する^{11)・12)}。

本論では Lagrange 未定乗数法を座標仮定有限要素法に適用した構造モデルの定式化を示し、ケーブル補強膜構造に対する応力指定の形状・裁断図同時解析を実施する。膜部の離散化では三角形一次要素及び 4 節点アイソパラメトリック要素を採用し、最適化後の裁断図を基準にリメッシュ(細分割化)した際の釣合曲面の力学性状を把握する。リメッシュ後の釣合曲面の応力状態が等張力とみなせないモデルに対しては裁断図解析を再度実施し、時刻歴応答解析に展開できるようにする。解析モデルは HP 型サスペンション膜構造及び円形空気

膜構造と角丸長方形空気膜構造とし、従来数値解析を行うことが困難であったケーブル補強膜構造に対する形状・裁断図同時解析の数値解析手順を示す。

2. 構造モデルの支配方程式

Lagrange 未定乗数法を適用した構造モデルの汎関数は次式で与えられる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \sum_{i=1}^n f_i (X_i - X_{i0}) + \sum_{k=1}^m \left\{ p_k \delta_k (X_i - X_{i0}) - \frac{L_k}{2E_k A_k} p_k^2 \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$: 応力ベクトル, $\boldsymbol{\varepsilon}$: ひずみベクトル, f_i : 外力, X_i : 変形後の座標値, X_{i0} : 初期の座標値, p_k : Lagrange 未定乗数(ケーブル軸力), $\delta_k (X_i - X_{i0})$: ケーブル部材の伸び, L_k : 初期のケーブル長さ, E_k : ケーブルのヤング係数, A_k : ケーブルの断面積, Ω : 解析領域, n : 節点総自由度, m : ケーブル要素数である。式(1)の停留条件より、式(2a,b)が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (2a, b)$$

式(2a,b)より非線形方程式の接線方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{q} \\ \Delta \delta \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{K}_T$: 接線剛性行列, $\mathbf{B}$: 変形後のひずみ - 座標関係行列, $\mathbf{A}$: 変形後の釣合行列($\mathbf{B}^T = \mathbf{A}$), $\mathbf{C}$: 柔性行列, $\mathbf{f}$: 自重による荷重ベクトル, $\mathbf{q}$: 内力ベクトル, $\Delta \delta$: 部材変形の不適合量, $\Delta \mathbf{X}$, $\Delta \mathbf{p}$ は節点座標値ベクトル $\mathbf{X}$, ケーブル軸力 $\mathbf{p}$ の修正量で

*1 鹿児島大学 理工学研究科 建築学専攻 大学院生
*2 鹿児島大学 理工学研究科 建築学専攻 教授 工博
*3 鹿児島大学 理工学研究科 建築学専攻 准教授 博士(情報科学)

ある。非線形計算は Newton Raphson 法系の解法を用いる。

3. 有限要素の離散化

膜材は三角形一次要素及び 4 節点アイソパラメトリック要素、ケーブル材はトラス一次要素を採用する。座標仮定有限要素法による要素別の離散化定式化の詳細は文献 3), 6) に従う。

3.1 ケーブル要素の離散化

全体直交座標を (X, Y, Z) とするとケーブル要素の離散化平衡方程式は次式で与えられる。

$$\frac{A_e}{L_e} \mathbf{G}^T \mathbf{X}_e \tau_e(\mathbf{X}_e) - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (4)$$

ここで、 A_e : 要素 e のケーブル断面積、 L_e : 要素 e のケーブル長さ、 τ_e : 要素 e の応力 ($\tau_e = p_e/A_e$)、 $\mathbf{X}_e$: 要素 e の全体節点座標、 $\mathbf{f}_e$: 荷重モードベクトル、 $\mathbf{0}$: 零ベクトル、 λ : 荷重パラメータ、各行列・ベクトル成分は以下のとおりである。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_e = [X_1 \quad X_2 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad Z_1 \quad Z_2]^T$$

非線形方程式を解くためのケーブル要素 e の離散化された接線剛性行列は次式で得られる。

$${}_e\mathbf{K}_T = \frac{A_e}{L_e} \mathbf{G}^T \tau_e + \frac{E_e A_e}{L_e^3} \mathbf{G}^T \mathbf{X}_e \mathbf{X}_e^T \mathbf{G} \quad (5)$$

3.2 三角形膜要素の離散化

三角形膜要素の離散化平衡方程式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{4S_e} (\mathbf{Q}^T \mathbf{X}_e) \mathbf{D}_e \left[\frac{1}{8S_e^2} (\mathbf{X}_e^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_e) + \mathbf{C}_e \right] - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (6)$$

ここで、 S_e : 要素面積、 $\mathbf{D}_e$: 構成行列、各行列・ベクトル成分は、安定形態の全体座標 (X, Y, Z) 、平面上の局所座標 (x, y) とすると以下のとおりである。

$$\mathbf{X}_e = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3]^T$$

$$\mathbf{Q} = [\hat{\mathbf{b}} \quad \hat{\mathbf{a}} \quad \hat{\mathbf{c}}]$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_e = \frac{1}{2} [-1 \quad -1 \quad 0]^T$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^T \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \quad \mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

ただし、 $a_i = x_k - x_j$, $b_i = y_j - y_k$, ($i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2$) である。非線形方程式を解くための三角形膜要素 e の離散化された接線剛性行列は次式で与えられる。

$${}_e\mathbf{K}_T = \frac{1}{4S_e} \mathbf{Q}^T \tau_e + \frac{1}{16S_e^3} (\mathbf{Q}^T \mathbf{X}_e) \mathbf{D}_e (\mathbf{X}_e^T \mathbf{Q}) \quad (7)$$

3.3 矩形膜要素の離散化

安定形態の座標に双一次仮定を与えると、矩形膜要素の離散化平衡方程式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{R}^T \mathbf{X}_e) \mathbf{D}_e \left[\frac{1}{2} (\mathbf{X}_e^T \mathbf{R} \mathbf{X}_e) + \mathbf{C}_e \right] d\Omega - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{D}_e$: 構成行列、 $\mathbf{X}_e$: 安定形態の要素任意点座標値、各行列・ベクトル成分は、平面上の局所座標 (x, y) とすると以下のとおりである。

$$\mathbf{R} = \left[\sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{1k}^T \mathbf{Q}_{1k} \quad \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{2k}^T \mathbf{Q}_{2k} \quad \sum_{k=1}^3 (\mathbf{Q}_{1k}^T \mathbf{Q}_{2k} + \mathbf{Q}_{2k}^T \mathbf{Q}_{1k}) \right]^T$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} [-1 \quad -1 \quad 0]^T, \quad \mathbf{Q}_{ij} = [S_i \delta_{1k} \quad S_i \delta_{2k} \quad S_i \delta_{3k}]$$

$$S_1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y}_e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y}_e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \right), \quad S_2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x}_e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x}_e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \right)$$

$$\mathbf{x}_e = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad \mathbf{y}_e = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T$$

ただし、 δ_{ij} : Kronecker のデルタ、 $\mathbf{N}$: 形状関数、 $\mathbf{J}$: ヤコビ行列である。非線形方程式を解くための矩形膜要素 e の離散化された接線剛性行列は次式で得られる。

$${}_e\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} 2\mathbf{R}^T \tau_e d\Omega + \int_{\Omega} 4(\mathbf{R}^T \mathbf{X}_e) \mathbf{D}_e (\mathbf{X}_e^T \mathbf{R}) d\Omega \quad (9)$$

なお、数値積分にガウスの 2 点積分を用いる。

4. 裁断図解析の定式化

膜要素とケーブル要素の離散化定式化を用いてケーブル補強膜構造の形状・裁断図同時解析を実施する。なお、最適化手法には逐次二次計画法 (SQP 法) を採用する。

4.1 裁断図の表現方法

裁断図の表現方法として Bézier 曲面を用いる。Bézier 曲面は制御点ベクトル $\mathbf{P}$ と Bernstein 基底関数 $B_i^{m'}$ で定義され、曲面上の任意の節点ベクトル $\mathbf{r}(u, v)$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} B_i^{m'}(u) B_j^{n'}(v) \mathbf{P}_{ij} \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} x P_{ij} \\ y P_{ij} \\ z P_{ij} \end{bmatrix} \quad (i=0, 1, 2, \dots, m', j=0, 1, 2, \dots, n') \quad (11a, b)$$

$$B_i^{m'} = \frac{m!}{i!(m'-i)!} u^i (1-u)^{m'-i}$$

ここで、 $u, v \in [0.0, 1.0]$: 位置情報パラメータ、 m', n' : 各軸方向の制御点数である。パラメータ u, v を等間隔に分割することで裁断図の節点座標を定める。ただし、裁断図は平面上にあるため制御点 Z 座標は 0 とする。

4.2 ケーブル材の長さ設定

図 1 に示すように裁断図から算出した左側裁断線長さ ${}_L l_e$ と右側裁断線長さ ${}_R l_e$ の平均長さに対するケーブル長さ L_e の比を r_k とすると、ケーブル長さは次式で与える。

$$L_e = \frac{1}{2} r_k ({}_L l_e + {}_R l_e) \quad (k=1, 2, \dots, m_e) \quad (12)$$

