弾性的境界を有する等張力曲面の形状解析に関する基礎的研究

大泉　修[*1]
川口　健一[*2]
新谷　眞人[*3]

梗　　概

既往の膜構造物の形状解析では、剛境界を仮定し、膜面のみの解析が行われる。よって、境界部材は剛強なものになる。一方、境界の曲げ部材と等張力膜の相互作用により釣り合う形状を求めることで、剛境界では成し得ない、軽い境界を持った新たな膜構造システムの実現が可能になると考えられる。
そこで、本研究では、膜張力により変形する境界部材として、釣り糸として用いられるテグスを用いた石鹸膜実験をおこない、境界部材と等張力膜がつくる系の形状決定原理の考察をおこなう。
また、このような系の力学性状を把握するために、2 つの方法を述べる。1つ目は、石鹸膜実験の 3 次元測定による方法で、2 つ目は、空間曲線の曲率・捩率を用いた境界形状の記述法についてである。

1.　はじめに

釣り糸として用いられるテグスで円形のリングを作り、石鹸水に通すと、テグスの太さやリングの径に応じて様々な形状の石鹸膜が張られる。(図 1)

石鹸膜が作る等張力曲面が、表面積を最小にする停留問題に帰着されることは良く知られており、多くの研究がある。しかし、本実験で見られるテグスのリングを境界とする石鹸膜の形状決定問題は、膜の表面積に加え、テグスの形状に関する何らかの汎関数を同時に停留させる問題であろうと予測される。

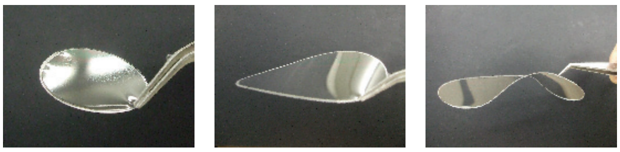


図 1　テグスに張られた石鹸膜

リングの変形は石鹸膜がなくなれば元の形状に戻るので、弾性棒の大変形であると考えられる。弾性棒の大変形挙動のみを扱った研究はエラスチカの問題として数多くなされているが、この実験の例のようにリングの大変形挙動と等張力膜とが複合した問題を扱った研究は見当たらない。

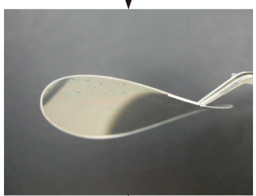
本稿では、テグスと石鹸膜が作る様々な曲面形状の決定の原理を石鹸膜実験と数値解析により考察する。

2.　テグスを用いた石鹸膜実験

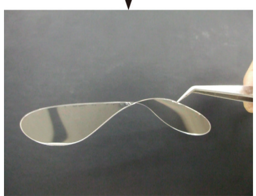
2.1 実験概要

実験はテグスを用いてリングを作り、そこに石鹸膜を張ることで行う。テグスの太さとリングの周長をパラメータとし、リングの剛性を様々に変化させ、実験を行った。図 2 に実験結果を示す。図中、下に行くにつれてリングの曲げ剛性が小さくなるように並べてある。モデル○－□は○がテグスの号(太さ)、□がリング周長を表している。

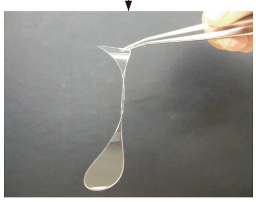
モデル 8_250(太さ 0.470mm)
リングはほぼ平面を保ったまま円形を保ったままである。膜面も平面に張られている。



モデル 4_250(太さ 0.330mm)
面外に変形し,膜面は鞍型になっている。膜張力によりリングに圧縮力が入ることによるリングの面外座屈が起きている。



モデル 4_300(太さ 0.330mm)
リングが座屈することにより釣り合い状態が変化したため、更に変形が進んだものであると考えられる。



モデル 2_300(太さ 0.235mm)
石鹸水から引き上げると同時にテグス同士が捩れながらくっついていく様子が観測できた。

図 2　実験結果

*1　早稲田大学大学院　創造理工学研究科、大学院生
*2　東京大学　生産技術研究所、教授
*3　早稲田大学　理工学術院、特任教授

一般的にリングの剛性が大きいと膜表面積が大きく、平面的な円に近い形状となり、リングの剛性が小さくなるに従って、当初平面状の円形であったリングが面外に座屈して 3 次元的な形状へと移行する。さらにリングの剛性を下げると、リングは 2〜3 度捩った形状を示す。

2.2 エネルギー汎関数の推測

石鹸膜の形状は等張力曲面となることから、その表面積は曲面形状の、さらにはリング形状の汎関数となる。次に、石鹸膜の形状はリングの剛性と大きく関係し、またリングは弾性的な挙動を示すことから、リング挙動を支配する要因として弾性の歪エネルギーを採用する。また、図 3,4 に示すように、持ち手を上下反転させても同じ形状になり、膜を張ると、鉛直下向きに大きく垂れ下がることから、重力の影響も無視できないと考えられる。

