# およびモデル実験に関する基礎的考察

# 陳 坤<sup>\*1</sup> 川口健一<sup>\*2</sup>

## 梗 概

既往の研究では、張力材によって補剛された骨組に関する例は多い。それらの研究には補剛効果を 考察するとき、張力材の弾性剛性を考慮しなければならない。本論文では、メカニズムのケーブルを用い てコラムを補剛する例を通して、補剛効果には張力材の弾性剛性の影響がないこともあるのを述べた。ま た、荷重を経由したメカニズムのケーブルの補剛効果に定式化を行って、外力によって生じた仮のバネ 係数というものを提案した。さらに、モデル実験とを幾何的非線形解析を行って、理論を実証し、実験中 の座屈現象も数値解析で再現できた。

## 1. はじめに

既往研究では、張力材を用いて様々なトラス、ラチスシェ ル、アーチなど構造システムを補剛する研究が多い。それら の研究は、張力材の弾性剛性および初期張力が構造の座屈に 対する影響を着目している<sup>1,45,10</sup>。しかし、既往研究の共通点 は、張力の補剛効果を考慮するとき、張力材の本来の弾性剛 性を考慮せざるを得ない。

一方、著者らは負圧型空気膜構造のようなシステムでは、 柔らかい張力材が荷重を経由するとき、数値解析やモデル実 験で張力材の補剛効果につて検討した<sup>2)</sup>。メカニズムの張力 材の弾性剛性は補剛効果に影響が少ないことが分かった。本 論文では、荷重を経由した張力材の補剛効果について定式化 を行って、仮のバネ係数という張力材の載荷によって生じた 剛性を提出し、座屈コントロール方程式を導いた。さらに、 モデル実験でその定式化を実証した。

まず、図1に示す簡易モデルは張力材の弾性剛性と張力材 の内力により各々の補剛効果について説明する。



図1 ケーブルを用いるコラムの補剛

図1の(a)には、 $E_cA_c$ はケーブルの弾性剛性、Tはコラムの 座屈直前のケーブルの内力、 $l_c$ はケーブルの長さである。 $E_bA_b$ はコラムの弾性剛性、 $E_bI_b$ はコラムの曲げ剛性、 $l_b$ はコラム の長さである。コラムの端部に集中荷重Fを与えている。仮 定に $E_bA_b \gg E_cA_c$ とすると、x方向におけるケーブルの弾性剛

\*1 東京大学大学院工学系研究科 建築学専攻 大学院生

性の成分を無視することができる。

図1の(b)は図1の(a)の簡略図である。図1の(b)に示すバネ 係数k,は以下の式により計算される。

$$k_{y} = \frac{2d^{2}}{l_{c}^{2}} \frac{E_{c}A_{c}}{l_{c}} + \frac{2h^{2}}{l_{c}^{2}} \frac{T}{l_{c}}$$
(1)

バネ係数 $k_y$ は2つの部分に分けることができる:ケーブルの弾性剛性 $E_cA_c$ によって生じた $k_E$ とケーブルの内力**T**によって生じた $k_T$ である。

$$\begin{cases} k_{E} = \frac{2d^{2}}{l_{c}^{2}} \frac{E_{c}A_{c}}{l_{c}} \\ k_{T} = \frac{2h^{2}}{l_{c}^{2}} \frac{T}{l_{c}} \end{cases}$$
(2)

krの符号は以下のように判断する。

$$k_T > 0, \text{ if } T \text{ is tension.}$$

$$k_T < 0, \text{ if } T \text{ is compress.} \tag{3}$$

$$k_T = 0, \text{ if } T \text{ is } 0.$$

式(2)中、 $k_E \geq k_T$ の比は  $2h^2 T_-$ 

$$\frac{k_T}{k_E} = \frac{\overline{l_c^2} \ \overline{l_c}}{\frac{2d^2}{l_c^2} \frac{E_c A_c}{l_c}} = (\frac{h}{d})^2 \frac{T}{E_c A_c}$$
(4)