ここで、 m_c ：ケーブル本数である。

4.3 最適化問題の定式化

釣合形状における膜応力の差の平方和を最小化する応力指定問題は次式で与えられる。

$$\text{Find} \quad \mathbf{x}^*, r_k \quad (k = 1, 2, \dots, m_c) \quad (13)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i0})^T (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i0}) \quad (14)$$

$$\text{subject to} \quad \frac{|L_i l_i - R_i r_i|}{D} \leq \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (15a-c)$$

$$t\boldsymbol{\sigma}^L \leq t\boldsymbol{\sigma}_e \leq t\boldsymbol{\sigma}^U$$

$$N^L \leq N_e \leq N^U$$

ここで、 $\mathbf{x}^*$ ：平面上の Bézier 曲面制御点座標ベクトル、 m ：最適化対象となる総膜要素数、 $\boldsymbol{\sigma}_i$ ： i 番目の釣合形状における膜主応力値、 $\boldsymbol{\sigma}_{i0}$ ： i 番目の想定膜主応力値、 L_i ：裁断線を構成する平面上状態の左側裁断線長さ、 R_i ：裁断線を構成する平面上状態の右側裁断線長さ、 D ：スパン、 $\alpha = 0.5\%$ 、 k ：裁断線本数、 $\boldsymbol{\sigma}_e$ ：要素 e を代表する釣合形状における膜主応力、 $\boldsymbol{\sigma}^L$ ：膜応力下限設定値、 $\boldsymbol{\sigma}^U$ ：膜応力上限設定値、 t ：膜厚、 N_e ：ケーブル要素 e の釣合形状における軸力、 N^L ：ケーブル軸力下限設定値、 N^U ：ケーブル軸力上限設定値である。

5. 裁断図解析フローと要素細分割化

5.1 裁断図解析計算フロー

ケーブルを導入した膜構造の形状・裁断図同時解析のフローを図 2 に示す。ケーブルを導入した膜構造の裁断図解析は、はじめ膜のみのモデルで裁断図の最適化を実施する。その後、得られた裁断図にケーブルを導入し、再び裁断図解析を実施し等張力曲面を得る。はじめに膜応力及びケーブル軸力の側面制約を厳しく設定すると、応力状態が大きく乱れ制約条件を満足しない結果が得られる場合があるため、膜のみのモデルの裁断図解析及びケーブルを導入した膜モデルの裁断図解析に対してはそれぞれ段階的に側面制約を狭め解を得る。側面制約の設定はモデルごとに設定する必要がある、等張力曲面許容範囲内と見なせるまで狭める。空気膜構造モデルでは要素分割が細くなるに従い収束状況が悪くなり解が得られない場合が多い。

5.2 裁断図解析におけるリメッシュ

形状・裁断図同時解析後、時刻歴応答解析に展開する際に膜材の要素分割は応答挙動に大きく影響する。これまで設計変数の削減のため裁断線・裁断図の表現方法にはパラメトリック曲線・曲面が用いられてきた^{3)-8), 11), 12)}。しかし、ライズ・スパン比が大きくなり要素分割が細くなるに従い解の収束状況が悪くなる。そのため、可能な限り粗い要素分割で裁断図解析を行い、後にリメッシュすることで時刻歴応答解析に適切な要素分割のモデルを作成しなければならない。ここでは、各要素のリメッシュは三角形要素及び矩形要素で各辺の中点

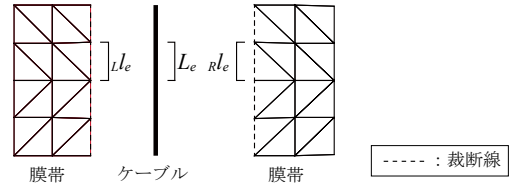


図 1 ケーブル長さの算定

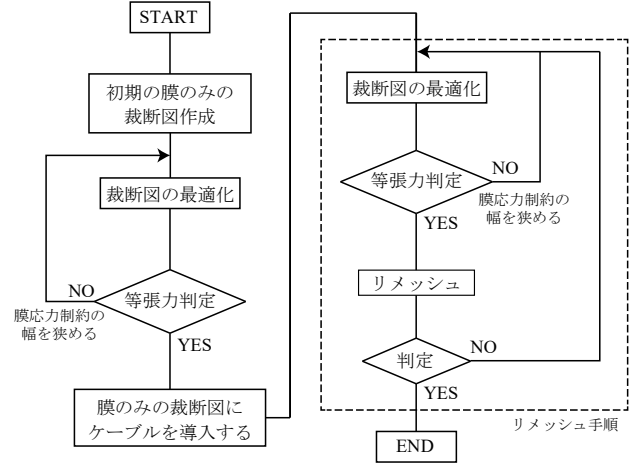
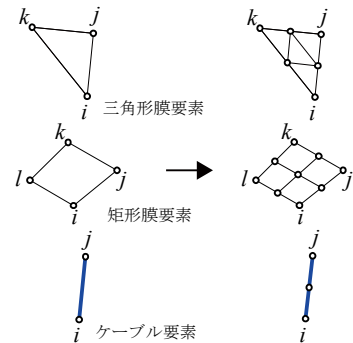


図 2 膜構造の裁断図解析フロー



各辺の中点をとり、膜要素は四分分割とし、ケーブル要素は二分分割とする。

図 3 各要素のリメッシュ

を結んだ 4 分割、ケーブル要素で中点での 2 分割とする (図 3)。初期の粗い要素分割を Original-Model (O-Model) とし、1 度リメッシュしたものを Remesh1-Model (R1-Model)、R1-Model に対して裁断図解析を再び実施したものを Remesh1'-Model (R1'-Model)、R1'-Model をリメッシュしたものを Remesh2-Model (R2-Model) と表記する。図 2 の解析フローに示す点線枠内で、粗いメッシュの裁断図解析を実施し、その後最適化された裁断図に対して裁断線を保持した状態でリメッシュを行い釣合曲面の力学性状や固有周期の違いを把握する。リメッシュ後の釣合曲面の等張力性が失われているモデル及び固有周期が一致しないモデルに対しては再び裁断図解析を実施する。

6. 解析モデル

解析モデルは、ケーブルを導入した HP 型サスペンション膜構造 (Model-A)、ケーブルを導入した円形空気膜構造 (Model-B)、ケーブルを導入した角丸長方形空気膜構造 (Model-C) とする。膜材に三角形要素を採用したモデルを Pattern-1、矩形要素を採用したモデルを Pattern-2 とする。表 1 に 3 種類の膜と 2 種類のケーブルの材料諸量を示す。図 4~6 に Model-A~C の解析モデルを示す。Model-A~C の Pattern-1 及び Pattern-2 の鳥瞰図をそれぞれ各図 a, b 部に示す。図 c 部は膜帯接続情報であり、解析領域はモデルの対称性より 1/2 領域とする。要素分割と Bézier 曲面の制御点配置は図 d 部とし、膜とケーブルの接合位置を図 e 部に示す。境界部は固定であり、荷重は自重のみとする。空気膜構造の Model-B 及び Model-C の常時内圧は 196.1 Pa と設定する。表 2 に各モデルの裁断図解析における想定膜応力、膜応力及びケーブル軸力の側面制約条件の設定値を示す。

7. 形状・裁断図同時解析の数値結果

7.1 HP 型サスペンション膜構造 (Model-A, O-Model)

ケーブルを導入した HP 型サスペンション膜構造 (Pattern-1 ; 節点数 : 81, 膜要素 : 128, ケーブル要素 : 24, Pattern-2 ; 節点数 : 81, 膜要素 : 72, ケーブル要素 : 24) の裁断図解析結果をそれぞれ図 7, 8 に示す。部材は表 1 の膜-I とケーブル-I を用いる。Pattern-1 及び Pattern-2 の最適化後の (r_1, r_2) はそれぞれ (1.00410, 1.00390), (1.00419, 1.00392) である。膜とケーブルの同時解析結果により Pattern-1, Pattern-2 共に等張力曲面が得られている。ケーブル軸力は側面制約を満足し、側面制約によりケーブルに導入される軸力を比較的容易に調整できる。しかし、ケーブル軸力が大きいほど膜の釣合曲面が扁平になり等張力となりやすく、ケーブル軸力の設定上限値に近い値をとる。HP 型サスペンション膜構造の裁断図解析で三角形要素と矩形要素の大きな差異は観られない。

Pattern-1, -2 の最適化後の裁断図に対してリメッシュを実施した際の釣合曲面の応力状態を図 9 に示す。要素分割の粗密による境界部に隣接する要素の自重評価の違いにより、リメッシュ後の膜応力値が側面制約内に収まっていない。しかし、モデル全体で等張力性は維持されている。

7.2 円形空気膜構造 (Model-B, O-Model)