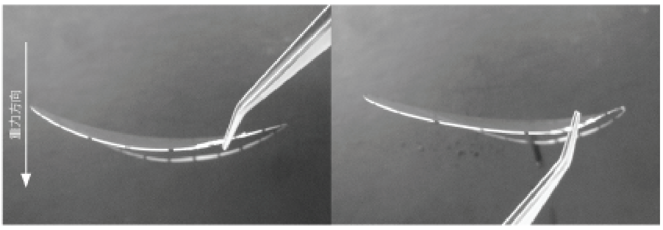


図 3 重力と形状の関係

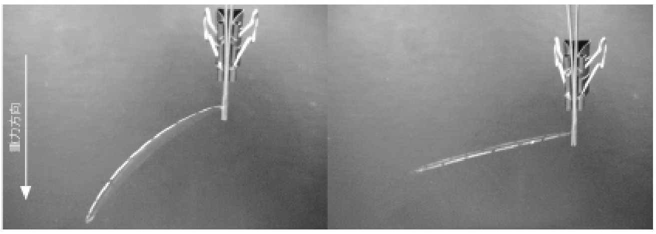


図 4 重力による影響（左：膜あり 右：膜なし）

そこで、石鹸膜の表面積極小化、リングの弾性歪エネルギー、重力による影響を考慮し、汎関数を次式のように推定する。

$$\Pi = S + \lambda_1 U + \lambda_2 U_e \tag{1}$$

ここで、S は膜表面積、U はリングの歪エネルギー、U_e は重力によるポテンシャルエネルギーである。λ は、リングの剛性や重力場と膜張力との比で決まる係数である。

また、図 5 に示すように、膜表面積とリングの変形度合いは、トレードオフの関係にあることが観察される。

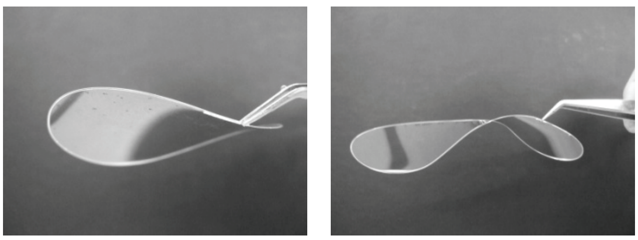


図 5 膜表面積とリングの変形度合いの関係

以降、等張力膜と境界リングがつくる系の力学的性状の考察をおこなう。

3. 石鹸膜実験の 3 次元形状測定による考察

3.1 石鹸膜実験の 3 次元形状測定

上述の石鹸膜実験の 3 次元形状測定をおこなうことで、テグスと石鹸膜がつくる系の考察をおこなう。形状測定は、テグスに等間隔に印を付け、直交する 3 方向から写真をとり、印の座標をプロットすることでおこなった。

図 6 は、代表的な形状として鞍型のモデル 4_250（図 6 上）と、1 回捩じられた形状を持つモデル 4_300（図 6 下）について、写真から形状測定を行ってリング形状の座標データを測定し、3 次元の 3 次スプライン補間によりスムージングしたものである。

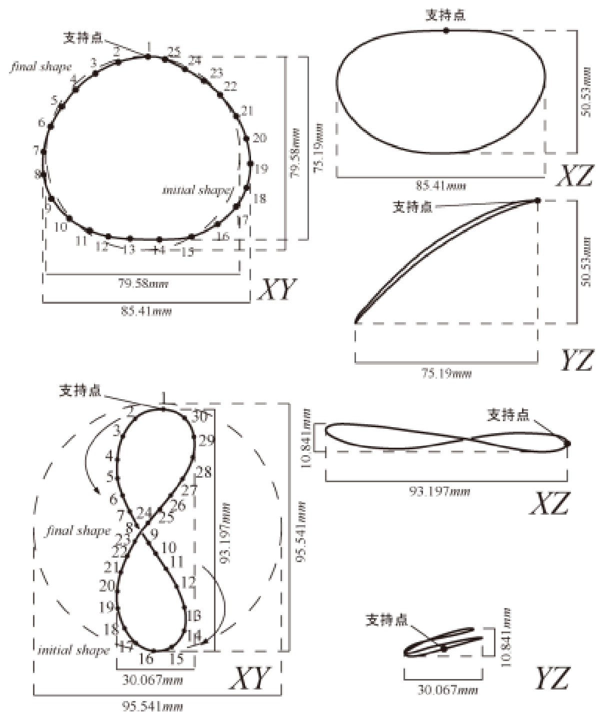


図 6 3 次元測定結果（上：4_250 下：4_300）

3.2 等張力曲面の形状解析

石鹸膜実験の 3 次元測定により得られたテグスの節点座標を用いて、最急降下法による極小曲面解析を行い、実験モデルの膜表面積を算出する。

膜の各節点座標から膜面積を算出し、各節点に関する膜表面積の勾配を求めることで、最急降下ベクトル $\boldsymbol{d}$ を得る。

$$\boldsymbol{d} = -\nabla_x \cdot S(\boldsymbol{x}) = -\left\{ \frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial y_N} \quad \frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial z_N} \right\}^T \tag{2}$$

（$\boldsymbol{x}$：変数ベクトル　S：膜表面積）

上式を用いて、次式の漸化式により、$\boldsymbol{x}$ を更新する。

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i \tag{3}$$

以上を繰り返し、最急降下ベクトルのノルムが設定した値より小さくなったら計算を終了する。

表 1 は、初期形状と最終形状の膜表面積から、膜表面積の減少率を各モデルについて算出したものである。

表 1　膜表面積の減少率

モデル	正円時の膜表面積 (mm^2)	最終形状の膜表面積 (mm^2)	膜表面積の減少率 (%)
4_250(鞍型)	4976	4914	**1.3**
4_300(捩れ)	7169	2937	**59.0**