となる。通常、 $E_cA_c >> T$ が成立するため、ケーブルの内力 Tによって生じた $k_T$ を無視することができる。コラムは主に弾性剛性 $E_cA_c$ によって生じた $k_F$ で補剛される。

それに対して、本論文中は以下の状況を考えている。ケーブルの弾性剛性 $E_cA_c$ によって生じた $k_F$ を無視することができ、コラムは主に内力 Tによって生じた $k_T$ で補剛される。図2にその状況の1つ例を示す:2本のケーブルを用いてコラムを補強し、集中荷重Nを直接的にケーブルに与える。同時に、コラムの端部に集中荷重Fを与えている。コラムは座屈が発生する場合、ケーブルが伸びなしのメカニズムの変形が発生し、ケーブルの本来の弾性剛性はコラムに補剛効果を与えな

<sup>\*2</sup> 東京大学大学院生産技術研究所 教授・工博



図2 メカニズムのケーブルを用いるコラムの補剛例

#### 2. 仮のバネ係数の算出

本節に、図2に示すケーブルの補剛効果について検討する。 コラムは座屈が発生するとき、ケーブルがメカニズム変形が 発生するため、変形後のケーブルの釣り合い形状を考慮する べきである。以下は、平面内のケーブルの変形を対象として 述べる。



図3 平面内のメカニズム変形が生じたケーブル 図3に示す局部デカルト座標系xyzにおけるx, y, z軸は図2 に示す全体でデカルト座標系におけるx, y, z軸と平行する。 シンボル」とⅡはそれぞれケーブルがメカニズム運動の発生 前と発生後の状態を示すものである。

まず、平面xyには、節点Cはyの方向に変位vが発生し、 C'の位置に移動した。そのとき、節点Bは節点B'のところに 移動した。仮定にAの初期座標は(0,0,0)、Cの初期座標は(0,  $\bar{y}_{c}, 0$ )とする。そして、C'の座標は(0,  $\bar{y}_{c}+v, 0$ )になる。また、 変形後の  $\mathbf{B}'$ の座標は( $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}'}, \bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{B}'}, \mathbf{0}$ )とする。ここに、 $\mathbf{B}$ の位置を 把握するため、 $\bar{y}_{B} \in (0, \bar{y}_{C}) \geq \bar{x}_{B} < 0 \geq \tau \delta_{o}$ 

ケーブルはメカニズム変形が発生する前と後に、ケーブル の長さが同じであるため、

$$\begin{cases} \overline{x}_{B'}^{2} + \overline{y}_{B'}^{2} = R_{1}^{2} \\ \overline{x}_{B'}^{2} + (\overline{y}_{B'} - \overline{y}_{C} - \nu)^{2} = R_{2}^{2} \end{cases}$$
  
が成立する。  
そして、式(5)を解けて、B'の座標は

$$\begin{cases} \overline{y}_{B'} = (\frac{R_{1}^{2} - R_{2}^{2} + (\overline{y}_{C} + v)^{2}}{2(\overline{y}_{C} + v)}) \\ \overline{x}_{B'} = (-\sqrt{R_{1}^{2} - \overline{y}_{B'}}^{2}) \end{cases}$$
(6)

である。

釣り合い状態Ⅱに、節点Cの力と節点Aのモーメントの釣

り合いの条件から、

$$\begin{cases} \frac{F_{C'\bar{x}}}{F_{C'\bar{y}}} = \frac{-\bar{x}_{B'}}{\bar{y}_{C} + v - \bar{y}_{B'}} \\ N \bar{y}_{B'} = F_{C'\bar{x}} (\bar{y}_{C} + v) \end{cases}$$
(7)  
が得られる。

式(7)の解は、

$$\begin{cases} F_{C'\overline{y}} = \frac{F_{C'\overline{x}}}{(\frac{-\overline{x}_{B'}}{\overline{y}_{C} + v - \overline{y}_{B'}})} \\ F_{C'\overline{x}} = \frac{N\overline{y}_{B'}}{\overline{y}_{C} + v} \\ \geq \tilde{\tau}_{x} \mathfrak{Z}_{\circ} \end{cases}$$
(8)