ケーブルを導入した円形空気膜構造 (Pattern-1 ; 節点数 : 66, 膜要素 : 100, ケーブル要素 : 10, Pattern-2 ; 節点数 : 66, 膜要素 : 50, ケーブル要素 : 10) の裁断図解析結果をそれぞれ図 10, 11 に示す。部材は表 1 の膜-II とケーブル-II を用いる。Pattern-1 及び Pattern-2 の最適化後の r_1 はそれぞれ 1.00258, 0.99910、最適化後のライズはそれぞれ 9,108 mm, 7,964 mm である。Pattern-1, Pattern-2 共に等張力曲面が得られたがケーブル軸力の大きさの違いにより最適化後のライズは 1 m 程度の差が生じた。

Pattern-1, -2 の最適化後の裁断図に対してリメッシュを実施した際の釣合曲面の応力状態を図 12 に示す。リメッシュによる膜曲面の応力の乱れは HP 型サスペンション膜構造よりも

円形空気膜構造の方が大きく、三角形要素及び矩形要素共に等張力性が維持されない。境界部に隣接する要素の自重及び内圧評価の違いが原因と考えている。

7.3 角丸長方形空気膜構造 (Model-C, O-Model)

ケーブルを導入した角丸長方形空気膜構造 (Pattern-1 ; 節点数 : 132, 膜要素 : 220, ケーブル要素 : 20, Pattern-2 ; 節点数 : 132, 膜要素 : 110, ケーブル要素 : 20) の裁断図解析結果をそれぞれ図 13, 14 に示す。部材は表 1 の膜-III とケーブル-II を用いる。Pattern-1 及び Pattern-2 の最適化後の (r_1, r_2) はそれぞれ (1.00944, 1.000381), (0.99913, 1.00374) であり、最適化後のライズはそれぞれ 3,560 mm, 3,460 mm である。Model-B 同様 Pattern-1, Pattern-2 でわずかにライズが異なるが等張力曲面許容範囲内となる。Model-C はケーブルが対称に 2 本ずつ配置されているため、ケーブル軸力の大きさだけでなく 2 本のケーブル軸力の比により得られる釣合曲面も異なる。

Pattern-1, -2 の最適化後の裁断図に対してリメッシュを実施した際の釣合曲面の応力状態を図 15 に示す。Model-C は Model-B 同様リメッシュにより釣合曲面の応力状態が乱れた。

8. リメッシュ後の裁断図解析の数値結果

Model-B 及び Model-C は粗い要素分割の裁断図 (O-Model) に対してリメッシュを施すと釣合曲面の等張力性が維持されない。さらに、Model-A, B, C の要素分割 O-Model と R1-Model の固有周期が高次の周期まで一致しないため、リメッシュ後の裁断図 (R1-Model) に再び裁断図解析を実施する。ただし、三角形要素はリメッシュ後に再度裁断図解析を実施したが側面制約を満足する収束解は得られなかった。要因は三角形要素のひずみが要素内一定であり、矩形要素はひずみが要素内で双一次的に変化するためと考えている。リメッシュ後の裁断図最適化は矩形要素のモデルに対して実施する。要素分割 O-Model は設計変数削減のため Bézier 曲面の制御点配置を 1 つの膜帯に対し (2×6) とするが、R1'-Model の Bézier 曲面の制御点配置は境界部の節点も制御するため O-Model の側面の制御点から中点を取り、 (3×6) の制御点配置とする。

8.1 HP 型サスペンション膜構造 (Model-A, R1'-Model)

Model-A の数値結果を図 16 に示す。最適化後の裁断図 (R1'-Model) をリメッシュしたときの膜主応力図は図 17 である。その数値概要を表 3 に示す。図 18, 19 はそれぞれ Pattern-1, Pattern-2 の固有周期である。リメッシュ後の釣合曲面の等張力性はモデル全体で維持され、R1'-Model 及び R2-Model の固有周期が概ね一致している。従って、本リメッシュ手順より時刻歴応答解析へ展開する際の適切な要素分割は R1'-Model とする。

8.2 円形空気膜構造 (Model-B, R1'-Model)

Model-B の数値結果を図 20 に示す。最適化後の裁断図 (R1'-Model) をリメッシュしたときの膜主応力図は図 21 である。その数値概要を表 4 に示す。Pattern-1 及び Pattern-2 の固有周期をそれぞれ図 22, 23 に示す。Model-B はリメッシュ後に再び最適化を実施することで等張力条件を満足する釣合曲面を得た。リメッシュ後の応力状態 (R2-Model) はモデル全体で等張

表 1 膜・ケーブルの材料定数表

材種	膜- I (Model-A)	膜- II (Model-B)	膜- III (Model-C)	ケーブル- I (Model-A)	ケーブル- II (Model-B, C)
膜厚 t (mm)	$t=0.8$	$t=0.8$	$t=0.8$	—	—
断面積 A (mm ²)	—	—	—	$A=125$	$A=595$
縦弾性係数 tE_x, tE_y (N/mm), E (N/mm ²)	$tE_x=243.0$ $tE_y=227.0$	$tE_x=500.0$ $tE_y=500.0$	$tE_x=980.7$ $tE_y=686.7$	$E=1.373 \times 10^5$	$E=1.570 \times 10^5$
ポアソン比	$\nu_x=0.550, \nu_y=0.513$	$\nu_x=0.30, \nu_y=0.30$	$\nu_x=0.63, \nu_y=0.45$	—	—
せん断剛性 (N/mm)	$tG_{xy}=24.19$	$tG_{xy}=50.0$	$tG_{xy}=63.74$	—	—
単位質量 ρ_m (kg/mm ²), ρ_c (kg/mm)	$\rho_m=0.785 \times 10^{-6}$	$\rho_m=1.215 \times 10^{-6}$	$\rho_m=1.275 \times 10^{-6}$	$\rho_c=1.03 \times 10^{-3}$	$\rho_c=4.87 \times 10^{-3}$

表 2 裁断図解析設定条件

	Model-A		Model-B		Model-C	
	Pattern-1	Pattern-2	Pattern-1	Pattern-2	Pattern-1	Pattern-2
σ_{i0} (N/mm)	1.5	1.5	2.0	2.0	1.5	1.5
σ_{min} (N/mm)	1.2	1.2	1.7	1.7	1.2	1.2
σ_{max} (N/mm)	1.8	1.8	2.3	2.3	1.8	1.8
N_{min} (kN)	2.0	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
N_{max} (kN)	5.0	5.0	25.0	25.0	15.0	15.0

力性が維持され、Model-A 同様 R1'-Model 及び R2-Model の固有周期が概ね一致している。従って、要素分割は Model-B 同様 R1'-Model の方がよい。

8.3 角丸長方形空気膜構造 (Model-C, R1'-Model)

Model-C の数値結果を図 24 に示す。最適化後の裁断図をリメッシュしたときの膜主応力図を図 25、その数値概要を表 5 に示す。Model-B 同様リメッシュ後に再び最適化を実施することで等張力条件を満足する釣合曲面が得られ、リメッシュ後 (R2-Model) の等張力性はモデル全体で保持されている。Pattern-1 及び Pattern-2 の固有周期はそれぞれ図 26, 27 に示す。Model-A 同様要素分割は R1'-Model の方がよい結果である。

9. 考察

各モデルの数値解の収束状況を表 6 に示す。想定膜応力に対して制約条件を満足するケーブル軸力は無数に存在し、ケーブルを導入した膜曲面はケーブル軸力の大きさにより形状が異なる。従って、膜の裁断図とケーブル長さを同時に最適化する必要がある。Model-A, B, C はケーブル長さを裁断線長さに対する比で与え、設計変数とすることにより等張力曲面を得た。O-Model では Pattern-1, -2 共に等張力曲面が得られた。しかし、リメッシュによる境界部に隣接する要素の自重及び内圧評価の違いの影響により釣合曲面の等張力性が維持できない状況が生じる。リメッシュ後の応力の乱れは空気膜構造モデルにおいて顕著に表れている。リメッシュ後の裁断図最適化は Pattern-2 に対してのみ収束解を得ている。Model-A~C の R2-Model においてモデル全体で等張力性が維持されてい

る。R1'-Model 及び R2-Model の固有周期が概ね一致していることから時刻歴応答解析へ展開する際の要素分割の粗密は、本リメッシュ手順に従えば R1'-Model による解析がよい結果を得る。

10. まとめ

本論では、座標仮定有限要素法にケーブル軸力を未知量とした Lagrange 未定乗数法を適用し、構造モデルの定式化を示した。ケーブルを導入したサスペンション膜構造や空気膜構造のモデルを解析例に応力指定の最適化問題を設定し、ケーブルと膜の形状・裁断図同時解析を実施した。最適化後の裁断図にリメッシュを施し要素分割数の違いによる釣合曲面の力学性状と固有周期の差異を調べた。さらに、リメッシュ後の応力状態が等張力とみなせないモデルや固有周期が一致しないモデルに対しては裁断図解析を再度実施することで、時刻歴応答解析へ展開する際の適切な要素分割に対する等張力曲面を作成する手順を示した。

以上より、Lagrange 未定乗数法を用いたケーブル補強膜構造の形状・裁断図同時解析とリメッシュ手順により、従来得られていない解析モデルに対しても収束解が得られることを示した。