また、図 7 に最終形状を示す。

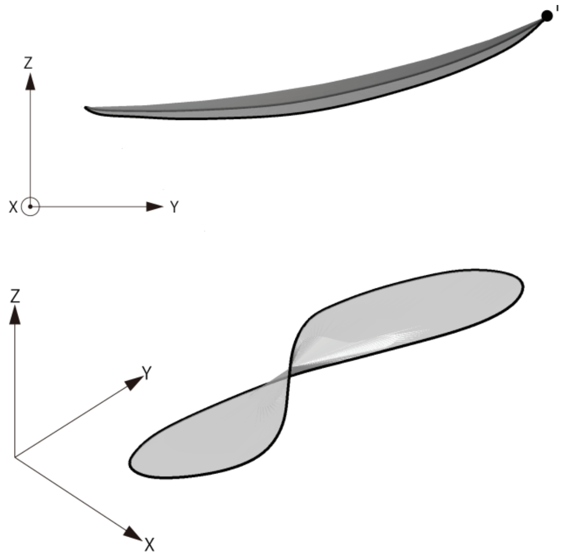


図 7　最終形状(上:4_250　下:4_300)

3.3 境界リングの力学的考察

棒の軸線に沿って埋め込み座標系を定義することで捩れも考慮した棒の形状を記述する。弾性棒の形状は弧長パラメータ s により棒の軸線上の任意の点の位置ベクトルを、

$$\boldsymbol{r}(s) = [x(s), y(s), z(s), \theta(s)]^T \qquad (4)$$

とし、軸線上の点と、軸線に直交する断面内の捩れ角を含む 4 つの座標で表す。

これらの座標値から棒の接線方向ベクトル $\boldsymbol{d}_1$、法線方向ベクトル $\boldsymbol{d}_2$、$\boldsymbol{d}_3$ を求める。これら 3 つのベクトルは直交しているので、

$$\frac{\partial \boldsymbol{d}_i}{\partial s} = \bar{\boldsymbol{\kappa}}(s) \times \boldsymbol{d}_i(s) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (5)$$

が得られる。ここで、

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \bar{\kappa}_1 \boldsymbol{d}_1 + \bar{\kappa}_2 \boldsymbol{d}_2 + \bar{\kappa}_3 \boldsymbol{d}_3 \qquad (6)$$

は曲率ベクトルと呼ばれ、

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{d}_2}{\partial s} \cdot \boldsymbol{d}_3,\ \bar{\kappa}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{d}_3}{\partial s} \cdot \boldsymbol{d}_1,\ \bar{\kappa}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{d}_1}{\partial s} \cdot \boldsymbol{d}_2 \qquad (7)$$

以上の 3 つの曲率成分 κ_1、κ_2、κ_3 から歪みエネルギーを算出すると以下のようになる。

$$U = \int_0^s \left(\frac{GJ(\bar{\kappa}_1 - \bar{\kappa}_1^0)^2}{2} + \frac{EI(\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_2^0)^2}{2} + \frac{EI(\bar{\kappa}_3 - \bar{\kappa}_3^0)^2}{2} \right) ds \qquad (8)$$

E, G: 縦弾性係数,せん断弾性係数　I: 断面二次モーメント

J: サンブナンねじり定数　$\bar{\kappa}_i^{\,0}$: 初期状態における各曲率成分

テグスの歪みエネルギーを求めるためには、節点座標と捩れ角が必要となるが、石鹸膜実験の 3 次元測定では、テグスの捩れ角は観測できない。そこで、捩れ角 θ に関するエネルギーの勾配を用いた最急降下法により、捩れの曲率成分 κ_1 の分布と歪エネルギーの変化を推定する。

表 2　歪みエネルギーの増加率

モデル	正円時の歪みエネルギー(N・cm)	最終形状の歪みエネルギー(N・cm)	歪みエネルギーの増加率(%)
4_250	4.40×10^{-4}	5.06×10^{-4}	**15**
4_300	3.67×10^{-4}	1.14×10^{-3}	**210**