また、式(6)を式(8)に代入して、

$$F_{C'\overline{y}} = \frac{N((\overline{y}_{C} + v)^{4} - (R_{1}^{2} - R_{2}^{2})^{2})}{2(\overline{y}_{C} + v)^{2}\sqrt{4(\overline{y}_{C} + v)^{2}R_{1}^{2} - (R_{1}^{2} - R_{2}^{2} + (\overline{y}_{C} + v)^{2})^{2}}}$$
$$F_{C'\overline{x}} = \frac{N}{2}(\frac{R_{1}^{2} - R_{2}^{2}}{(\overline{y}_{C} + v)^{2}} + 1)$$
(9)

が得られる。

図2に示す2本のケーブルの対称性を考慮して、節点C におけるv方向の合力は

$$\begin{split} F_{y} &= F_{C'\overline{y}}(v) - F_{C'\overline{y}}(-v) \\ &= \frac{N((\overline{y}_{C} + v)^{4} - (R_{1}^{2} - R_{2}^{2})^{2})}{2(\overline{y}_{C} + v)^{2}(\sqrt{4R_{1}^{2}(\overline{y}_{C} + v)^{2} - (R_{1}^{2} - R_{2}^{2} + (\overline{y}_{C} + v)^{2})^{2}}) \end{split}$$

$$\frac{N((\overline{y}_C - v)^{+} - (R_1^2 - R_2^2)^2)}{2(\overline{y}_C - v)^2(\sqrt{4R_1^2(\overline{y}_C - v)^2 - (R_1^2 - R_2^2 + (\overline{y}_C - v)^2)^2})} \quad (10)$$

を含めていない。
$$v$$
はとても小さいの場合、  
 $F_y \approx k_{xy}v$  (13)

のように近似することができる。

式(12)に示す $k_{xy}$ は反力と変位の比例係数を見做せる。そのため、ここに $k_{xy}$ を仮のバネ係数(stiffness of pseudo-spring)と呼称する。 一方 yは小さい場合に x 方向の合力は

$$F_x = F_{C'\bar{x}}(v) + F_{C'\bar{x}}(-v) \approx N(1 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\overline{y}_C^2})$$
(14)

となる。

特に、
$$R_1 = R_2 = l_c$$
が成り立つ場合に、  

$$k_{xy} = \frac{4Nl_c^2}{(4l_c^2 - \overline{y}_c^2)^{(3/2)}}$$
(15)

 $F_x \approx N$ 

のように計算される。

# 3. 座屈コントロール方程式の算出



図4 メカニズムケーブルの補剛の簡略モデル まず、図4は図2に示すモデルの面内の簡略モデルである。 図4の(b)には、釣り合い状態の微分式は、

$$y'' + \frac{F + F_x}{EI_z} y = -F_y \frac{(l-x)}{EI_z} + \frac{(F + F_x)v}{EI_z}$$
 (17)

のように書ける。定義パラメーター $\lambda$ は  $l^2 = \frac{F + F_x}{FI}$  (18)

式(13)と式(18)を式(17)に代入すると、

$$y'' + l^{2}y = -\frac{k_{xy}v}{EI_{z}}(l-x) + l^{2}v$$
(19)

となる。 式(19)の一般解は、

$$y = A\cos l x + B\sin l x - \frac{k_{xy}v}{l^2 E I_z}(l-x) + v$$
(20)

である。

図 4  $\mathcal{O}(\mathbf{a})$ の境界条件は、 (1) y = 0, y' = 0 at  $x = 0_{\circ}$ (2) y = v at  $x = l_{\circ}$  境界条件(1)と(2)を用いて、

$$[(\frac{k_{xy}l}{l^2 E I_z} - 1)\cos l l - \frac{k_{xy}}{l^3 E I_z}\sin l l]v = 0$$
(21)

が得られる。

(16)