謝辞

本研究は公益財団法人能村膜構造技術振興財団の助成金 (代表: 本間俊雄) を受けて行いました。ここに記して深謝します。

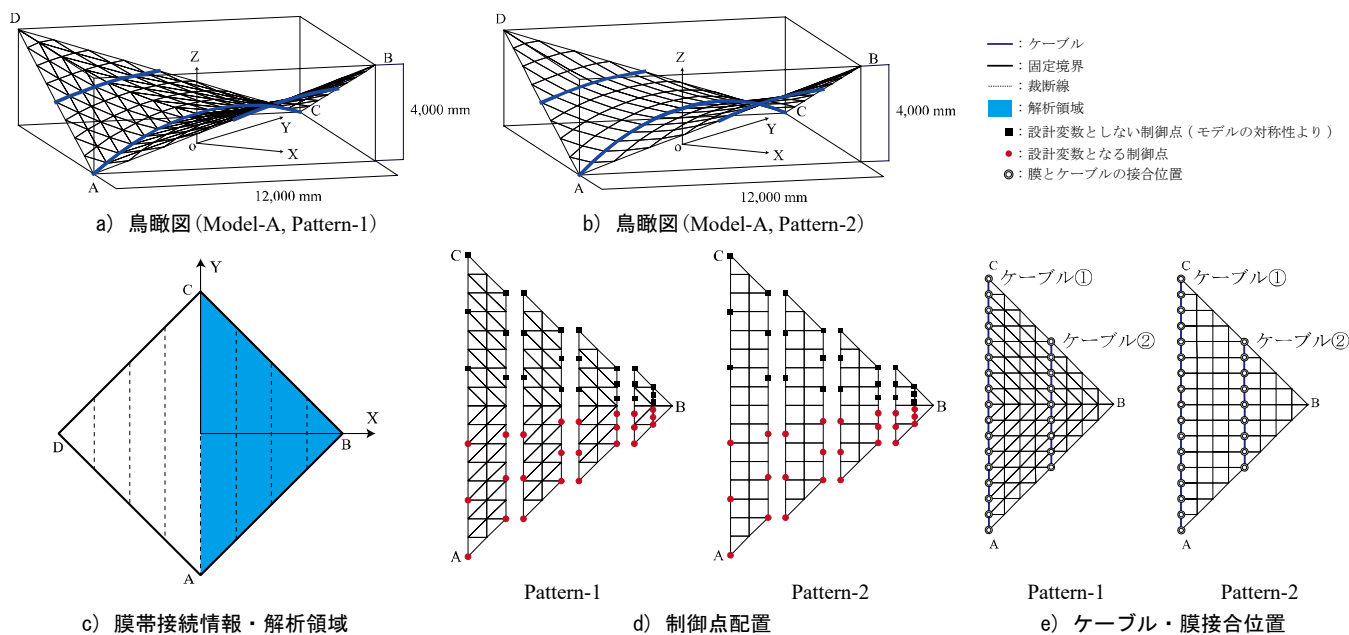


図4 解析モデル概要 Model-A

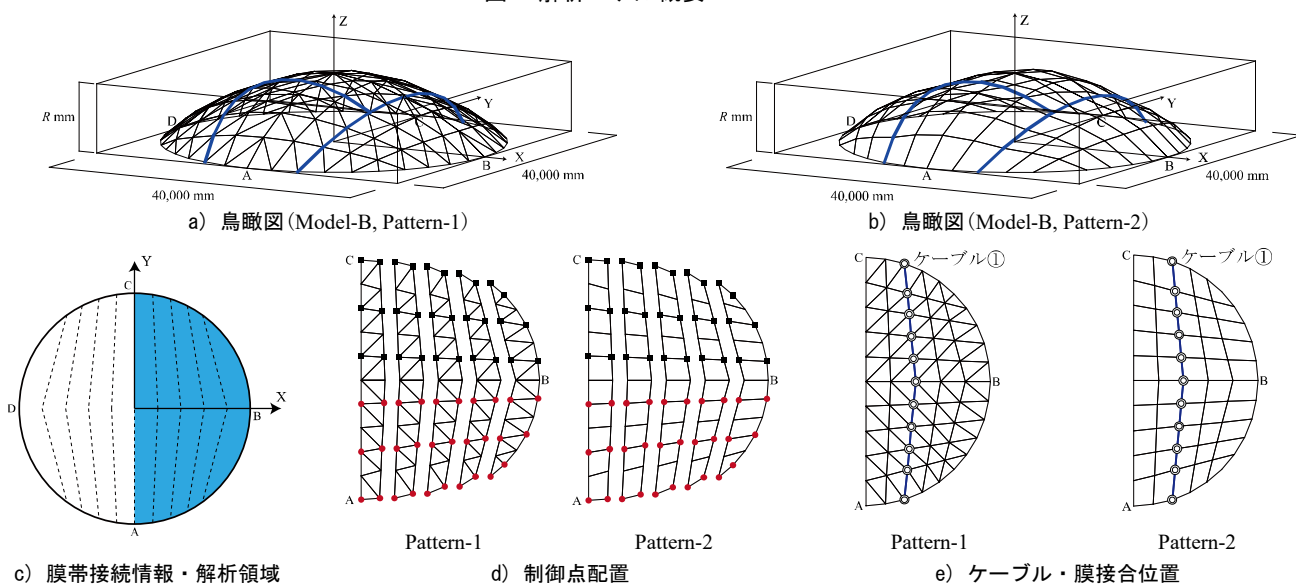


図5 解析モデル概要 Model-B

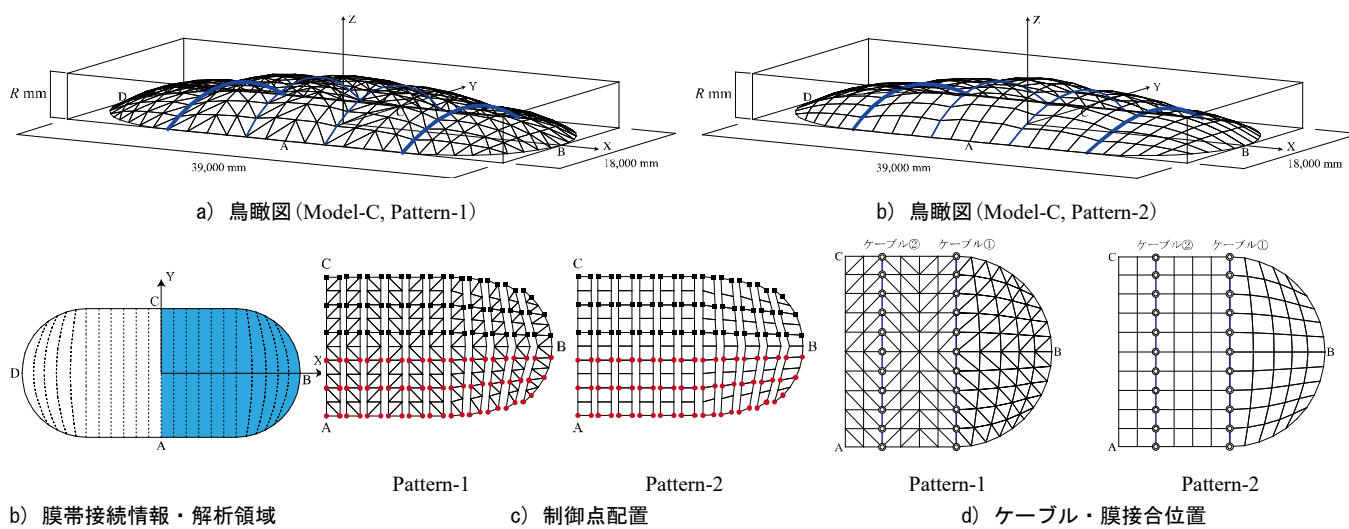
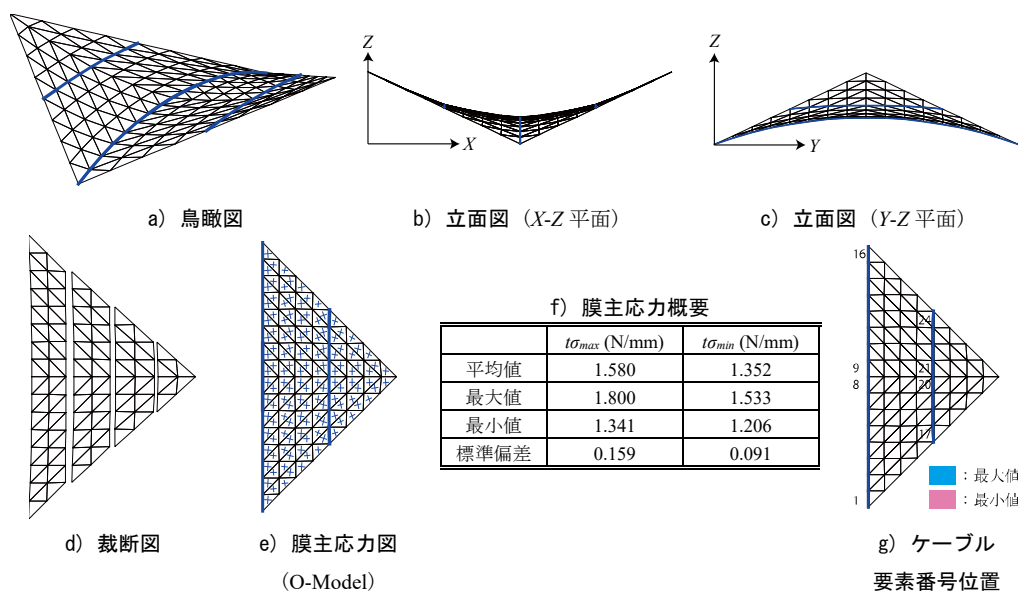


