膜構造における形状･応力指定の裁断図解析に関する考察 及び試験体模型を用いた形態の定性的確認

本間 俊雄 *1
福留 正樹 *2

梗　　概

膜構造の裁断図における裁断線は、従来から設計原型曲面決定後、得られた曲面の測地線が利用されてきた。最近、形状や応力状態を指定した裁断線決定の最適化に関する研究がなされている。著者らも、独自に定式化した座標仮定有限要素技術により、裁断線決定に対する最適化の数値計算例を示している。本論文では、座標仮定有限要素法による形状あるいは応力指定と裁断図決定の同時解析において、矩形や三角形要素の形状及び要素分割モデル等による解への影響を調べ、ミニチュア試験体模型の実験結果より、得られた裁断図の定性的検証を示す。これらの内容から裁断図解析に対する数値計算上の知見をまとめる。

1．はじめに

膜材に代表される張力材は形状不確定な自然状態で存在し、初期張力を導入することで安定した構造剛性を確保する。この特性により、張力構造の解析は初期形状解析や裁断図解析等、膜構造特有の数値計算を実施する必要がある[1]。通常、初期形状解析により設計原型曲面の決定後、得られた曲面の縮尺率を考慮して測地線を裁断線とする方法が採られている。しかし、最近では、形状や応力状態の指定と裁断図決定の同時解析を行う最適化研究が見られる[2-6]。

著者らは、平面上に展開した無応力の膜材を基準に、応力･変形解析が可能な座標値を直接未知量とした座標仮定有限要素技術により､ケーブル(トラス)要素･三角形膜要素の離散化式とそれらの数値計算例を示した[7,8]。裁断図解析では三角形要素によるパラメトリック曲線を用いた形状･応力指定と裁断線決定の同時解析を示し、その特性をまとめている[5,6,9]。

本論文では、この座標仮定有限要素技術による膜の離散化に矩形要素(双一次4節点アイソパラメトリック要素)を採用し、裁断図解析を実施する。その際、従来の一次三角形要素との比較と要素の疎密による裁断線の違いや形態への影響を調べる。次に、裁断図結果を用いてミニチュア試験体模型を作成し、数値結果と試験体の形態や計測値の定性的比較により裁断線とスプライン曲線の関係を考察する。以上の結果から有限要素法による形状･応力指定を伴った裁断図解析に対する計算負荷低減等の数値解析上の知見をまとめる。

2．構造モデルの支配方程式と離散化定式化

2.1　平衡方程式

ひずみ$\boldsymbol{\gamma}$を安定形態の座標値$\mathbf{X}$で表現すると、構造モデルの非線形平衡方程式と接線剛性行列は次の仮想仕事式より導びかれる。

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{X})\,d\Omega - \delta\mathbf{X}^T\lambda\mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{\tau}$：応力ベクトル, $\mathbf{f}$：荷重モードベクトル, $\mathbf{0}$：零ベクトル, λ：荷重パラメータ, Ω：解析領域 とする。ひずみはGreenひずみを採用する。

最終的に次式に示す非線形平衡方程式($\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{f},\lambda)=\mathbf{0}$)と接線剛性行列($\mathbf{K}_t(\mathbf{X})$)が得られる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{f},\lambda) = \int_\Omega \mathbf{B}^*(\mathbf{X})^T\boldsymbol{\tau}(\mathbf{X})\,d\Omega - \lambda\mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{K}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_G(\mathbf{X}) + \mathbf{K}_S(\mathbf{X}) \tag{3}$$

ここで, $\mathbf{K}_G$：幾何剛性行列, $\mathbf{K}_S$：線形＋大変位行列である。なお、ひずみ$\boldsymbol{\gamma}$と座標値の関係とひずみ増分と座標増分の関係及び構成関係は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{X} - \mathbf{C}, \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \delta\mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} \equiv \mathbf{B}^*(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} \tag{4.a,b}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \tag{5}$$

2.2　座標仮定有限要素技術による離散化定式化

座標仮定有限要素技術における4節点アイソパラメトリック膜要素の離散化は次の通りである。

要素内の直交直線座標系による座標$\mathbf{X} = \lfloor X\ Y\ Z \rceil^T$を、形状関数$\mathbf{N}$を用いて要素節点座標$\bar{\mathbf{X}}$で表現すると次式を得る。

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{X}} \tag{6}$$

ただし、

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

*1　鹿児島大学大学院 理工学研究科 建築学専攻　教授 工学博士
*2　鉄建建設 設計部

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\,,\quad \xi_0 = \xi\xi_i\,,\quad \eta_0 = \eta\eta_i$$

$$-1 \le \xi, \eta \le 1\,,\quad \xi_1 = \xi_4 = \eta_1 = \eta_2 = 1\,,\quad \xi_2 = \xi_3 = \eta_3 = \eta_4 = -1$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \lfloor X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4\ Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z_4 \rfloor^T$$

$\mathbf{N}$ は正規化された座標系内の関数であり、直交座標系の関数に変換する。以降、文献[8]の三角形要素と同様の手順により矩形膜要素の離散化平衡方程式が次のように得られる。

$$\int_\Omega \overset{12\times3}{\mathbf{B}^{*T}}\ \overset{3\times3}{\mathbf{D}} \left[\overset{3\times12}{\mathbf{B}}\ \overset{12\times1}{\bar{\mathbf{X}}} - \overset{3\times1}{\mathbf{C}} \right] d\Omega - \overset{12\times1}{\mathbf{f}} = \overset{12\times1}{\mathbf{0}} \tag{7}$$

$$\overset{12\times12}{\mathbf{K}_G}\left(\bar{\mathbf{X}}\right) = \int_\Omega \overset{(12\times12)\times3}{\frac{\partial \mathbf{B}^{*}}{\partial \bar{\mathbf{X}}}^{T}}\ \overset{3\times1}{\boldsymbol{\tau}}\, d\Omega = \int_\Omega 2\ \overset{(12\times12)\times3}{\mathbf{R}^T}\ \overset{3\times1}{\boldsymbol{\tau}}\, d\Omega \tag{8}$$

$$\overset{12\times12}{\mathbf{K}_S}(\bar{\mathbf{X}}) = \int_\Omega \overset{12\times3}{\mathbf{B}^{*T}}\ \overset{3\times12}{\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \bar{\mathbf{X}}}}\, d\Omega = \int_\Omega 4 \left(\overset{(12\times12)\times3}{\mathbf{R}^T}\ \overset{12\times1}{\bar{\mathbf{X}}} \right) \overset{3\times3}{\mathbf{D}} \left(\overset{1\times12}{\bar{\mathbf{X}}^T}\ \overset{3\times(12\times12)}{\mathbf{R}} \right) d\Omega \tag{9}$$