ケーブルの水平変位vが任意小さいため、式(21)を満たす条件は、

$$(\frac{k_{xy}l}{l^2 E I_z} - 1)\cos l l - \frac{k_{xy}}{l^3 E I_z}\sin l l = 0$$
(22)

である。式(22)は座屈コントロール方程式(Buckling control equation)と呼称する。

(a)、若しケーブルに与える集中荷重N = 0の場合、 $k_{xy} = 0$ である。そのとき、式(22)は

$$F_{cr} = \frac{p^2 E I_z}{\left(2l\right)^2} \tag{24}$$

となる。式(24)の値は境界条件が片端固定、片端自由である 長さ1のコラムの座屈荷重と同じである。

(b)、若しケーブルに与える集中荷重 $N \neq 0$ の場合、 $k_{xy} \neq 0$ である。2 つパラメーターを

$$u = 11 \tag{25}$$

$$r = \frac{\kappa_{xy}}{EI_z / l^3} \tag{26}$$

のように定義する。 式(25)と式(26)を式(22)に代入すると、

$$\tan u = u - \frac{u^3}{r} \tag{27}$$

が得られる。

式(27)は超越方程式である。そして、数値解析などの方法 を用いて解を求めることができる。

また、仮の座屈荷重(pseudo-critical load)

$$P_{cr} = u^2 \frac{EI_z}{l^2}$$
(28)

とすると、座屈荷重 $F_{cr}$ は

$$F_{cr} = P_{cr} - F_x \approx u^2 \frac{EI_z}{l^2} - N(1 + \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{\overline{y}_c^2})$$
(29)

となる。

式(29)中、uは独立変数Nの関数のため、 $F_{cr}$ は明らかにNとの関係を述べるのは、難点である。

## 4 コラムのモデル実験と数値解析

図5の(a)に示すように1本のパイプ、片端をねじで挿し込んで固定する。この境界を固定支持とみなす。パイプの自由端には2本の面内のケーブルと繋がれている。パイプの頂点の近くに平行棒を設置し、パイプの面外方向の移動を防ぐ。ケーブルの材質は綿線である。図(b)は数値解析のモデルを示

す。パイプ(コラム)とケーブルの材料係数は表1に示す。



図5 単本梁の実験装置と数値解析モデル

表1 解析モデルの材料係数

	ヤング係数[GPa]	ポアソン比	外径	内径
			[mm]	[mm]
ケーブル	10.8 <sup>11)</sup>		1	0
コラム	2.82 <sup>2)</sup>	0.38	6	4

数値解析では、コラムが初期不整なしとする。幾何的非線 形有限要素法解析では、一本のケーブルは1つの幾何的非線 形トラス要素で、コラムは7つの等長の幾何的非線形梁要素 で分割する。接線剛性マトリクスの最小正の固有値は負の符 号に変えるの直前の最大荷重は、座屈荷重と呼称する。その 座屈荷重に対応する座屈モードを一次モードと呼称する。





図6はケーブルに与える外力Nと座屈荷重 $F_{\alpha}$ との関係を 示す。シンポル Num.、Theo.と Exp.はそれぞれ、幾何的非線 形解析、節3の理論とモデル実験で得られた結果である。

まず、理論値と幾何的非線形解析の結果を比較してみる。 図6によって、その2つの値はほぼ一致である。節3に述べ た理論の正確性を実証した。

次は、モデル実験と幾何的非線形解析の結果を比較する。 実験で得られた座屈荷重 $F_{\alpha}$ (Exp.)の変化は数値解析に得られ た $F_{cr}$ (Num.)の曲線によく一致することが確認できた。 ケーブルに与える外力荷重Nを増加することで、座屈が発生

までコラムに直接に与える荷重Fに大きな影響を与えたこと がわかった。また、外力荷重 N の増加により、座屈荷重  $F_{cr}$ (Num.)は最初増加して、外力荷重Nは約0.85kgのとき、座 屈荷重 $F_{cr}$  (Num.)は最大値になった。その後、外力荷重Nの 増加に対して、 $F_{cr}$ (Num.)がかえって減少した

図6に実験の座屈現象と数値解析により得られた一次座屈

モードを比較した。数値解析で実験現象を再現できた。ケー ブルに与える外力のNが2本のケーブルに補剛効果の影響を 与えることで、コラムの座屈モードが変わったと考えられる。



## 5. まとめ

本論文は、メカニズムの張力材が荷重を直接的に負担する 場合の補剛効果について研究した。その補剛方法では、張力 材の弾性剛性が無視でき、張力材の張力は主に補剛効果を提 供した。以下の知見を得た。

1)、平面内におけるメカニズムのケーブルを用いるコラムの 例を通して、仮のバネ係数(stiffness of pseudo-spring)というコ ンセプトを提出し、コラムの座屈コントロール方程式を導い た。

2)、モデル実験を行った上で、理論値、幾何的非線形解析の 結果と実験の結果を比較して、本論文に提案した理論を実証 した。メカニズムの張力材で構造を補剛するとき、張力材に 与える外力は最適値が存在することが分かった。また、有限 要素解析でモデル実験中のコラムの座屈現象を再現できた。

#### 謝辞

本研究は、東京大学卓越大学院・若手奨励研究費の助成を 受けている。ここに記して謝意を表する。

#### 参考文献

1) 陳坤,洪文汗,川口健一,負圧型空気膜構造の支持骨組の座屈挙動と補 強方法についての基礎的考察, 膜構造研究論文集 2011, No. 25, pp.17-24, 2011 2) 陳坤、川口健一、張力材経由の載荷による座屈補剛効果についての基礎 的考察, 膜構造研究論文集 2012, No. 26, pp.13-19, 2012

3) Kun CHEN, Ken'ichi KAWAGUCHI, Preliminary research on stiffening effect of tensioned members with mechanism system and its application. Journal of Structure Engineering, Vol.60B, 2014 (Admitted)

4) Xiaoming YANG. Study of the type and stability of cable-arch structure. Ph.D dissertation of Xi'an University of archticture and technology in China, 2004

5) 日本建築学会、ラチスシェルの座屈と耐力、丸善株式会社、2010

6) 川口健一,一般逆行列と構造工学への応用,コロナ社,2011

 J.L.Meek, Hoon Swee Tan, Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 261-282, 1984

 John Argyris, An excursion into large rotations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp. 85-155, 1982

9) 久田俊明,野口裕久,非線形有限要素法の基礎と応用,丸善株式会社,1995

10) 呉明児、小松宏年、佐々木睦朗、ケーブルにより補剛されたアーチに関

する実験的研究,日本建築学会構造系論文集,No.584, pp.87-94, 2004

 11) 関島謙蔵、川上清陸など、連続繊維ロープの性能評価(第2報)、関東 学院大学工学総合研究所報36、pp. 11-20, 2008

# Fundamental Study on Formulation about Stiffening Effect of Tensioned Components under Load and Model Experiment

Kun CHEN<sup>\*1)</sup> Ken'ichi KAWAGUCHI<sup>\*2)</sup>

#### **SYNOPSIS**

In the past researches, tensioned components were widely used as additional stiffeners to improve rigidity of skeletons, and When considering the stiffening effect of tensioned components, their stiffness are always paid great attention to. While in this paper, by according an example in which mechanism cables are utilized to stiffen a column, how stiffness of tensioned Components do not contributing to stiffening skeleton is discussed. Meanwhile, authors propose a parameter called stiffness of pseudo-spring and deduce the buckling control equation of this case. Then by carrying out model experiment and geometrical nonlinear FEM analysis at the same time, the stiffening theory about mechanism tensioned components is verified, and buckling phenomenon of column in model experiment can be replicated in numerical analysis.

<sup>\*1)</sup> Graduate Student, Dept. of Engineering, the Univ. of Tokyo, M.Eng

\*2) Prof, IIS, the Univ. of Tokyo, Dr. Eng