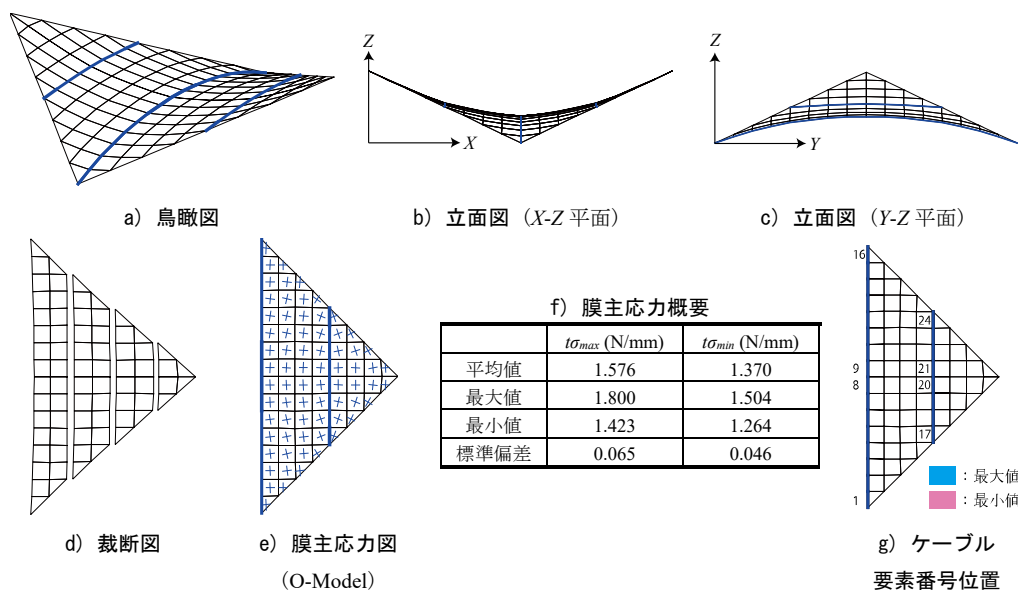
図6 解析モデル概要 Model-C



h) ケーブル長さ・軸力

要素番号	ケーブル長さ (m)	ケーブル軸力 (kN)
1	1.1075	4.469
2	1.0966	4.555
3	1.0878	4.603
4	1.0810	4.676
5	1.0759	4.748
6	1.0722	4.830
7	1.0698	4.906
8	1.0686	5.000
9	1.0686	5.000
10	1.0698	4.906
11	1.0722	4.830
12	1.0759	4.748
13	1.0810	4.676
14	1.0878	4.603
15	1.0966	4.555
16	1.1075	4.469
17	1.0763	5.002
18	1.0639	4.853
19	1.0556	4.719
20	1.0515	4.689
21	1.0515	4.689
22	1.0556	4.719
23	1.0639	4.853
24	1.0763	5.002

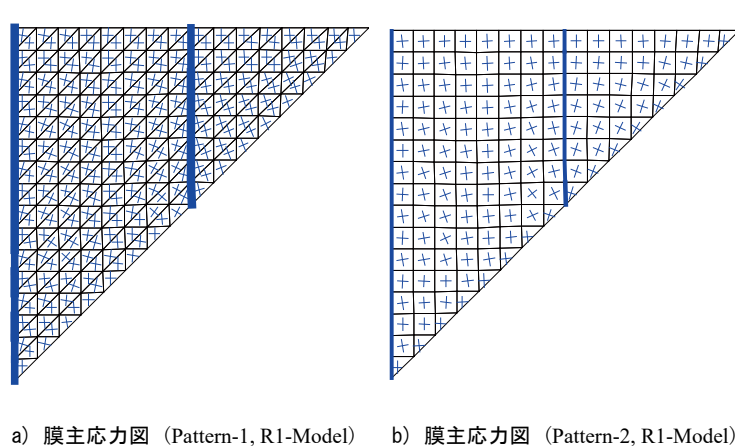
図 7 Model-A 数値結果 (Pattern-1, O-Model)



h) ケーブル長さ・軸力

要素番号	ケーブル長さ (m)	ケーブル軸力 (kN)
1	1.1076	4.465
2	1.0967	4.686
3	1.0879	4.735
4	1.0811	4.764
5	1.0760	4.825
6	1.0723	4.895
7	1.0699	4.959
8	1.0688	5.000
9	1.0688	5.000
10	1.0699	4.959
11	1.0723	4.895
12	1.0760	4.825
13	1.0811	4.764
14	1.0879	4.735
15	1.0967	4.686
16	1.1076	4.465
17	1.0765	5.000
18	1.0640	4.836
19	1.0556	4.706
20	1.0514	4.652
21	1.0514	4.652
22	1.0556	4.706
23	1.0640	4.836
24	1.0765	5.000

図 8 Model-A 数値結果 (Pattern-2, O-Model)



c) 膜主応力・ケーブル軸力概要 (Pattern-1, R1-Model)

	$t\sigma_{max}$ (N/mm)	$t\sigma_{min}$ (N/mm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)
平均値	1.541	1.321	4.713	4.744
最大値	1.869	1.576	4.942	4.993
最小値	1.311	1.062	4.440	4.578
標準偏差	0.126	0.091	—	—

d) 膜主応力・ケーブル軸力概要 (Pattern-2, R1-Model)

	$t\sigma_{max}$ (N/mm)	$t\sigma_{min}$ (N/mm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)
平均値	1.539	1.336	4.770	4.809
最大値	1.685	1.474	4.921	5.074
最小値	1.394	1.148	4.535	4.644
標準偏差	0.071	0.042	—	—

図 9 リメッシュ後の膜主応力図 (Model-A, R1-Model)

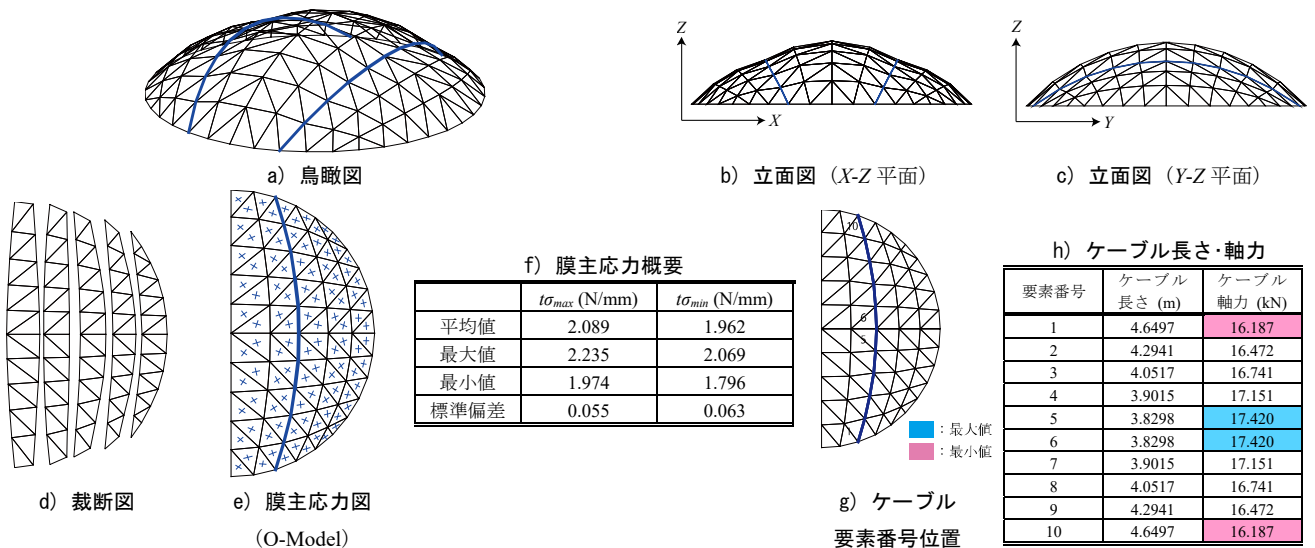


図 10 Model-B 数値結果 (Pattern-1, O-Model)