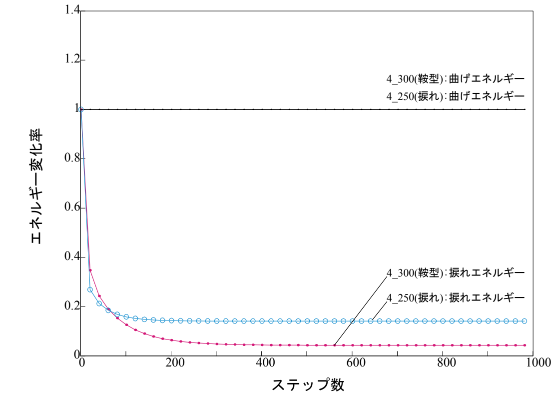


図 8　捩れエネルギーの収束状況

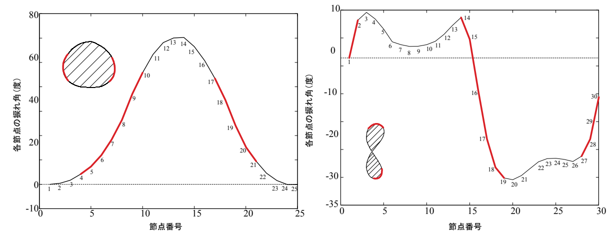


図 9　収束状態における捩れ角の分布

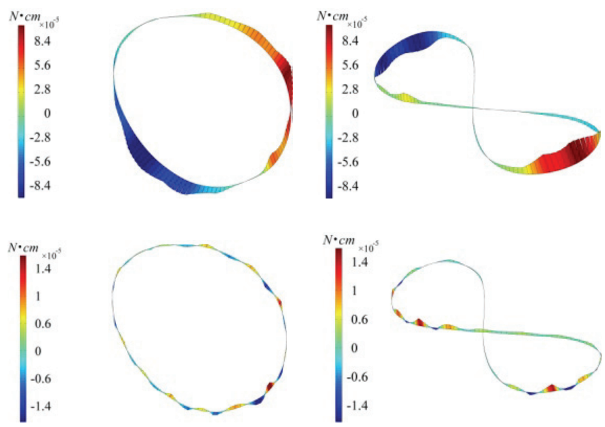


図 10　捩れモーメントの収束状況(上:初期時　下:収束時)

図 8 にあるように、捩れエネルギーが収束していることがわかる。このように、捩れ角を更新することで、捩れモーメントが極小になるようなリングの断面の向きが求められ、この向きが実際の棒の状態を表している。

4. 曲率･捩率による境界形状の記述法に関する考察

4.1 動標構とフルネ・セレの公式

ある空間曲線C上の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$(s)に対して以下のようにして構成されたベクトルの組

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{r}'(s)/|\boldsymbol{r}'(s)| \tag{9.a}$$

$$\boldsymbol{e}_2(s) = \boldsymbol{r}''(s)/|\boldsymbol{r}''(s)| \tag{9.b}$$

$$\boldsymbol{e}_3(s) = \boldsymbol{e}_1(s)\times\boldsymbol{e}_2(s) \tag{9.c}$$

のことを、曲線Cの動標構（Moving frame）と呼ぶ。記号「’」は曲線のパラメータsに対する微分を表す。

上式の各ベクトルは互いに直交しており、$\boldsymbol{e}_1$は接単位ベクトル、$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$はそれぞれ、主法線ベクトル・従法線ベクトルと呼ばれる。

また、sが弧長パラメータに選ばれるとき、Cの1階微分の大きさが常に1となり、次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{r}'(s) \tag{9.d}$$

曲線Cが r’’(s)≠0 であるとき、その曲線の動標構に対して以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{d}{ds}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{Bmatrix} \tag{10}$$

この関係式をフルネ･セレの公式と呼ぶ。ここで、κは曲線Cの曲率、τは捩率を表している。本章では、上式の初期値問題を解くことで曲線を求め、その特徴について考察を行なう。以下に、動標構の模式図を示す（図11）。

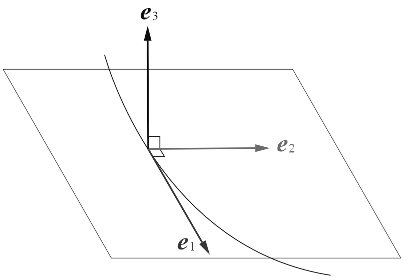


図11 動標構の概念図

4.2 初期値問題の解

4.2.1 フルネ・セレの公式の拡張による解

式(9.d)と(10)をあわせ、次式のように微分の階数を見かけ上1階の微分方程式に置き直す。

$$\frac{d}{ds}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa & 0\\ 0 & -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{Bmatrix} \tag{11}$$

ここで、

$$\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3\}^T \tag{12.a}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa & 0\\ 0 & -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & 0 & -\tau & 0\end{bmatrix} \tag{12.b}$$

とおけば、式(11)およびその解は次式のように表わされる。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \therefore \boldsymbol{x}(s) = \exp\left(\int_0^s \boldsymbol{A}ds\right)\boldsymbol{C} \tag{13}$$

ここで、未定係数ベクトルは、パラメータ s の初期値における状態量から求められる。

$$\boldsymbol{C} = \exp\left(\int_0^0 \boldsymbol{A}ds\right)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{x}(0) \tag{14}$$

次に、式(13)の積分を以下のようにおく。

$$\int \boldsymbol{A}ds = \begin{bmatrix}0 & s & 0 & 0\\ 0 & 0 & K & 0\\ 0 & -K & 0 & T\\ 0 & 0 & -T & 0\end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \tag{15}$$

ここで、K, Tは次式である。

$$K = \int \kappa ds, \quad T = \int \tau ds$$

行列 exp($\boldsymbol{B}$)は、初期値から任意のsにおける状態量への変換を求める遷移行列である。

行列 $\boldsymbol{A}$ が弧長パラメータ s の関数でない場合には、$\boldsymbol{A}$ と exp($\boldsymbol{B}$)は積の順序を入れ替えることができるので、形式的に以下のようなテイラー展開で表すことができる。

$$\exp(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3 + \cdots \tag{16}$$

行列$\boldsymbol{B}$のべき乗行列$\boldsymbol{B}^n$を求め、三角関数や指数関数のテイラー展開公式を用いると、exp($\boldsymbol{B}$)の成分として最終的に次式が得られる。