ただし、 $d\Omega = \|\mathbf{J}\| d\eta d\xi$ であり、数値積分が必要である。$\mathbf{R}$ の成分は、式(4.a)より次式で定義される。

$$\overset{3\times1}{\boldsymbol{\gamma}} = \overset{1\times12}{\bar{\mathbf{X}}^T}\ \overset{3\times(12\times12)}{\mathbf{R}}\ \overset{12\times1}{\bar{\mathbf{X}}} - \overset{3\times1}{\mathbf{C}}$$

なお、本論文における数値積分計算はガウスの２点積分とする。三角形要素の離散化式は文献[8]を参照のこと。

３．裁断線決定問題の定式化

裁断図解析における設計変数は、対象とする膜材の自然状態（無応力状態）上の節点座標値（平面上の裁断線座標）である。ただし、未知量の低減と裁断線を滑らかな曲線とするため、実際には裁断線をパラメトリック曲線（３次スプライン曲線）と置き換え、その曲線の制御点を未知量とする。最適化の定式化は次の２通りを設定する。

［定式化１］応力指定

釣合曲面における主応力の差の平方和を最小化する応力指定裁断線決定問題である。

$$\textit{Find} \qquad \mathbf{x}^* \tag{10}$$

$$\textit{minimize} \qquad f\left(\mathbf{x}^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i0})^T (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i0}) \tag{11}$$

$$\textit{subject to} \qquad t\boldsymbol{\sigma}^L \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le t\boldsymbol{\sigma}^U \tag{12}$$

［定式化２］形状指定

釣合曲面における座標値と想定形状の差の平方和を最小化する形状指定裁断線決定問題を扱う。

$$\textit{Find} \qquad \mathbf{x}^* \tag{13}$$

$$\textit{minimize} \qquad f\left(\mathbf{x}^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i0})^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i0}) \tag{14}$$

$$\textit{subject to} \qquad t\boldsymbol{\sigma}^L \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le t\boldsymbol{\sigma}^U \tag{15}$$

ここで、$\mathbf{x}^*$ ：裁断線（３次スプライン曲線）の制御点座標ベクトル, m ：応力を指定する要素数, $\boldsymbol{\sigma}_i$ ：i 番目の釣合形状における膜主応力値, $\boldsymbol{\sigma}_{i0}$ ：i 番目の想定主応力値, n ：形状指定の対象とする節点座標の数, $\mathbf{X}_i$ ：i 番目の釣合形状における節点座標値, $\mathbf{X}_{i0}$ ：i 番目の想定形状における節点座標値, $\boldsymbol{\sigma}_e$ ：要素 e を代表する釣合形状における膜主応力, $\boldsymbol{\sigma}^L$ ：膜応力下限値, $\boldsymbol{\sigma}^U$ ：膜応力上限値, t : 膜厚 である。

離散化式(7)-(9)を用い、平面上に存在する無応力状態の膜を基準に、［定式化１］(式(10)-(12))、［定式化２］(式(13)-(15))の裁断線決定最適化計算を実施して裁断図を得る。ここでは、共に制約条件付最適化であるため、数値計算に逐次二次計画法（sequential quadratic programing method : SQP 法）を採用した。

４．数値解析モデル

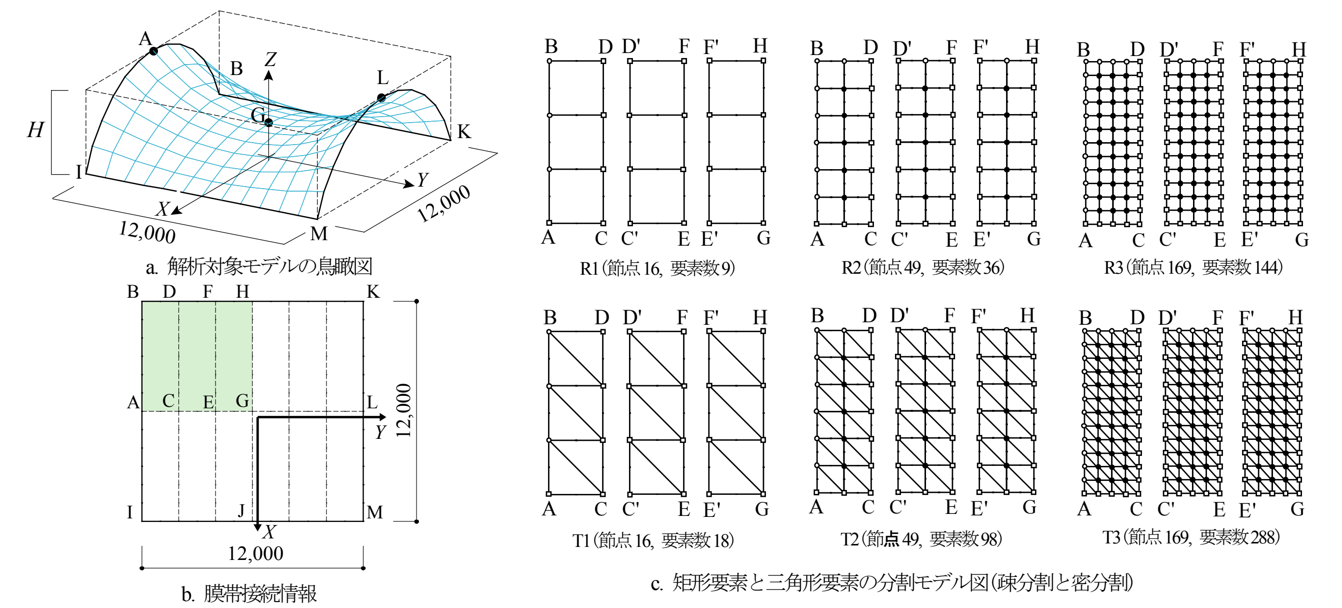
数値解析モデルは、図 1.a 鳥瞰図に示す直線と円弧の境界を持つ HP（hyperbolic paraboloid）曲面の鞍型構造モデルとする。境界部は固定とした。ライズ H=1500 - 6000 mm まで 500 mm 間隔で 10 ケースの計算を行う。膜帯の接続情報は、初期裁断図形状を用いて図 1.b に示す。解析は、構造モデルの対称性により A-B-H-G に囲まれた領域（ハッチング部）のみとする。図 1.c は矩形要素と三角形要素の分割疎密比較に用いる初期裁断形状の平面膜帯分割モデルである。矩形要素の分割モデルは、R1（9 要素,16 節点）, R2（36 要素,49 節点）, R3（144 要素, 169 節点）を準備する。三角形要素についても矩形要素に対応させ、T1（18 要素,16 節点）, T2（72 要素,49 節点）, T3（288 要素, 169 節点）を準備する。数値計算では平面膜帯の４つの裁断線（A-B, C-D, E-F, G-H）を各々3 次スプライン曲線と仮定し、その制御点を設計変数とする。なお、平面上の要素分割モデルの内部節点は固定とする。ただし、境界部と形状指定の節点座標位置を除き、構造モデルの曲面における各節点には拘束条件を与えない。採用した材料定数は表 1 に示す。形状指定の目標形状は、幾何剛性項のみを用いた線形形状解析により得られた A-G-L ライン上の節点位置とする。応力制約条件式(12),(15)は $2 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 4(N/mm)$ と上下限値を与える。応力制約の評価点は要素重心位置とした。節点位置を採用しなかった理由は計算結果に対する考察で説明する。