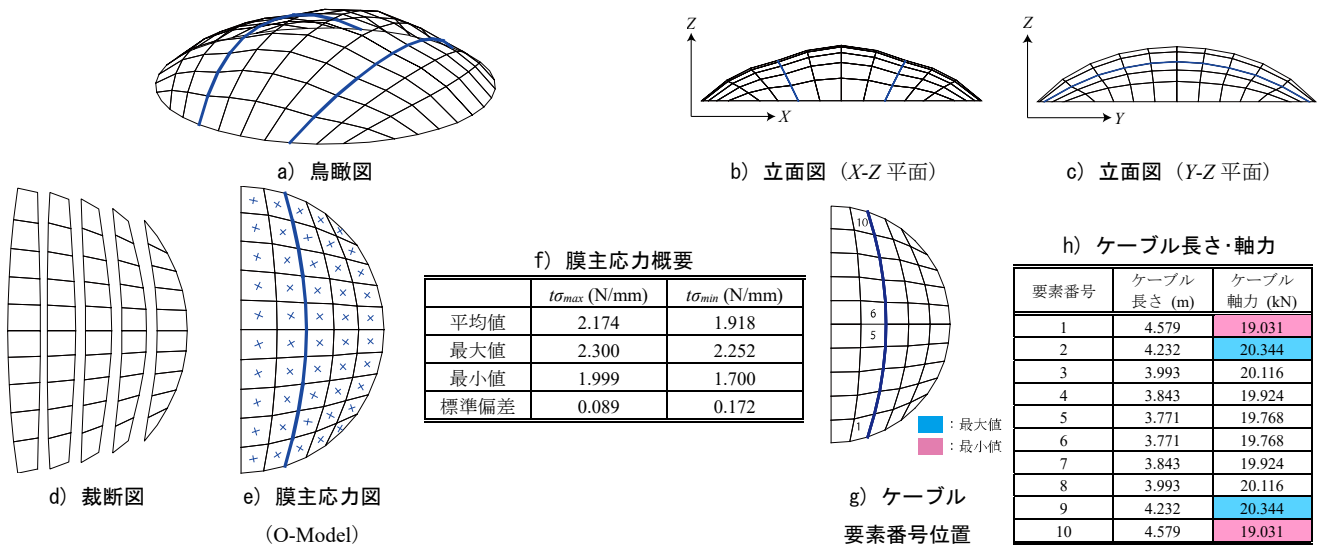


図 11 Model-B 数値結果 (Pattern-2, O-Model)

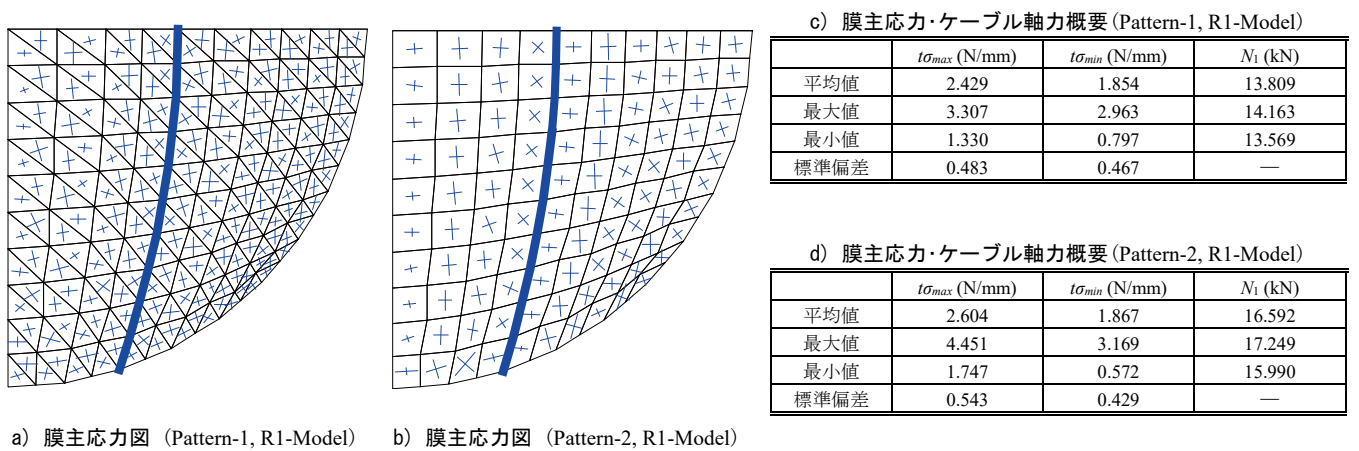
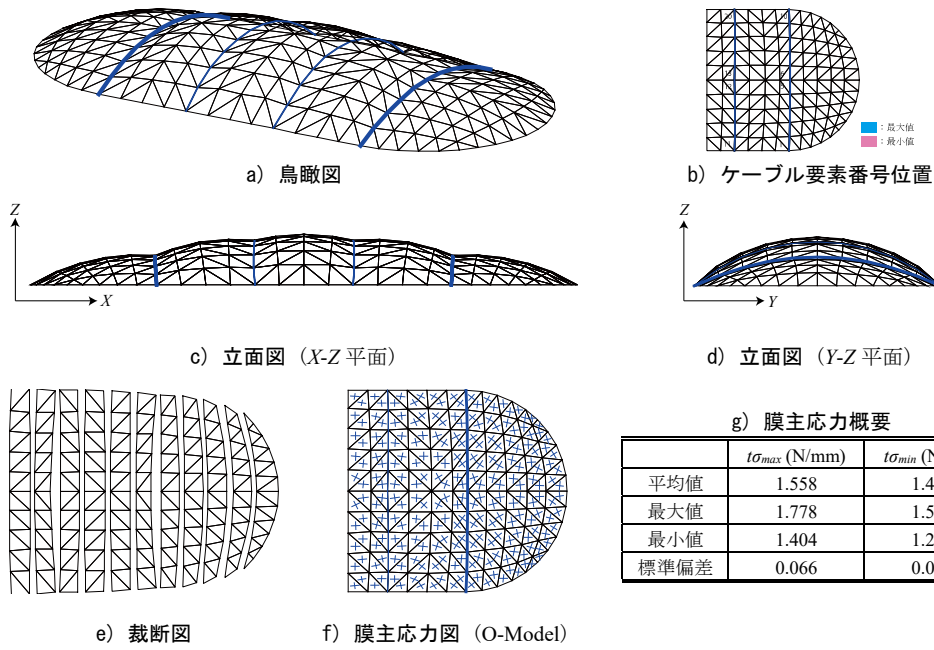


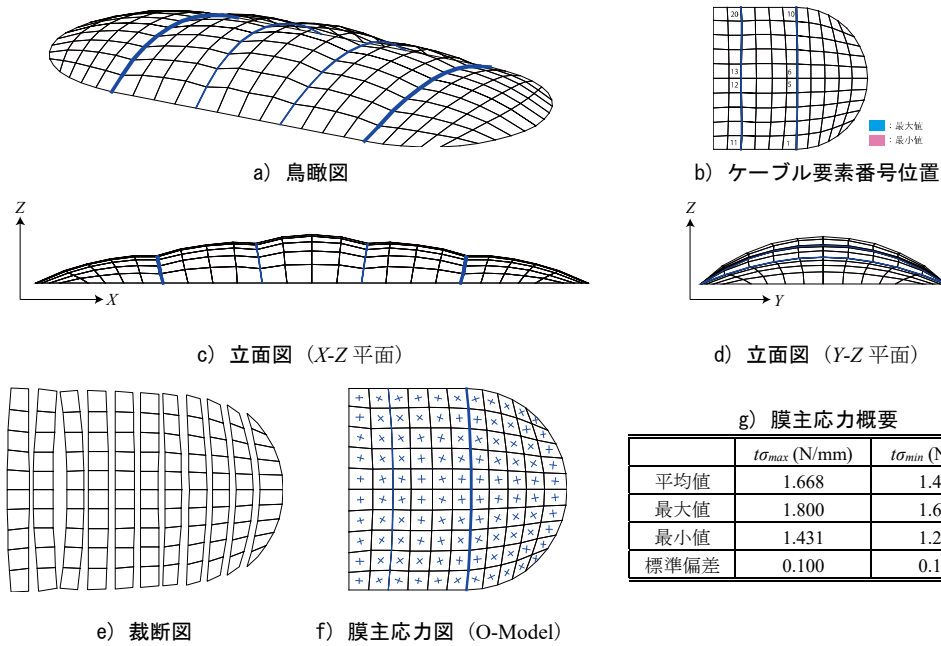
図 12 リメッシュ後の膜主応力図 (Model-B, R1-Model)



h) ケーブル長さ・軸力

要素番号	ケーブル長さ (m)	ケーブル軸力 (kN)
1	1.917	12.400
2	1.878	12.452
3	1.851	12.376
4	1.835	12.328
5	1.827	12.308
6	1.827	12.308
7	1.835	12.328
8	1.851	12.376
9	1.878	12.452
10	1.917	12.400
11	2.132	5.001
12	2.005	5.000
13	1.914	5.016
14	1.854	5.066
15	1.825	5.000
16	1.825	5.000
17	1.854	5.066
18	1.914	5.016
19	2.005	5.000
20	2.132	5.001