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{s}{D}\sin D - \frac{sT^2(\sin D + D)}{D^3} & \frac{-sK(\cos D - 1)}{D^2} & \frac{-sKT(\sin D + D)}{D^3}\\ 0 & 1 + \frac{K^2(\cos D - 1)}{D^2} & \frac{K\sin D}{D} & \frac{-KT(\cos D - 1)}{D^2}\\ 0 & -\frac{K\sin D}{D} & \cos D & \frac{T\sin D}{D}\\ 0 & \frac{-KT(\cos D - 1)}{D^2} & -\frac{T\sin D}{D} & 1 + \frac{T^2(\cos D - 1)}{D^2}\end{bmatrix} \tag{17}$$

ただし、上式におけるDは、

$$D = \sqrt{K^2 + T^2} \tag{18}$$

ここで、弧長sの範囲を0 ～ 2πとし、曲線が始点と終点で閉じるような（リング状に繋がる）条件を考える。

$s = 0$においては、$\boldsymbol{B}$はゼロ行列であるから、式(16)を見ると遷移行列 exp($\boldsymbol{B}$)は単位行列である。

また、$s = 2\pi$では、

$$K = 2\pi\kappa,\, T = 2\pi\tau,\, D = 2\pi\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tag{19}$$

であり、これを式(17)に代入したとき、遷移行列が単位行列にな

れば曲線は閉じることになる。

まず、3 行 3 列成分を見ると、この成分は 1 にならなければならないから、

$$D = 2n\pi, \quad n = 1,2,3\cdots \tag{20}$$

このとき同時に、

$$\cos D = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin D = 0 \tag{21}$$

となるので、残る制約は 1 行 2 列と 1 行 4 列成分となり、その条件式は以下となる。

$$\frac{sT^2}{D^2} = 0, \quad \frac{sKT}{D^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; T = 0 \tag{22}$$

したがって、曲率および捩率が一定の場合において閉じた空間曲線を描くためには、捩率がゼロ、かつ曲率が正の整数である必要がある。この場合には平面の円のみがこれに該当する。

図 12 に曲率や捩率を色々に変えて得られた空間曲線の例を示す。本手法では、曲率・捩率が一定のもののみ解が得られるため、形状は、円・直線・常螺旋に限られる。

しかし、直線の場合は主法線・従法線ベクトルが定まらないため、後の歪みエネルギーの計算の際には例外となる。

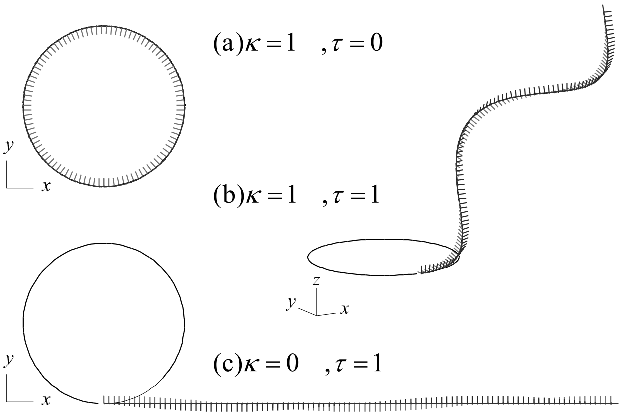


図 12 (a)正円 (b) 常螺旋 (c) 直線

4.2.2 フルネ・セレの公式による解

次に、曲率と捩率に変動が与えられる場合について考察をおこなう。

式(10)の関係式を 1 階の微分方程式として解くことを考える。今回の場合、行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}} \cdot f(s) \tag{23}$$

のかたちになっていれば、exp($\boldsymbol{B}$)を形式的にテイラー展開で表わすことができる。よって、前項と同様な方法で exp($\boldsymbol{B}$)の成分を求めると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{K^2(\cos D-1)}{D^2} & \frac{K\sin D}{D} & \frac{-KT(\cos D-1)}{D^2} \\ -\frac{K\sin D}{D} & \cos D & \frac{T\sin D}{D} \\ \frac{-KT(\cos D-1)}{D^2} & -\frac{T\sin D}{D} & 1+\frac{T^2(\cos D-1)}{D^2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

ここで、前項と同様に、曲線が閉じる条件を考える。行列 $\boldsymbol{A}$ は、式(23)のような制約があるため、曲率・捩率を以下のようにフーリエ級数で定義する。

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin\omega_n s + b_n \cos\omega_n s) \\ \tau(s) &= c \cdot \kappa(s) \qquad (c : \text{const.}) \end{aligned} \tag{25}$$

ここで、空間曲線の曲率の定義より、

$$\kappa(s) \geq 0 \tag{26}$$

となるので、平均捩率は 0 にならない。

ここで、閉じた空間曲線を描くためには、平均捩率が 0 である必要があるので、本手法によって閉じた空間曲線を記述することはできないことがわかる。

一方、平面曲線の場合、捩率は 0 であるため、式(24)は以下のように整理される。

$$\begin{bmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

まず、始点(s=0)と終点(s=2π)の動標構の向きが一致する条件は、終点での遷移行列が単位行列になればよいので、

$$\cos K = 1 \;\Leftrightarrow\; K = 2n\pi \;\; (n = 1,2,3,\cdots) \tag{28}$$

となる。よって、式(28)より、平均曲率を正の整数かつ、曲率の変動成分の積分が 0 になるように設定すれば、曲率の積分値は、

$$K = 2\pi \cdot \kappa_0 \tag{29}$$

となり、条件を満たす。

次に、始点(s=0)と終点(s=2π)の位置ベクトルが一致する条件について考える。始点の位置ベクトルと動標構の初期値を、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(0) &= (0 \quad 0 \quad 0) \\ \boldsymbol{e}_1(0) &= (1 \quad 0 \quad 0) \\ \boldsymbol{e}_2(0) &= (0 \quad 1 \quad 0) \\ \boldsymbol{e}_3(0) &= (0 \quad 0 \quad 1) \end{aligned} \tag{30}$$

と設定すると、終点(s=2π)の位置ベクトルは、

$$\boldsymbol{r}(s = 2\pi) = \left(\int_0^{s=2\pi} \cos K ds \quad \int_0^{s=2\pi} \sin K ds \quad 0 \right) \tag{31}$$

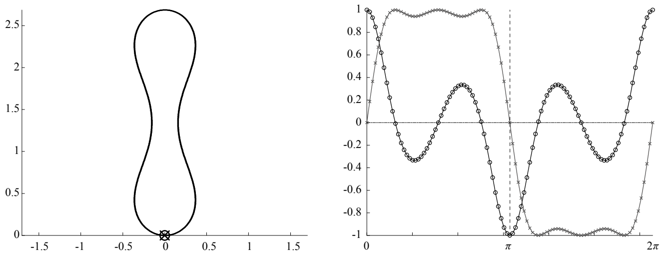
となる。よって、始点と終点の位置ベクトルが一致する条件は、

$$\int_0^{s=2\pi} \cos K ds = 0 \quad , \quad \int_0^{s=2\pi} \sin K ds = 0 \tag{32}$$

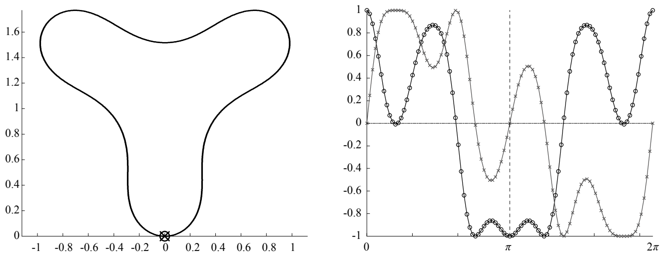
となる。今回、曲線の位置ベクトルについては、解析的に積分計算をすることはできないので、数値積分により算出している。よって、曲率の積分値が周期性を有するように曲率を定義すれば、始点と終点の位置ベクトルは一致する。

以上より、平均曲率が正の整数かつ、曲率の変動成分の積分値が 0 かつ、曲率の積分値が周期性を有するように曲率を定義すれば、曲線は閉じる。

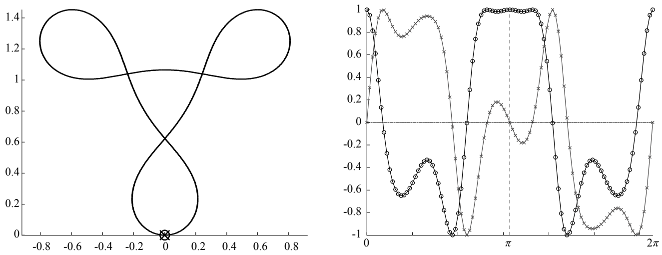
以下の図 13 に、本手法によって得られる閉じた曲線形状と遷移行列の変化を示す。



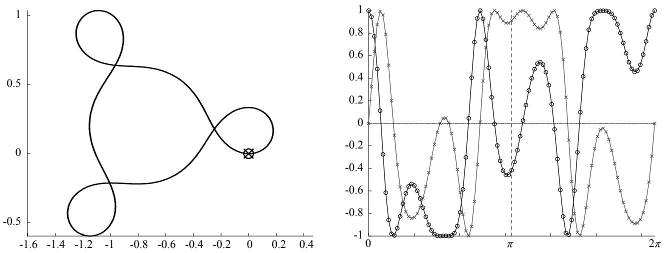
(1)　$\kappa = 1 + \cos 2\omega_0 s$



(2)　$\kappa = 1 + \cos 3\omega_0 s$



(3)　$\kappa = 2 + \cos 3\omega_0 s$



(4)　$\kappa = 2 + \cos 3\omega_0 s + \sin 3\omega_0 s$

図 13　左：平面曲線　右：遷移行列

このように、曲率をフーリエ級数で定義することで、容易に閉じた平面曲線を記述することができる。

4.3　弾性棒の歪みエネルギーと空間曲線の動標構の関係

4.3.1　部材座標系の定義

ここでは、曲率・捩率によって与えられた空間曲線に対し、断面形状の情報を付加するため、部材座標系を導入する。部材座標系は、棒の接線方向ベクトルと、2 つの主軸方向ベクトルからなる。主法線ベクトル・従法線ベクトルから θ 傾いた向きに主軸方向をとると、座標変換行列により、部材座標系は次のように定義される。

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{d}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{33}$$