５．矩形要素と三角形要素による裁断線の比較

5.1 固有値解析と解の収束状況

まず、ライズ $H = 2000, 3000, 4000\ mm$ の 3 タイプの計算を示す。要素の疎密（R1, R2, R3, T1, T2, T3 : 図 1.c）のモデルにより得られた解形態に対し、固有値解析を行った。形状指定の解形態に対する要素分割レベルと固有周期の関係は図 2 の通りである。節点数 49 の要素分割モデル R2, T2 と節点数 169 の R3, T3 に対する解形態の固有周期に大きな差が認められない。応力指定についても同傾向を示した。従って、以後、節点数をできるだけ抑えることを前提に、平面上の内部節点を固定する要素分割モデル R2, T2 を使用する解形態の比較を行う。

次に、要素分割モデル R2, T2 による裁断線の評価と解形態の比較の前に、応力指定と形状指定に対する解の収束状況を表 2 に示す。矩形要素ではライズ H の上昇に伴う収束回数の



a. 解析対象モデルの鳥瞰図

b. 膜帯接続情報

R1(節点 16, 要素数 9)　R2(節点 49, 要素数 36)　R3(節点 169, 要素数 144)

T1(節点 16, 要素数 18)　T2(節点 49, 要素数 98)　T3(節点 169, 要素数 288)

c. 矩形要素と三角形要素の分割モデル図(疎分割と密分割)

図 1　鞍型構造膜モデル(解析モデルと要素分割図)

表 1 膜材料定数

膜厚	$t = 0.8 (mm)$
縦弾性係数	$E_x t = 645.3 (N/mm)$ $E_y t = 213.8 (N/mm)$
ポアソン比	$\nu_{xy} = 0.9055$ $\nu_{yx} = 0.3000$
せん断剛性	$G_{xy} t = 55.9 (N/mm)$
単位質量	$1.215 \times 10^{-6} (kg/mm^2)$

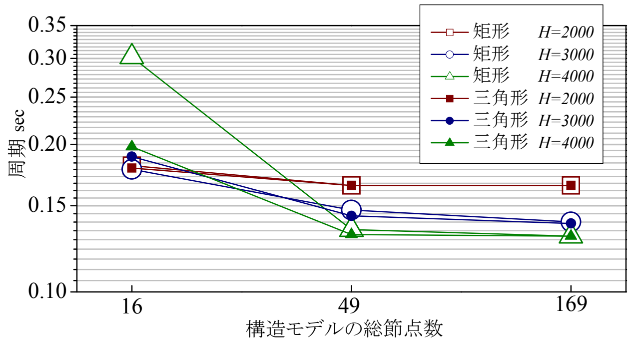


図 2　要素分割レベルと固有周期の関係(形状指定)

増加が比較的緩やかであり、$H = 6000\ mm$ まで安定した解析が可能である。一方、三角形要素による解析においてライズ H が低い計算上の収束状況はよく、ライズ H を上げると収束回数が極端に増加する。応力指定はライズが $H = 4000\ mm$ 以降、形状指定はライズ $H = 4500\ mm$ 以降解析不可になった。ただし、材料定数の違いにより多少の変動が認められる。

なお、応力指定裁断線決定問題(指定応力 $t\sigma_{e0} = 3\ (N/mm)$)の無制約条件の計算において、要素分割モデル R2, T2 では、各々 $H = 2500\ mm$ と $3000\ mm$ まで収束解が得られた。解法は準ニュートン法(quasi-Newton method : QN)を用いている。また、R3 モデルを用いたスプライン曲線の制御点を設計変数とする場合(control point : CP)と各節点を設計変数とする場合(nodal point : NP)の応力指定問題(式(10)-(12))の計算も行った。CP では $H = 3000\ mm$ まで解が得られる。NP では $H = 4000\ mm$ まで解が得られる。NP による裁断線はライズを上げても滑らかな曲線であり、CP との違いが現われた[9]。ただし、NP は CP より最低 3 倍以上の収束時間を要する。ライズが高くなるに従い、指数関数的に計算時間が増大する。ここでこれらの得られた解を比較する。図 3, 4 は上述で説明した各解析結果の解形態における膜面 A-G ラインと G-H ラインの比較である。a. $H = 2500\ mm$ の図 3 は全ての解が得られたケースである。$H = 3500\ mm$ の図 4 は R2 と T2 モデルによる比較である。凡例記号は、応力 : 応力指定、R2, T2, R3 : 分割モデル名(図 1.c 参照)、CP, NP : 設計変数の種別、$t\sigma_{e0} = 3\ (N/mm)$: 目標応力値、(2-4) : 制約条件式(12)の上下限値、QN : 準ニュートン法使用(他は SQP 法使用)。制約条件の上下限値の設定は三角形要素の収束範囲に合わせている。

5.2 裁断図と釣合形状の比較

裁断図及び釣合形状を図 5, 6 に示す。図 5 は応力指定の解析解結果(H =3500)である。図 6 は形状指定の解結果(H =

表 2　各解法による解の収束結果(○ : 解析可能,　× : 解析不可)

ライズ H (mm)		1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000
応力指定問題	矩形要素　R2	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×
	三角形要素 T2	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
形状指定問題	矩形要素　R2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	三角形要素 T2	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×

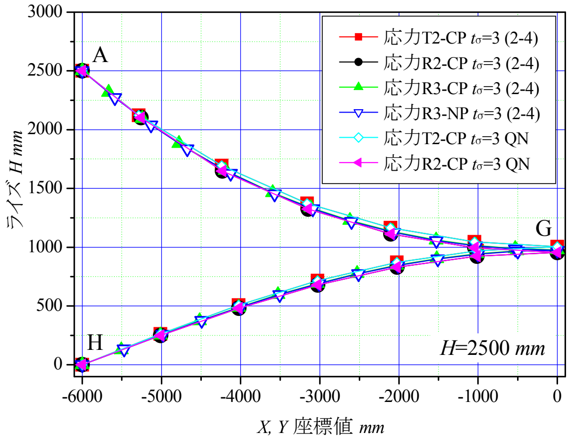


図3　応力指定裁断図決定の各解析モデルより得られた構造モデルの A-G, H-G ラインの形状比較　H= 2500

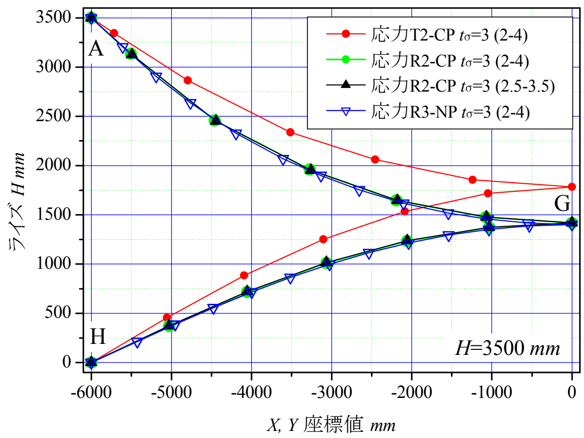
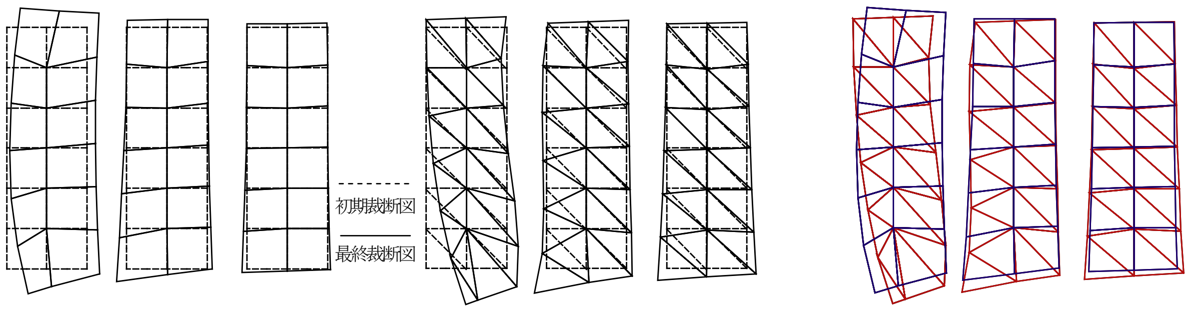
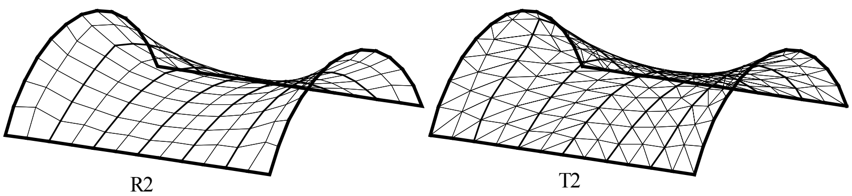


図4　応力指定裁断図決定の各解析モデルより得られた構造モデルの A-G, H-G ラインの形状比較　H= 3500



a. 裁断図(矩形要素)R2　　b. 裁断図(三角形要素)T2　　c. R2 と T2 による裁断図の比較

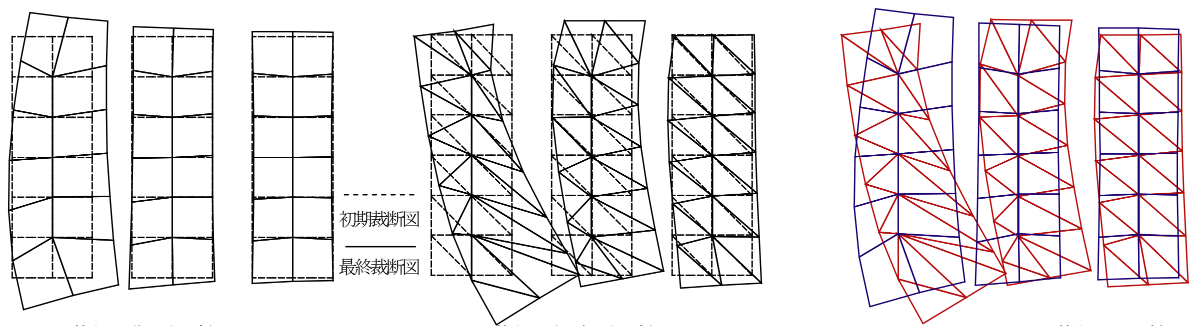


d. R2 と T2 による裁断図より構成された空間形態の比較(鳥瞰図)

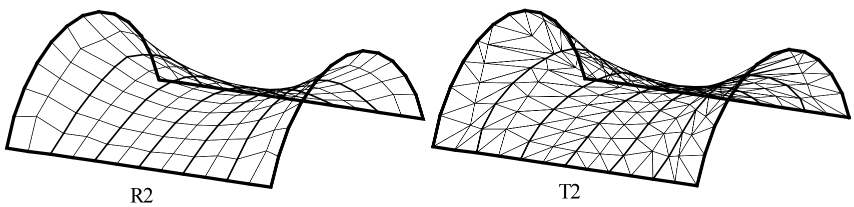
表 e. 構成された空間構造形態膜面の応力情報

	三角形要素		矩形要素	
	σ max	σ min	σ max	σ min
目的応力	3.000			
平均値	3.446	2.373	3.159	2.837
最大値	4.000	2.935	3.740	3.039
最小値	2.736	2.000	2.884	2.263
標準偏差	0.371	0.294	0.158	0.181

図5 応力指定問題の裁断図解析結果(R2,T2)　H＝3500



a. 裁断図(矩形要素)R2　　b. 裁断図(三角形要素)T2　　c. R2 と T2 による裁断図の比較



d. R2 と T2 による裁断図より構成された空間形態の比較(鳥瞰図)

e. 構成された空間構造形態膜面の応力情報

	三角形要素		矩形要素	
	σ max	σ min	σ max	σ min
目的応力	3.000			
平均値	3.491	2.530	3.380	2.648
最大値	4.000	3.833	3.993	3.465
最小値	2.350	2.000	2.320	2.003
標準偏差	0.487	0.515	0.392	0.494

図6 形状指定問題の裁断図解析結果(R2,T2)　H＝4000

4000）である。各図を説明すると、a. 矩形要素による裁断図、b. 三角形要素による裁断図及び c. 矩形要素と三角形要素による裁断図の比較。d. 各裁断図より構成された構造モデルの鳥瞰図、e. 膜面の応力情報の表 である。各問題共に主応力の分布状況を調べると応力集中を示す部位はない。図 7 に形状指定の解析結果（H=2500, 4000）に対する空間構造モデルの膜面 A-G ラインと G-H ラインの解の比較を示す。また、参考に $H = 6000\ mm$ の裁断図と鳥瞰図を図 8 に示す。

5.3 数値結果の分析と考察

本構造モデルに対する裁断図解析は、境界付近に曲率が大きく変化するポイントがあり、ライズの与え方により単純な HP 曲面を構成しているにも関わらず、数値計算上、比較的困難な問題となっている。ここでは、座標仮定有限要素技術を用い、簡易な手順により構造形態と裁断線を同時に決定することを第一に考える。

まず、制約条件の評価点を要素重心位置に設定したことを説明する。矩形要素と三角形要素を比較した場合、図 1 で示した要素分割モデルでは、評価点が三角形要素の方が倍の数になり不利に働く。しかし、要素の性質上、三角形要素が一定ひずみであり、節点で要素間に大きなギャップが生じる。特に曲率変化が大きいポイント付近では著しく、要素重心で評価するより収束値が得られにくい。この結果を受け、両要素の要素重心を制約条件の評価点とした。

要素分割 R2, T2 を標準解析用のモデルに採用した理由は、固有値解析の結果だけではなく、表 2、図 5、6 からも判るように、三角形要素の解析結果が平面上の膜帯内部点を固定しているため、ライズを高くすると要素潰れが生じて解析不可能に陥る。つまり、要素数を増やした場合、疎な要素分割よりも解が得られなくなる。

要素分割数の粗密による解への影響は、応力指定裁断図決定問題の結果、図 3, 4 に示す通りである。ここでは、構造モデルの A-G, G-H ラインの比較を示している。ライズが低い場合（H=2500）、矩形要素（R2, R3）と三角形要素（T2）はほぼ同一値を得る。しかし、ライズが高くなる（H=3500）と矩形要素（R2, R3）は同一値を示すが、三角形要素（T2）は異なる値となった（図 3 H=2500 でもこの傾向は若干現われている．なお、T3 では解析不可）。これらの結果より、三角形要素が一定ひずみであるため、要素が大きいと曲率変化が大きい部分で応力表現が厳しくなった可能性を示している。従って、測地線とは差が大きい応力表現可能な裁断線を追跡したと考えられる。

無制約条件応力指定裁断図決定問題（$t\boldsymbol{\sigma}_e = 3\ (N/mm)$）では、矩形要素分割 R2 が $H = 2500\ mm$ まで、三角形要素分割 T2 が $H = 3000\ mm$ まで収束解を得た。制約条件を指定応力値の前後（$2 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 4$）を設定した制約条件付応力指定裁断図決定問題では、逆に矩形要素分割 R2 が $H = 4000\ mm$、矩形要素分割 T2 が $H = 3500\ mm$ まで収束解を得る。しかし、制約条件を $2.5 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 3.5$ とすると三角形要素では解が得られなくなる。制約条件を厳しくしても矩形要素は対応でき、結果も図 4 に示すように一致する。

制約条件付形状指定裁断線決定問題では、応力指定と同じ

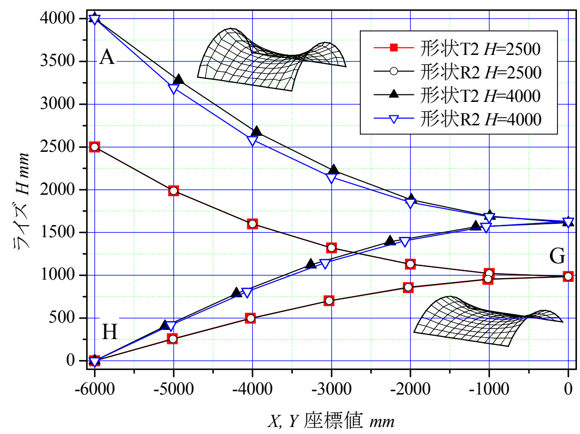


図 7　形状指定裁断図決定の各解析モデルより得られた空間構造形態の AG, HG ラインの形状比較　H= 2500

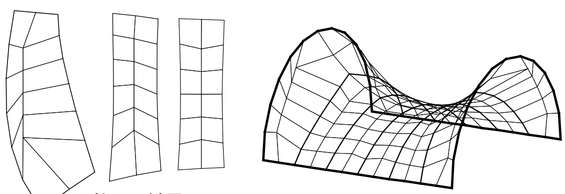


図 8　形状指定裁断図決定解析より得られた裁断図と空間膜構造形態鳥瞰図　H= 6000, R2

ように、低ライズ（H=2500）の場合、両要素分割（R2, T2）による結果は一致する。しかし、高ライズ（H=4000）の結果において、A-G ラインが指定形状であるにも関わらず、三角形分割 T2 では一致しない。

以上の結果から次のことがまとめられる。曲率が大きく変化する部位がある構造モデルを解析する場合、既往研究で多用されている三角形要素による分割モデルの利用は、十分な注意を要する。必要最小限の要素分割モデルの利用において、矩形要素による分割は三角形要素より優れている。ただし、平面上の膜面内部の点を固定せず、要素再配置を行えばその限りではないが、要素再配置は計算負荷を増大させる。なお、裁断線をスプライン曲線に置き換えることで設計変数の低減は図れるが、応力指定の CP と NP のライズ H による計算可能範囲の結果を調べると、逆にスプライン曲線の持つ特性が裁断線に影響を与える傾向を示す。また、図 8 でも判るように、得られた裁断図が初期裁断図より大きく移動する場合、要素の再分割・裁断線の追加等の検討に利用できる。

6．模型による確認試験

6.1 試験体モデル・概要

ここでは得られた裁断図より試験体を作成し、形態確認を行う。ただし、第一段階として厳密な張力制御は実施しない。従って、形態の定性的な確認を行うことを目的とする。

図1の膜構造モデルに対応させ、図9に示す1/10のスケールによる試験体境界型枠を準備する（平面図と立面図）。図1.cの周囲境界B-K-M-Iを図9の鋼材型枠に対応させ、膜材を接合させる。型枠円弧部は、着脱可能としライズH = 250, 350, 400, 450

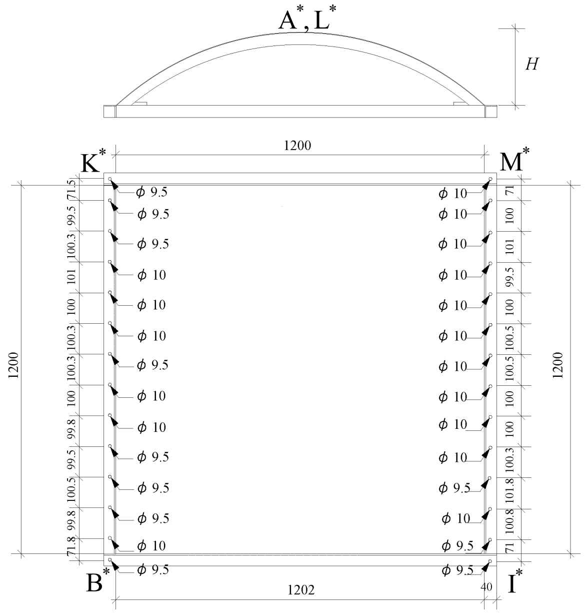
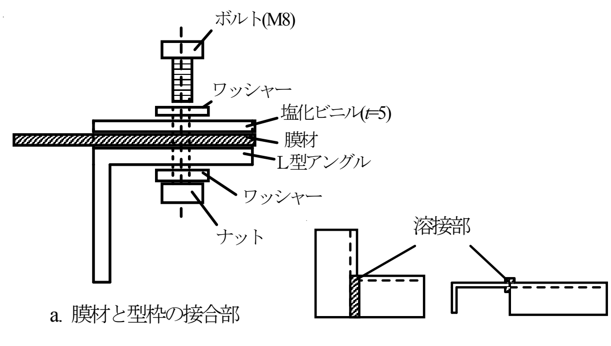


図 9　試験用境界型枠図面　unit : *mm*

表 3.　解析に用いた膜材の材料定数表

膜厚	$t = 0.8\ mm$
縦弾性係数	$tE_x = tE_y = 100.0\alpha\ N/mm$
ポアソン比	$\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.3$
せん断剛性	$tG_{xy} = 10.0\alpha\ N/mm$
単位質量	$1.215 \times 10^{-6}\ kg/mm^2$



a. 膜材と型枠の接合部

b. 膜材と型枠の接合部

図 10　膜材と型枠の接合部と型枠間の接合部

mm の4タイプの部材を準備する。膜材は帯状の炭不織布1040 *mm* 巾を使用した。計算に用いた膜材材料定数は表 3 の通りである。ただし、α は伸び率を決定するための計算パラメータとする。伸び率は裁断した膜の釣合形状における B-A-I ライン長さと平面形状における B-A-I ライン長さの割合である。伸び率が 1.8〜2.2%の範囲に入るように α の値を調節する。膜厚 t は材料強度の関係と定性的な確認のため、表 1 と同じ 0.8 *mm* を用いている。得られた裁断膜帯を縫合した膜材の周囲境界 A-B-K-L-M-I を鋼材型枠 A*-B*-K*-L*-M*-I*に接合させる。膜材の縫合手順は以下の通りである。

膜帯間の縫合手順はのりしろ部を設け、布用テープにより仮止め後、ミシンにより縫合する。中央の A-G-L ラインはミシンによる縫合が困難なため、手縫いとした。境界部の接合方法は、膜材を塩化ビニル製の板と型枠ではさみ、ワッシャーを介してナットとボルトで留める(図 10.a)。型枠(境界部)の材同士の接合方法は溶接とし、剛性が十分確保できる断面とした(図 10.b)。膜材の型枠への張り方は次の手順とする。

1) 縫合した膜の 2 点 A, L を型枠円弧部の頂点に接合する。
2) 曲率を持たない 2 辺 B-K, I-M ラインを接合する。
3) 曲率辺を円弧頂点から端部に向けて順に接合する。

また、接合の際は、緩み・弛み・重なりが生じないように全体的に張力が入るように人力で一様に引っ張った。

6.2 検証方法

縫合膜試験体の曲面形成に対する評価は次の通りである。

① 触手による検証:触手により膜面張力の確認と緩み・弛み・重なりの確認を行い、境界部における引張力の調整に用いる。

② 光による皺の発生度合 : 張力場(tension field)[10]の発生による皺波や材の緩み・弛み・重なりによる皺の確認は、暗所の試験体に光を当てることで視覚的に調べる。また触手と併用することで皺の判定が可能である。

③ 各節点における解析結果と実測値の比較:モデルの節点位置(X,Y,Z)を計測し、解析により得られた結果と比較する。鉛直方向(Z-方向)の計測は、測定点から錘のついた糸を垂直に垂らし、錘が GL に接したときの糸の長さとする。水平方向(X-,Y-方向)の計測は、G 点を基点に水平方向に、錘を利用して糸を張り、垂直に垂らした糸との交点を測る。

6.3 試験体模型による結果

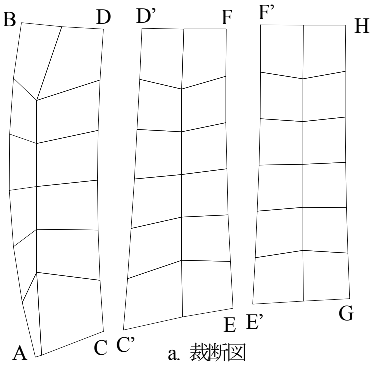
ここでは $H = 450\ mm$ のみの実験結果を示す。試験体は、MODEL-A(応力指定)と MODEL-B(形状指定)を製作した。各試験体は[定式化 1]と[定式化 2]に対応させている。なお、計測等は膜材に張力を与えて境界枠に設置した後、12 時間経過後に行う。

MODEL-A(応力指定)　目標応力 $t\sigma_{e0} = 3\ (N/mm)$ 、制約条件 $2 \le t\sigma_e \le 4$ と設定し、解析を行った。B-A-I ラインの膜伸び率は 2.08%である。図 11 に試験体で得られた結果と解析結果を比較する。 a. は解析による 1/4 の裁断図である。裁断図から膜を裁断・縫合して構造モデル全体を構成する。 b. と c. に試験体模型の写真を示す。b. は A-G-L の面の写真である。c. は鳥観写真である。計測値と解析結果の比較は、d.と e.に示す。各グラフは中央部 X 軸上の A-G-L ラインと Y 軸上の H-G-J ラインを比較している。

MODEL-B(形状指定)　目標形状は、幾何剛性項による線形解析で得られた解を採用した。ただし、指定形状の節点位置は A-G-L ラインのみである。制約条件は、MODEL-A と同様に $2 \le t\sigma_e \le 4$ と設定し、解析を行った。B-A-I ラインの膜伸び率は 1.91%である。図 12 に図 11 と対応させ、形態写真や計測値と解析結果の比較を示す。

6.4 考察

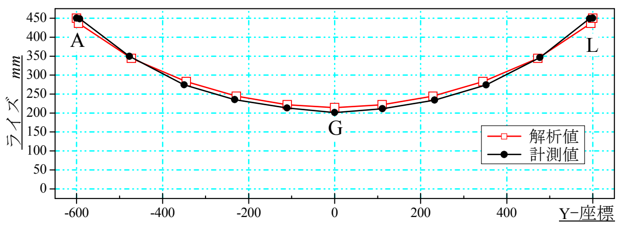
両モデル共に、① 触手による検証より、膜材を境界部に設置する際、膜面の緩み・弛み・重なりの確認と膜面の張力導入・減張力を繰り返し、滑らかな曲面の構成を行った。構成した曲面状況は、図 11, 12 の写真(b., c.)で確認される。② 光によ



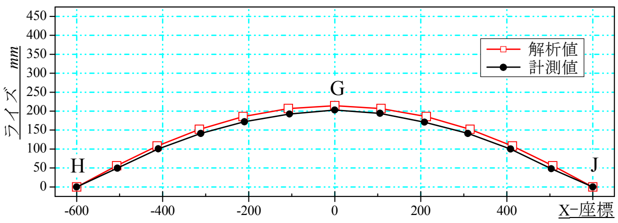
a. 裁断図

b. A-G-L 面の試験体写真

c. 試験体の鳥観写真

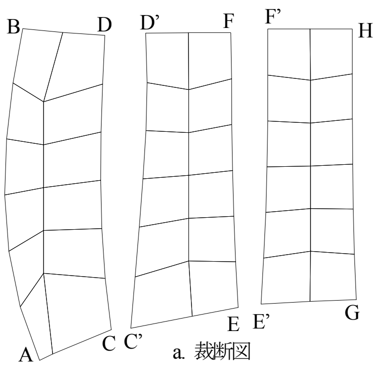


d. A-G-L ラインの座標値(解析値と計測値の比較)



e. H-G-J ラインの座標値(解析値と計測値の比較)

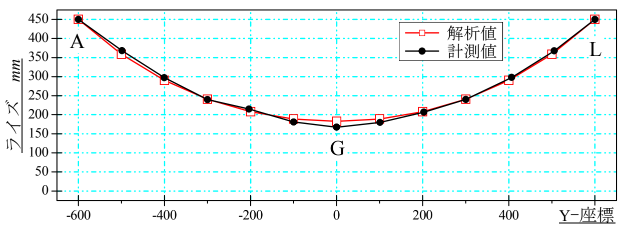
図 11 矩形要素 R2 による最適解と計測値との比較 Model-A
(H=450 [定式化 1] $t\boldsymbol{\sigma}_{e0}=3\,(N/mm)$, $2 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 4$)



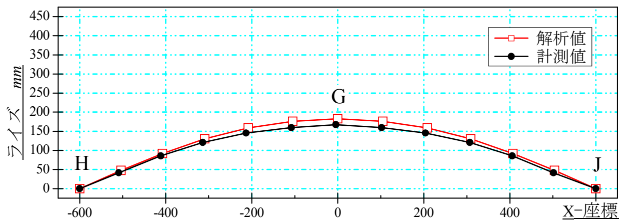
a. 裁断図

b. A-G-L 面の試験体写真

c. 試験体の鳥観写真



d. A-G-L ラインの座標値(解析値と計測値の比較)



e. H-G-J ラインの座標値(解析値と計測値の比較)

図 12 矩形要素 R2 による最適解と計測値との比較 Model-B
(H=450 [定式化 2], $2 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 4$)

る皺の発生度合に関しては、膜帯の縫合部と境界部の隅各部で若干認められた。しかし、施工上の縫合作業のずれ等や偶各部の寸法誤差による無視できる局部的な皺である。従って、張力場の発生や無視できない緩み・弛み・重なりの状態ではない(触手確認)。③ 各節点における解析結果と計測値の比較では、便宜上、伸び率 α を設定したにもかかわらず、概ね傾向・数値共に一致した。T2 を用いた応力指定や形状指定の裁断図解析の結果より作成した試験体($H = 350$)は、図 13 の写真のように滑らかな曲線を構成し、図 11, 12 と同様に、計測結果も概ね一致した。なお、全低ライズの試験結果は、矩形・三角形要素に関係なく数値解と計測値はよい一致を示している。

以上の試験体を用いた形態確認と計測結果から、矩形・三角形要素を用いた疎な要素分割による応力指定・形状指定の裁断図解析による結果の有効性を示すことができた。

7．おわりに

本論文では裁断図解析を行う際、計算負荷を低減させる要素形状や要素分割モデル等の数値計算上の技術を検討し、数値解に対する試験体を用いて定性的な形態確認を行った。本論文で示した内容を整理すると次の通りである。

① 裁断図解析に有効となる座標仮定有限要素技術を用いた要素(双一次 4 節点アイソパラメトリック要素)の離散化式を示した。

② 裁断図解析の裁断図と固有値解析を用いて、矩形要素と従来の三角形要素の数値解を比較・検討し、得られた裁断線の信頼性は矩形要素の方が高いことを確認した。

③ 裁断図解析の結果に基づく試験体より、構造モデルの曲面状況や数値解と計測値とを比較を通して、矩形・三角形要素による裁断図解析の有効性を定性的に検証した。

以上、座標仮定有限要素技術による膜構造の応力や形状指定と裁断線決定解析に関する数値解析上の知見を示した。特に、必要最小限の疎な矩形要素分割モデルの使用が初期裁断図より大きく変動するとき、要素再分割や裁断線の追加検討に利用できる優位性が認められた。

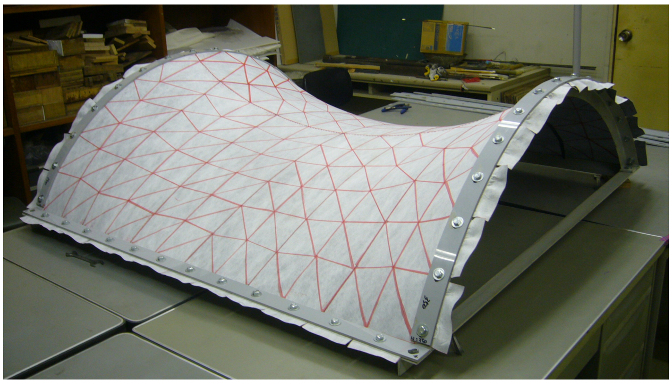


図 13 三角形要素 T2 による応力指定裁断図解析結果の試験体
($H = 350$［定式化 1］($t\boldsymbol{\sigma}_{e0} = 3\,(N/mm)$, $2 \le t\boldsymbol{\sigma}_e \le 4$)

謝辞

本実験において、中村哲也 氏(鹿児島大学大学院理工学研究科技術職員)、廣川依世 君(H21 年度卒業生)、安部友香梨 君(H22 年度 B4 学生)の協力を得た。ここに深謝いたします。

参考文献

[1] 日本建築学会編：*空間構造の数値解析ガイドライン*, 丸善, 2001

[2] 大崎純, 上谷宏二, 高谷真次：逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法, 日本建築学会構造系論文集, **395**, 107-115, 1996

[3] 大崎純, 山川誠：膜構造物の静的載荷時の剛性を考慮した初期応力・裁断膜形状最適化, 膜構造研究論文集, **11**, 31-38, 1997

[4] 八木孝憲, 萩原信幸, 大森博司, 松井徹哉：膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, **508**, 71-78, 1998

[5] 本間俊雄, 合田雄策, 安宅信行：座標値を未知量とした有限要素技術による張力構造解析の一方法, 日本建築学会構造系論文集, **602**, 161-169, 2006

[6] 本間俊雄, 森哲也, 坂中玲子:膜構造の裁断図解析と静的・動的な応力・変形解析及び発想・設計支援システムについて, 膜構造論文集, **21**, 1-13, 2007

[7] T. Honma, N. Ataka : Geometrically Nonlinear Structural Analysis by FEM Using the Coordinate Value on a Deformed Body, Information, **7**(5), 569-584, 2004

[8] 本間俊雄, 安宅信行：座標値を未知量とした有限要素法による張力構造の解析と評価, 膜構造論文集, **18**, 15-21, 2005

[9] 本間俊雄, 佐伯裕介, 坂中玲子：座標仮定有限要素法を用いた張力構造の動的解析, 膜構造研究論文集, **21**, 25-32, 日本膜構造協会, 2008

[10] 日本建築学会編:*建築構造物の設計力学と制御力学*, 応用力学シリーズ2, 丸善, 1994

CONSIDERATION CONCERNING A CUTTING PATTERN ANALYSIS
BY SHAPE- AND STRESS-PRESCRIPTION IN MEMBRANE STRUCTURE
AND ITS QUALITATIVE VERIFICATION ON A CURVED SURFACE FORM USING MINIATURE TEST SPECIMEN MODELS

Toshio Honma *1) and Masaki Fukudome *2)

SYNOPSIS

Conventional the cutting line on the cutting pattern in the membrane structure has used the geodesic line on the obtained curved surface. Recently, the study on the optimization concerning the cutting line decision of the shape- and the stress- prescription is performed. We were showing numerical results for the optimization analysis of the cutting line decision by the discretization equation formulated using the finite element technique with coordinates assumption originally. In this paper, the influence on the solution in the element shape and the element division model, etc. is examined using our technique and the verification of qualitative effectiveness on the cutting pattern is shown from the experiment results on the miniature test specimen model. Technical data in the numerical computation on the cutting pattern analysis is organized from numerical results and the measurement of these test specimens.

*1) Professor, Dept. of Architecture & Architectural Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ., Dr. Eng.

*2) Design Division, TEKKEN CORPORATION