図 13 Model-C 数値結果 (Pattern-1, O-Model)



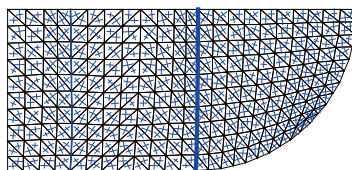
h) ケーブル長さ・軸力

要素番号	ケーブル長さ (m)	ケーブル軸力 (kN)
1	1.9119	10.022
2	1.8736	11.061
3	1.8468	11.239
4	1.8299	11.200
5	1.8218	11.158
6	1.8218	11.158
7	1.8299	11.200
8	1.8468	11.239
9	1.8736	11.061
10	1.9119	10.022
11	2.0551	5.000
12	1.9604	5.570
13	1.8922	6.018
14	1.8481	6.205
15	1.8264	6.346
16	1.8264	6.346
17	1.8481	6.205
18	1.8922	6.018
19	1.9604	5.570
20	2.0551	5.000

図 14 Model-C 数値結果 (Pattern-2, O-Model)

a) 膜主応力・ケーブル軸力概要 (Pattern-1, R1-Model)

	$t\sigma_{max}$ (N/mm)	$t\sigma_{min}$ (N/mm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)
平均値	1.691	1.371	11.611	4.482
最大値	2.345	2.223	11.944	4.759
最小値	0.878	0.554	11.412	4.265
標準偏差	0.332	0.363	—	—



b) 膜主応力・ケーブル軸力概要 (Pattern-2, R1-Model)

	$t\sigma_{max}$ (N/mm)	$t\sigma_{min}$ (N/mm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)
平均値	2.009	1.355	10.294	5.565
最大値	4.904	2.630	10.207	6.092
最小値	0.756	-1.167	9.411	4.208
標準偏差	0.572	0.456	—	—

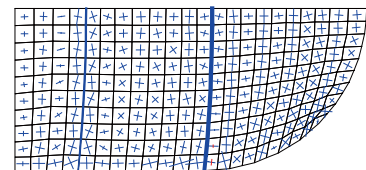


図 15 リメッシュ後の膜主応力図 (Model-C, R1-Model)

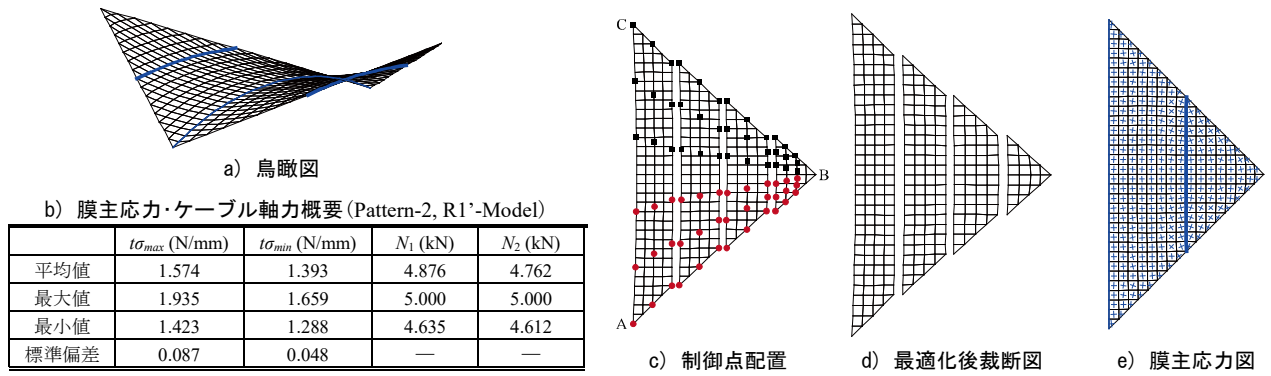


図 16 リメッシュ後の裁断図解析数値結果 Model-A (Pattern-2, R1'-Model)

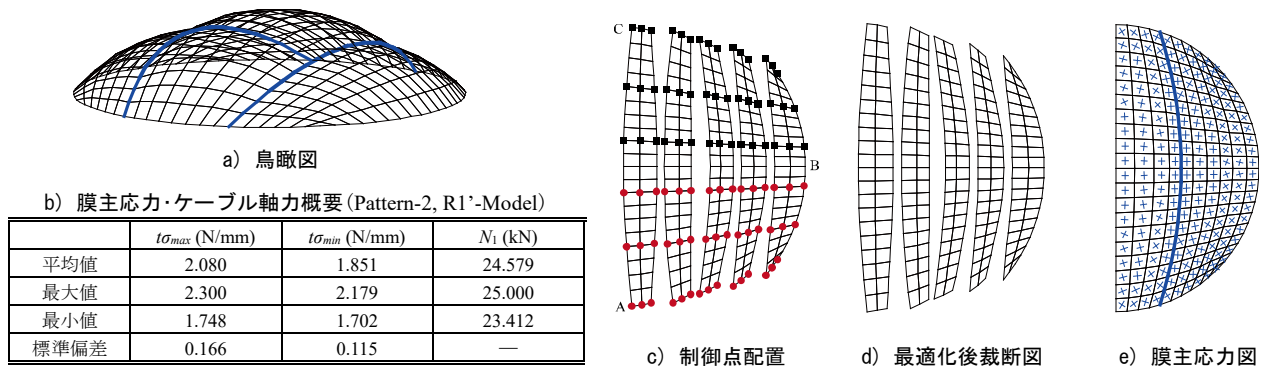
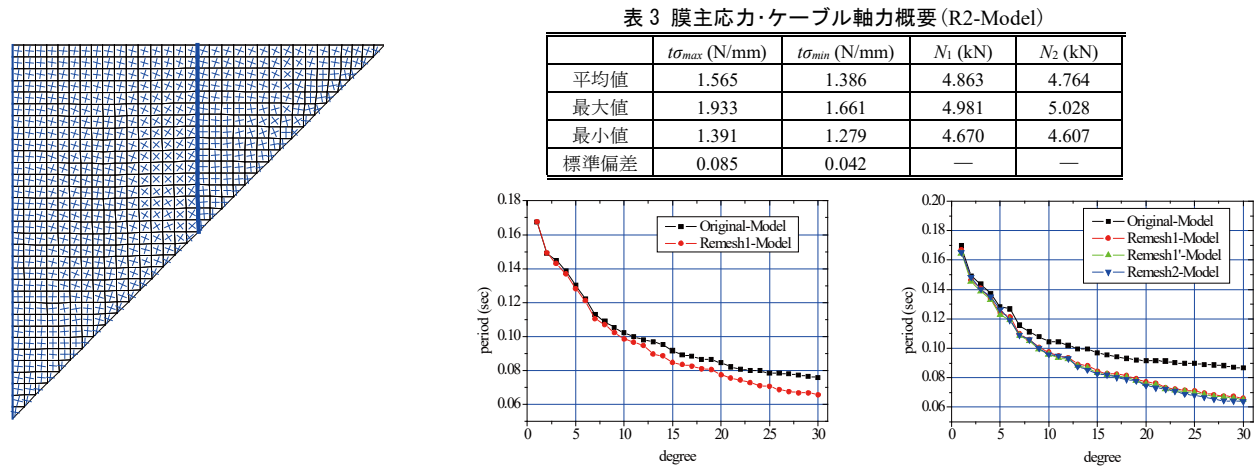
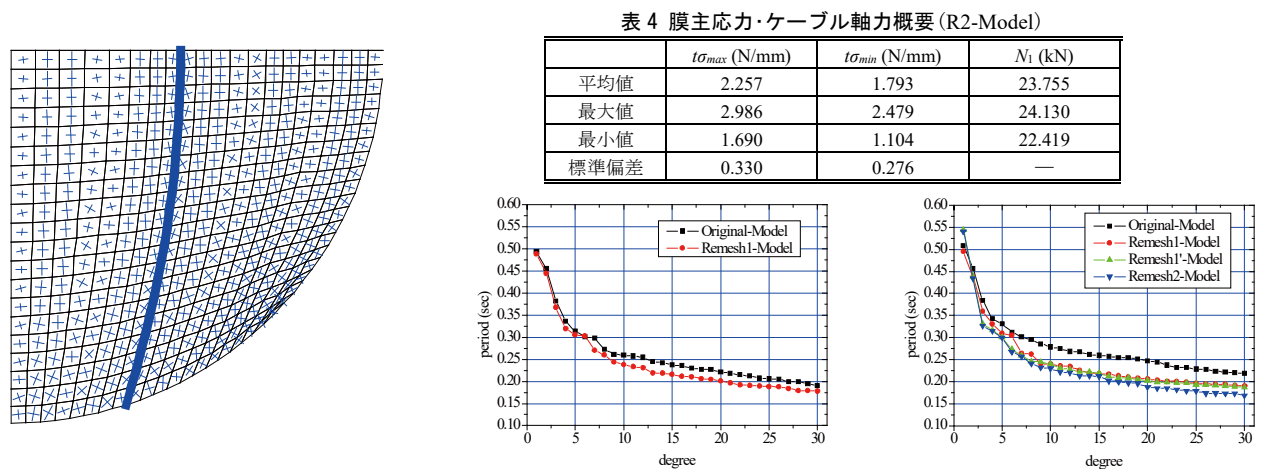