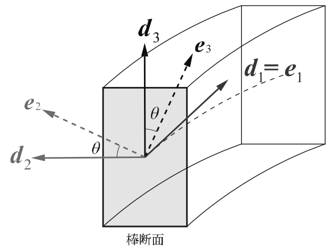


図 14 部材座標系の定義

以上のように、部材座標系を定義することで、歪みエネルギーの定式化が前章と同様な方法でおこなえる。

4.3.2　歪みエネルギーの停留問題

棒の釣り合い形状を求めるために、部材座標軸の動標構に対する回転角 θ に関する歪みエネルギーの停留問題を解く。回転角 θ に関する各曲率の 2 乗値の変分は、

$$\frac{\partial \bar{\kappa}_i^{\,2}}{\partial \theta} = 2\bar{\kappa}_i \frac{\partial \bar{\kappa}_i}{\partial \theta} \quad (i = 1,2,3) \tag{34}$$

となる。

ここで、曲線の動標構を用いて変分を表すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\kappa}_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\{(\cos\theta\,\boldsymbol{e}'_2 + \sin\theta\,\boldsymbol{e}'_3)\cdot(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_3)\} \\ \frac{\partial \bar{\kappa}_2}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\{(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}'_2 + \cos\theta\boldsymbol{e}'_3)\cdot\boldsymbol{e}_1\} \\ \frac{\partial \bar{\kappa}_3}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\{\boldsymbol{e}'_1\cdot(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_2 + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_3)\} \end{aligned} \tag{35}$$

となり、動標構の直交性とフルネ・セレの公式より、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i = |\boldsymbol{e}_i| = 1 \quad (i = 1,2,3) \\ &\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 = 0 \\ &\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_1 = 0,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_2 = -\kappa,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_3 = 0 \\ &\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_1 = \kappa,\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_2 = -\tau,\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_3 = -\tau \\ &\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_1 = 0,\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_2 = 0,\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_3 = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\kappa}_1^{\,2}}{\partial \theta} &= \tau^2 \sin\theta(\sin\theta - \cos\theta)(\sin 2\theta - \cos 2\theta) \\ \frac{\partial \bar{\kappa}_2^{\,2}}{\partial \theta} &= \kappa^2 \sin\theta\cos\theta \\ \frac{\partial \bar{\kappa}_3^{\,2}}{\partial \theta} &= -\kappa^2 \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{37}$$

となる。

以上より、歪みエネルギーの第 1 変分は、以下のように表わされる。

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sin\theta(\sin\theta - \cos\theta)(\sin 2\theta - \cos 2\theta)\frac{GJ}{2}\int \tau^2 ds$$
$$+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{EI_1}{2} - \frac{EI_2}{2}\right)\int \kappa^2 ds \tag{38}$$

よって、エネルギー停留原理より、停留値は、

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0,\ \frac{\pi}{2} \tag{39}$$

となる。停留状態での歪みエネルギーを計算すると、

$$U\Big|_{\theta=0} = \int\left(\frac{GJ(-\tau)^2}{2} + \frac{EI_1 \cdot 0^2}{2} + \frac{EI_2\kappa^2}{2}\right)ds$$

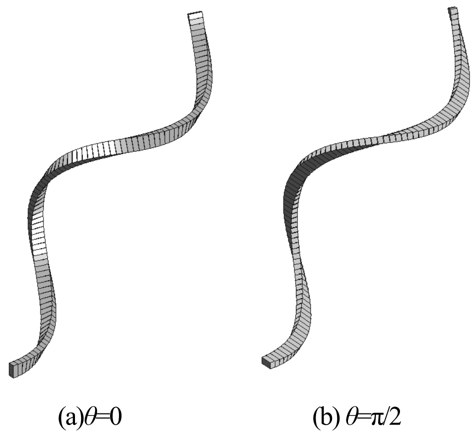
$$U\Big|_{\theta=\pi/2} = \int\left(\frac{GJ\tau^2}{2} + \frac{EI_1 \cdot \kappa^2}{2} + \frac{EI_2 0^2}{2}\right)ds \tag{40}$$

図 14 のように、$\boldsymbol{d_2}$ を強軸、$\boldsymbol{d_3}$ を弱軸に定義すると、

$$I_1 \geq I_2 \ \therefore U\Big|_{\theta=\pi/2} \geq U\Big|_{\theta=0} \tag{41}$$

となる。この事から、ある断面形状を持った棒が空間曲線に沿って配置されるとき、そのエネルギーが停留している事とは、棒の主軸が動標構の主法線方向・従法線方向と一致している事と同義となることがわかる。更に、その 2 つの停留状態は、式(41)より、棒の強軸が動標構の主法線方向と一致している時の方がエネルギーが低い状態にあることがわかる。このとき、部材座標系に対する曲率成分は、振れの成分が空間曲線の捩率と一致しており、曲げの成分は弱軸に関する曲率成分が、空間曲線の曲率と一致し、強軸に関する曲率成分が 0 になっていることになる。

しかし、前述の曲線の例の内、直線に関しては、r''(s)=0 となり、動標構が定まらないので例外となる。



(a)θ=0　　　(b) θ=π/2

図 15 矩形断面棒（b=1,h=2）の 2 つの停留状態

5. まとめ

本論文は、等張力膜と境界の曲げ部材の相互作用によって釣り合う系の力学性状の考察をおこなうことを目的とした。

そこで、テグスを用いた石鹸膜実験をおこなうことで、石鹸膜とテグスがつくる系の力学性状や、形状決定の原理を定性的に把握した。実験から、膜張力とテグスリング剛性の比率の違いによって、膜表面積とリングの変形度合いに差異が生じることがわかり、そのことから、エネルギー汎関数の推測をおこなった。

次に、石鹸膜実験から得られた知見をもとに、解析によって、石鹸膜とテグスがつくる系の力学性状の考察をおこなった。

1 つ目は、石鹸膜実験の 3 次元測定による考察である。3 次元測定により、境界形状を得ることで、代表的な 2 つの形状に対して膜表面積の減少率を算出した。

また、境界形状に関して、部材の振れ度合いは測定できないため、部材の振れ角に関する最急降下法により、部材の振れ角を算出した。最終的に得られた部材の向きが実際のテグスの形状を表しており、その時の歪みエネルギーを求めることで、歪みエネルギーの増加率を算出した。

以上の解析から、石鹸膜とテグスがつくる系の力学性状・形状決定原理の一部を定量的に示すことができたと考える。

2 つ目は、境界形状を空間曲線の曲率・捩率を用いて記述する方法についての考察である。フルネ・セレの公式を初期値問題として直接積分し、空間曲線と曲率・捩率の関係について基礎的な考察を行なった。本手法では、行列の可換性の問題から、記述できる曲線が限られているが、曲率をフーリエ級数で定義することで、閉じた平面曲線を容易に記述できることがわかった。

また、空間曲線になんらかの断面形状をもった弾性棒が配置される場合の部材座標系の定義をおこなった。このとき、弾性棒のエネルギー状態が最も小さい状態とは、部材の強軸が空間曲線の主法線ベクトルと一致する場合であることを確認した。

6. 今後の課題

任意の形状を表すことができる空間曲線の記述法について考察することがまず挙げられる。その際に、膜表面積の計算と境界の歪みエネルギーの計算を簡便にできるような関数で表わす必要がある。

また、本論文の知見から、動標構を定義することで、歪みエネルギーの停留問題が簡略化されることがわかったので、動標構から、如何に閉じた空間曲線の解を求めるかということが重要な要素である。

そして、膜と境界リングの連成解析をおこない、膜張力と境界リングの剛性の比の違いにより、様々な釣り合い形状が得られることを定量的に示すこと、更には、構造システムの実現の可能性の検討が今後の課題である。

参考文献

1) 大泉修、芋野匡俊、永井拓生、川口健一、新谷眞人：弾性的境界を有する等張力曲面の形状に関する実験と基礎的研究、日本建築学会大会学術講演梗概集（北陸）、B-1、構造□、pp.837-838、2010.9

2) 大泉修、川口健一、新谷眞人：空間曲線の曲率・捩率と弾性棒の歪みエネルギーに関する基礎的研究、コロキウム 構造形態の解析と創生 2010、pp.13-16、2010.10

3) 石原競、八木孝憲、萩原伸幸、大森博司：極小曲面解析による膜構造の形状解析、日本建築学会構造系論文集第 469 号、pp.61-70、1995.3

4) 柯宛伶、川口健一：最急降下法による付帯条件付き極小曲面形状決定法、日本建築学会大会学術講演論文集、pp.701-702、2006.9

5) J.Spillmann, M.Teschner : Cosserat Rod Elements for the Dynamic Simulation of one-dimensional Elastic Object, URL:animationphysics.wordpress

6) Robert S. Manning, John H. Maddocks, Jason D. Kahn : A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure, American Institute of Physics, J. Chem. Phys. 105 (13), 1 October 1996

7) Miklo's Bergou, Max Wardetzky, Stephen Robinson, Basile Audoly, EitanGrinspun : Discret Elastic Rods, ACM Transactions on Graphics, Vol. 27, No. 3, Article 63, August 2008

8) 井上治郎、原田利宣：多項式による空間曲線の近似手法とそれを用いた性質分析、社団法人情報処理学会研究報告、2007-CG-129

9) 小野進：ワイヤロープの微分幾何学的考察、日本応用数理学会論文誌、Vol.3、N0.4、pp387-424、1993

10) 中内伸光：じっくり学ぶ曲線と曲面－微分幾何学初歩－、共立出版株式会社、2005.9

11) 小沢哲也：曲線 －幾何学の小径－、株式会社培風館、2005.9

12) 田澤義彦 著：曲線論・曲面論 －Mathematica で探索する古典微分幾何学－、株式会社ピアソン・エデュケーション、1999.8

Fundamental Study for Form-Finding Analyses of Equally Stressed Surfaces with Elastic Bounadries

Shu Ohizumi *1)
Ken'ichi Kawaguchi *2)
Masato Araya *3)

SYNOPSIS

Form-Finding Analyses of membrane structure in the history, they performed only for the surface, because of assuming a rigid boundary. Therefore, the member of boundaries will be bigger. On the other hand, assuming the interaction of membrane and bending member , it is believed to be possible to implement a new membrane system with a light boundary.

In this study, first, performing soap film experiments with fishing gut, we consider principles of shape decision. Second, by using 3-D shape measurement of soap film experiments, we consider mechanical properties of system in soap-film and fishing gut. Third, we consider descriptive method of boundary shape by Frenet-Seret formulation.

*1) Graduate Student, Department of Architecture, Faculty of Science and Engineering, Waseda University
*2) Professor, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo
*3) Professor, Department of Architecture, Faculty of Science and Engineering, Waseda University