図 20 リメッシュ後の裁断図解析数値結果 Model-B (Pattern-2, R1'-Model)



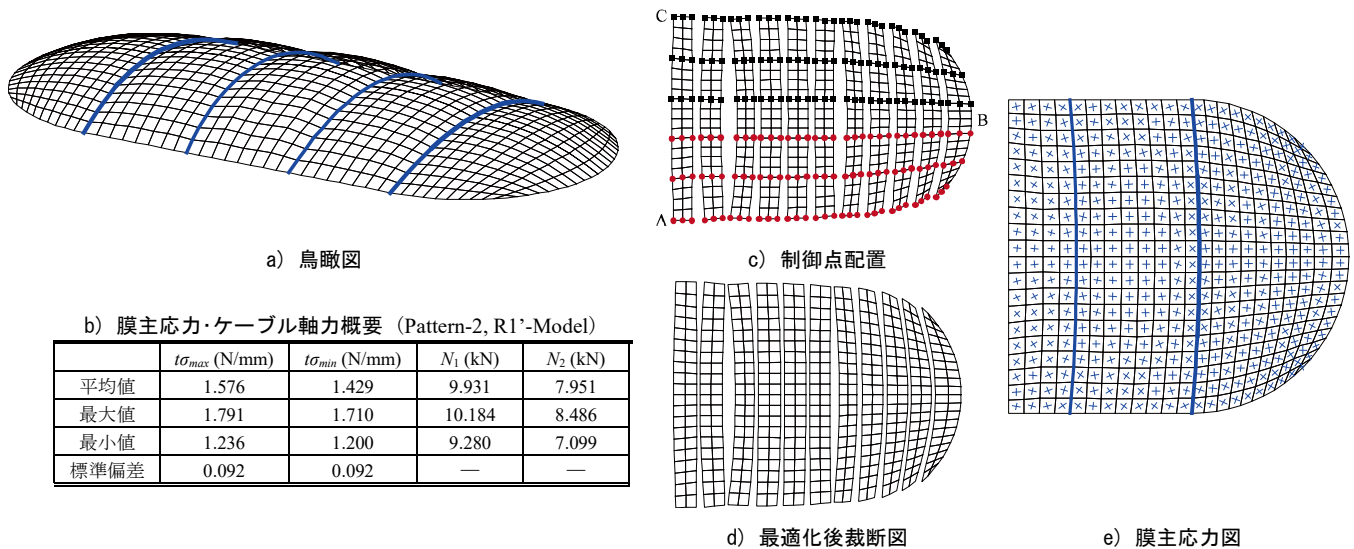


図 24 リメッシュ後の裁断図解析数値結果 Model-C (Pattern-2, R1'-Model)

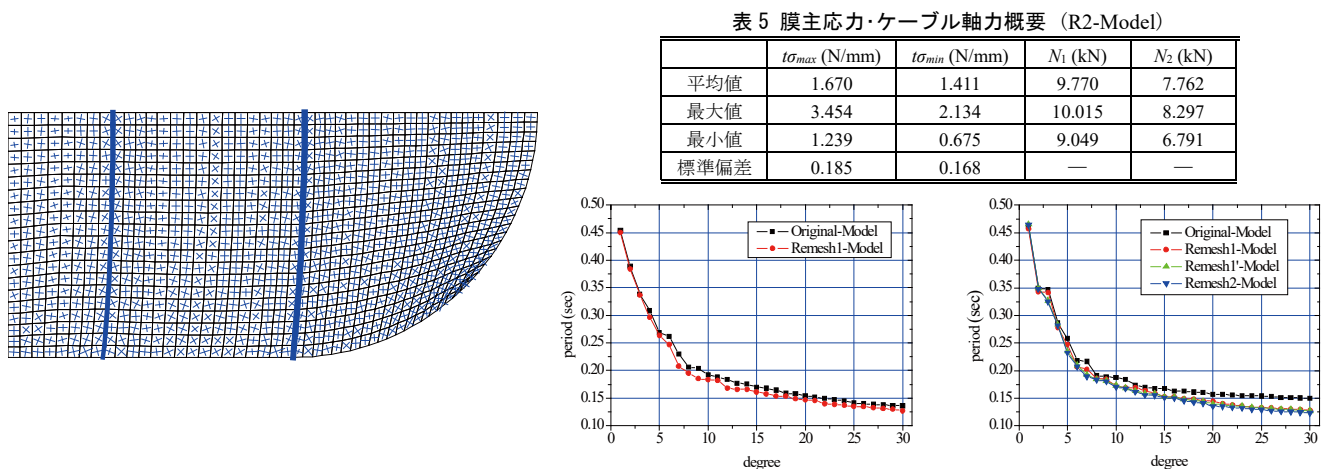


図 25 Model-C 膜主応力図 (R2-Model)

図 26 固有周期 (Model-C, Pattern-1)

図 27 固有周期 (Model-C, Pattern-2)

表 6 解の収束状況 (○ : 解析可, × : 解析不可)

	Model-A		Model-B		Model-C	
	Pattern-1	Pattern-2	Pattern-1	Pattern-2	Pattern-1	Pattern-2
O-Model	○	○	○	○	○	○
R1'-Model	×	○	×	○	×	○

参考文献

- 1) 日本建築学会編：空間構造の数値解析ガイドブック，丸善，2017
- 2) T. Honma, N. Ataka : Geometrically Nonlinear Structural Analysis by FEM Using the Coordinate Value on a Deformed Body, Information, 7(5), 569-584, 2004
- 3) 本間俊雄，合田雄策，安宅信行：座標値を未知量とした有限要素技術による張力構造解析の一方法，日本建築学会構造系論文集，**602**, 161-169, 2006
- 4) 本間俊雄，森哲也，坂中玲子：膜構造の裁断図解析と静的・動的な応力・変形解析及び発想・設計支援システムについて，膜構造研究論文集，**21**, 1-13, 2007
- 5) 本間俊雄，佐伯祐介，坂中玲子：座標仮定有限要素法を用いた張力構造の動的解析，膜構造研究論文集，**21**, 1-13, 2007
- 6) 本間俊雄，福留正樹：膜構造における形状・応力指定の裁断図解析に関する考察及び試験体模型を用いた形態の定性的確認，日本膜構造協会，膜構造研究論文集，**24**, 9-16, 2010
- 7) 黒木涼，本間俊雄，中村達哉：任意境界形状を有する空気膜構造の形状・裁断図同時解析と試験体による定性的形態確認，膜構造研究論文集，**26**, 29-36, 2013
- 8) R. Kuroki, T. Honma : Cutting Pattern Analysis with Form Finding for Pneumatic Membrane Structure and Curved Surface Form Confirmation Using Miniature Model, Proceeding of the First Conference Transformable, 423-428, Seville, 2013
- 9) 真柄栄毅，国田二郎，川股重也：混合法によるケーブルネットの解析その(1)，日本建築学会論文報告集，**218**, 37-48, 1974
- 10) 真柄栄毅，国田二郎，川股重也：混合法によるケーブルネットの解析その(2)，日本建築学会論文報告集，**220**, 35-45, 1974
- 11) 藤田直人，大崎純，小嶋淳，宮津祐次：線材で補強された膜構造物の裁断図形状最適化，コロキウム構造形態の解析と創生，63-68, 2014
- 12) 村嶋野乃香，本間俊雄，横須賀洋平：Bézier 曲面を用いた膜構造の形状・裁断図同時解析，日本建築学会大会学術講演梗概集(九州)，771-772, 2016, 8

SIMULTANEOUS OPTIMIZATION ANALYSIS OF SHAPE AND CUTTING PATTERN
FOR CABLE-REINFORCED MEMBRANE STRUCTURE USING LAGRANGE MULTIPLIERS METHOD

Hiroshi Utsunomiya^{*1)}

Toshio Honma^{*2)}

Yohei Yokosuka^{*3)}

SYNOPSIS

In this paper, a finite element technique with coordinate assumption using Lagrange multipliers method that treats axial force of cable as the unknown quantity is applied to simultaneous optimization analysis of shape and cutting pattern for cable-reinforced membrane structure. Simultaneous optimization analysis of shape and cutting pattern is implemented on the stress specification. The analysis models are a cable-reinforced suspension membrane structure and cable-reinforced pneumatic membrane structures. We describe the detailed procedure of the cutting pattern analysis and the subdivision for the finite element, and create a analysis model that is applicable to time history response analysis.

Consequently, the converging solution can be obtained for various membrane structure models by using the procedure of the cutting pattern analysis indicated here.

^{*1)} Graduate student, Dept. of Architecture & Architectural Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ.

^{*2)} Professor, Dept. of Architecture & Architectural Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ.

^{*3)} Associate Professor, Dept. of Architecture & Architectural Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ.