張力構造の形態解析と汎関数に関する基礎的考察

三木　優彰*[1]
川口　健一*[2]

梗　　概

張力構造の形状決定は、初期張力の導入により自己釣り合いの状態を実現することが可能な、適切な形状を求めるものである。数値解析による張力構造の形状決定は多くの場合、自己釣り合いの状態における力の釣り合いや、汎関数の停留条件を定式化し、これを解くものである。

本報告は張力構造の形状決定に対し、汎関数の自由な設定という視点を提案する。この一般化は既往の形状決定手法である応力密度法や極小曲面問題における定式化を一般化したものでもある。異なる汎関数は異なる形状決定問題の解を与えるが、いずれも自己釣り合い条件を満たす。さらに、テンセグリティに代表される圧縮部材を含んだ張力構造の形状決定に利用可能な汎関数を新規に導入する。

本報告の前半では汎関数の自由な設定というコンセプトが示される。後半では幾つかの解析結果が図示され、考察される。

1　はじめに

ケーブルネット構造、張力膜構造、テンセグリティ構造などの張力構造は初期張力(プレストレス)の導入により剛性が付与され安定化される。したがって、初期張力の導入が可能な適切な初期形状を与える必要があり、これは一般に形状決定問題として知られている。張力構造の形状決定問題には種々の方法が既に提案されているが、本報告では、汎関数の設定に自由度があり、これを適切に選択する事で、解を安定的に得ることができる場合があることについて具体的な例題と共に示す。

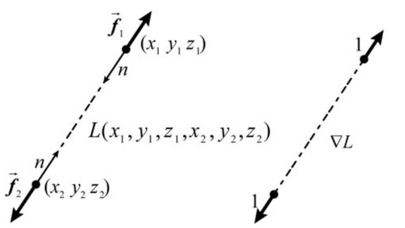
張力構造の形状決定法としてよく知られているものに1973年H.J.Schekにより提唱された応力密度法[1)]がある。これは、主にケーブルネット構造の形状決定を目的としたもので、「応力密度」と呼ばれる量とネットワークのコネクティビティを既知量として与える事により、1回の線形逆計算で形状決定が行える簡便な方法である。M.R.Barnesは動的緩和法[2)]を用いて効率的に力の釣り合い方程式を解く方法を提案し、これを張力構造の形状決定に適応できる事を示している。

張力構造の形状決定手法としては、系のポテンシャルエネルギーを最小化する手法も様々に提案されている。これらは拘束条件の下での汎関数の停留問題としてとらえることが出来る。代表的なものとして、真柄、川股、国田らによる混合法[5)](ケーブルネットの形状決定および大変形追跡)、野口らによる変分法に基づいたテンセグリティの形状決定[6)]、複数の研究者による極小曲面に関する研究[3)4)]などがある。

本報では、張力構造の形状決定に関して物理的な意味にこだわらない汎関数の自由な設定という視点を導入し、基礎的検討を行う。

2　形状決定の定式化

2.1　直線部材



(a)トラス要素の力の釣り合い　　(b)長さの勾配

図1 トラス要素

まず、図1(a)に示すような軸力n（引っ張りを正）のみを負担する直線部材(以下トラス要素と呼ぶ)を考える。両端の節点を各々1,2と呼び、各々のデカルト座標系における座標をそれぞれ(x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)とする。各節点には外力$\vec{f}_1 = \left[f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}\right]$ $\vec{f}_2 = \left[f_{x2}, f_{y2}, f_{z2}\right]$が作用し、釣り合い状態にある。また、トラス要素の長さをlとする。このとき、両端に働く力の成分をまとめて、

$$\vec{f} = \left[f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}, f_{x2}, f_{y2}, f_{z2}\right] \tag{2-1}$$

*1　東京大学大学院工学系研究科・修士
*2　東京大学生産技術研究所，教授，工博

と表せば、具体的には

$$\vec{\boldsymbol{f}} = n\left[\frac{(x_1 - x_2)}{l}, \frac{(y_1 - y_2)}{l}, \frac{(z_1 - z_2)}{l}, \frac{(x_2 - x_1)}{l}, \frac{(y_2 - y_1)}{l}, \frac{(z_2 - z_1)}{l}\right] \tag{2-2}$$

と計算することができる。一方、トラス要素の長さ l は 6 つの変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ をパラメータとする関数であり、具体的には

$$l(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{2-3}$$

である。このとき、l の勾配を

$$\nabla l = \left[\frac{\partial l}{\partial x_1}, \frac{\partial l}{\partial y_1}, \frac{\partial l}{\partial z_1}, \frac{\partial l}{\partial x_2}, \frac{\partial l}{\partial y_2}, \frac{\partial l}{\partial z_2}\right] \tag{2-4}$$

と表せば、

$$\nabla l = \left[\frac{(x_1 - x_2)}{l}, \frac{(y_1 - y_2)}{l}, \frac{(z_1 - z_2)}{l}, \frac{(x_2 - x_1)}{l}, \frac{(y_2 - y_1)}{l}, \frac{(z_2 - z_1)}{l}\right] \tag{2-5}$$

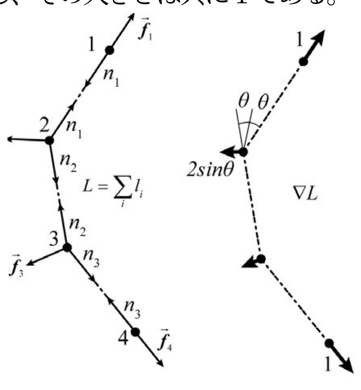
となる。(2-5)式の各成分は、一般に方向余弦と呼ばれている。従って、(2-2)式と(2-5)式より

$$\vec{\boldsymbol{f}} = n\nabla l \tag{2-6}$$

と書くことができる。

また、圧縮力を負担する直線部材（以下、ストラットと呼ぶ）については、構成するトラス要素と同じ定式化を用いるが、区別してストラット要素と呼ぶこととする。

ここで、(2-5)式を幾何学的に考察するならば(図 1(b))、トラスの両端における、トラス要素に平行で逆向きな 2 つのベクトルを表し、その大きさは共に 1 である。



(a)**ケーブル部材の力の釣り合い** (b)**長さの勾配**

図 2　ケーブル部材

次に図 2(a)に示すように、トラス要素の集合として線材置換されたケーブル部材を考える。図 2 は 3 つの線材に置換した例である。ケーブル要素の全長 L は、構成するトラス要素の長さ $l_1 \cdots$ の総和とする。すなわち、

$$L = \sum_i l_i \tag{2-7}$$

である。また、軸力についても図 2(a)のようにそれぞれのトラス要素が軸力 $n_1 \cdots$ を負担しているとする。

ここで、すべての節点の座標パラメータを並べたベクトル

$$\vec{\boldsymbol{x}} = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 \cdots] \tag{2-8}$$

を定義する。さらに、これと同じ順序に(2-1)式を拡張する。例えば 1 番目のトラス要素の両端が節点 1,2 のとき釣り合う外力を下記のように表し、

$$\vec{\boldsymbol{f}}_1 = [f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}, f_{x2}, f_{y2}, f_{z2}, 0,0,0 \cdots] \tag{2-9}$$

拡張するものとする。このとき、ケーブル要素の各節点に働く外力は、

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{f}}_i \tag{2-10}$$

として総和の形式で計算することができる。

一方 L は座標パラメータ $\vec{\boldsymbol{x}}$ の関数であり、その勾配を

$$\nabla L = \left[\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial z_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial y_2}, \frac{\partial L}{\partial z_2}, \frac{\partial L}{\partial x_3} \cdots\right] \tag{2-11}$$

と表せば、(2-7)式より、

$$\nabla L = \sum_i \nabla l_i \tag{2-12}$$

である。ただし ∇l も同様に拡張され、

$$\nabla l = \left[\frac{\partial l}{\partial x_1}, \frac{\partial l}{\partial y_1}, \frac{\partial l}{\partial z_1}, \frac{\partial l}{\partial x_2}, \frac{\partial l}{\partial y_2}, \frac{\partial l}{\partial z_2}, 0 \cdots\right] \tag{2-13}$$

と計算されるものとする。このとき、このように拡張しても(2-6)式はそれぞれのトラス要素について成立しているので、(2-6), (2-10), (2-12)式より

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i n_i \nabla l_i \tag{2-14}$$

と書くことができる。

また、特にケーブル部材が一様な軸力 n を負担している場合は

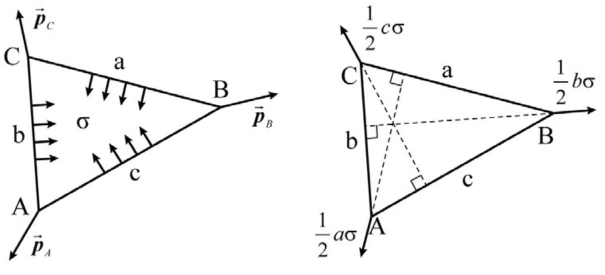
$$\vec{\boldsymbol{F}} = n\nabla L \tag{2-15}$$

と書くことができる。

ここで、(2-12)式を幾何学的に考察するならば(図 2(b))、ケーブル要素の両端においてはトラス要素と同じであるが、それ以外の節点においては、節点を共有する 2 つのトラスの間の鈍角側角度を 2 等分する方向を向くベクトルを表し、その

大きさは図 2(b)の角度θを用いて $2\sin\theta$ となる。

2.2　三角形平面部材



(a)三角形平面部材の力の釣り合い　　(b)外力の大きさと向き

図 3　三角形要素と力の分解

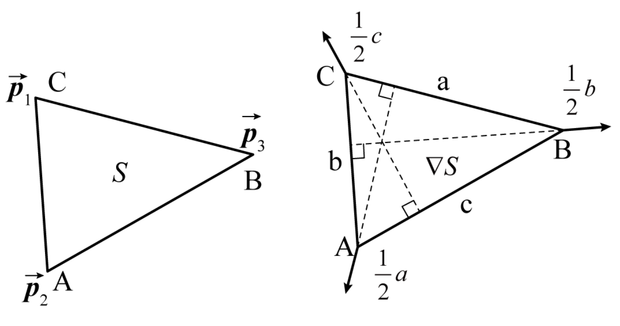
図 3(a)のような三角形平面部材（以下、三角形要素と呼ぶ）を考える。厚さは一様とする。3 つの辺の長さを a,b,c とし、それぞれに向かい合う頂点を A,B,C とする。以下、本報告では等張力状態のみを扱う。そこで、三角形要素はその内部は平面的に定応力かつ等方静圧状態であり、それぞれの辺に垂直かつ面内方向に、単位長さあたり σ の大きさの力を負担しているものとする。以下 σ は膜応力と呼ぶこととする。そして 3 つの頂点に図 3(a)のように外力 $\vec{\boldsymbol{p}}_A$ $\vec{\boldsymbol{p}}_B$ $\vec{\boldsymbol{p}}_C$ が作用し、三角形要素の負担する膜応力 σ（引っ張りを正とする）と釣り合っているとする。

このような外力は唯一に決まり、図 3(b)のように、例えば頂点 C において、向かい合う辺に下ろした垂線に平行で、向かい合う辺と逆の方向、さらにその大きさが $c\sigma/2$ である。

以上より、三角形要素についても頂点 A,B,C に働く外力は $\vec{\boldsymbol{p}}_A$ $\vec{\boldsymbol{p}}_B$ $\vec{\boldsymbol{p}}_C$ の成分 $(f_{x1} f_{y1} f_{z1})$、$(f_{x2} f_{y2} f_{z2})$、$(f_{x3} f_{y3} f_{z3})$ を書き並べたもの

$$\vec{\boldsymbol{F}} = [f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}, f_{x2}, f_{x2}, f_{z2}, f_{x3}, f_{x3}, f_{z3}] \tag{2-16}$$

として表すことができる。



(a)三角形要素の面積　　(b)面積の勾配

図 4　三角形要素の面積と勾配

一方、三角形要素の面積を S とし、3 つの頂点の位置ベクトルを $\vec{\boldsymbol{p}}_1, \vec{\boldsymbol{p}}_2, \vec{\boldsymbol{p}}_3$ とすると、S は $\vec{\boldsymbol{p}}_1, \vec{\boldsymbol{p}}_2, \vec{\boldsymbol{p}}_3$ の関数となる。このとき、$\vec{\boldsymbol{p}}_1, \vec{\boldsymbol{p}}_2, \vec{\boldsymbol{p}}_3$ の成分を (x_1, y_1, z_1)　(x_2, y_2, z_2)　(x_3, y_3, z_3) として S の勾配

$$\nabla S = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial z_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, \frac{\partial S}{\partial z_2}, \frac{\partial S}{\partial x_3}, \frac{\partial S}{\partial y_3}, \frac{\partial S}{\partial z_3}\right] \tag{2-17}$$

を求めると、図 4(b)のように、それぞれの頂点において向かい合う辺に垂直かつ逆向きで、その大きさが向かい合う辺の大きさであるようなベクトルの成分を書き並べたものとなる。

図 3(b)と図 4(b)を比べれば、三角形要素に働く外力は

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sigma \nabla S \tag{2-18}$$

と書き表すことができる。

本報ではこのように、面積を表す関数 S は常に三角形要素の面積を表すものとする。

2.3　力の釣り合い方程式と汎関数

本節では 2.1～2.2 節を踏まえ力の釣り合い式の立式を行う。

複数のケーブル部材、三角形平面部材からなる構造系を考える。これらを前節のトラス要素と三角形要素でモデル化し、すべてのトラス要素について個別に、長さを表す関数 L と軸力 n を定める。

まず、系の全節点の x,y,z 座標を並べたベクトル

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \cdots x_n] \tag{2-19}$$

を定義する。n は節点の総数の 3 倍である。

本報では、n 個の座標パラメータを含む $\boldsymbol{x}$ を未知数とおき、形状決定問題を解くものとする。

次に、すべての関数 L、S を拡張し、パラメータに $\boldsymbol{x}$ をとるものとする。それぞれの要素に働く外力は、他の要素の内力のみとし、系の外からは外力が作用していないとすると、力の釣り合いは(2-6)、(2-18)式より

$$\begin{aligned} &\sum_j \vec{\boldsymbol{F}}_j = \boldsymbol{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_j n_j \nabla L_j + \sum_j \sigma_j \nabla S_j = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2-20}$$

と書ける。

さて、すべての要素の n, σ を並べて、

$$\boldsymbol{n} = [n_1 \cdots],\quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \cdots] \tag{2-21}$$

とすれば、

“(2-21)式を満たす零でない $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}$ が少なくとも一つ存

在する” (条件 1)

ならばその形状は張力構造に応用できる可能性があるといえる。

$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}$ が少なくとも一つ存在するだけでは、必ず張力構造に応用できるということはできない。しかし本報では、条件 1 のみ用いて、形状決定を試行した。

2.4 汎関数の停留問題とパラメータの設定

条件 1 を満たす $\boldsymbol{x}$ を得るため、本報では特に次の形の汎関数の停留問題について考察する。

$$\Pi(\boldsymbol{x}, \lambda, \boldsymbol{p}) = \sum_j \pi_j(w_j, S_j) + \sum_j \pi_j(w_j, L_j) + \sum_k \lambda_k (L_k - \overline{L}_k) \rightarrow stationary \quad (2\text{-}22)$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{L}}$$

$\boldsymbol{p}$ の意味は後述する。はじめの 2 項は、一般にはポテンシャルエネルギーなどの物理的意味を持たせることが多いが、本報告では特に意味を与えておらず、要素ごとにひとつずつ定める自由に設定した汎関数として考える。そこで、本報では $\pi(w,S)$,$\pi(w,L)$ を要素内汎関数と呼ぶことにする。w は重み係数であり、それぞれの要素内汎関数が必ず一つ含むものとする。また、後ろの項は拘束条件を表す。

λ は $Lagrange$ 未定乗数である。$\overline{L}$ は拘束値である。本報では三角形要素とトラス要素には要素内汎関数を与え、ストラット要素には拘束条件を与えているので、ストラット要素に関する総和の添え字を k として区別した。

本報で考察の対象とするのは主に次の要素内汎関数である。

$$\begin{aligned} \pi(w,S) &= wS, wS^2 \\ \pi(w,L) &= wL, wL^2, wL^4 \end{aligned} \quad (2\text{-}23)$$

(2-22)式を利用した形状決定により張力構造に応用可能な解を得るためには、適切な要素内汎関数を選択する必要がある。

また、$\boldsymbol{p}$ は汎関数の停留問題を解く時点では既知であるが、様々な値を与えて異なる解を得る目的で設定されている複数のパラメータである。具体的には要素内汎関数の重み係数 w をまとめたもの $\boldsymbol{w}$ と、拘束条件の拘束値をまとめたもの $\overline{\boldsymbol{L}}$ とする。$\boldsymbol{p}$ が与えられ、(2-22)式が停留したとき、$\boldsymbol{x}$ に関する停留条件は

$$\nabla\Pi = \sum_j \frac{\partial \pi_j(S_j)}{\partial S_j} \nabla S_j + \sum_j \frac{\partial \pi_j(L_j)}{\partial L_j} \nabla L_j + \sum_j \lambda_j \nabla L_j = \boldsymbol{0} \quad (2\text{-}24)$$

であり、(2-20)式と同じ形式であるから、必ず、条件 1 を満たすことができる。

条件 1 を満たす $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}$ の求め方を簡潔に示すと、

$$\sigma = \frac{\partial \pi(S)}{\partial S}, \quad n = \frac{\partial \pi(L)}{\partial L}, \quad n = \lambda \quad (2\text{-}25)$$

である。はじめの二つは三角形要素とトラス要素について、後ろの 1 つはストラット要素についての求め方である。ただし、本報では要素内汎関数に物理的意味を一切与えていないので、(2-25)式はあくまで条件 1 との関係において利用できる式である。

2.5 応力密度法との関係

張力構造の形状決定手法として極小曲面に関する研究[3)4)]や混合法[5)]などが知られている。これらは、汎関数の停留問題に帰着されるものである。

しかし、本研究は力の釣り合い式を直接解くという意味において、文献[1)]で提案された応力密度法にその基礎を置いている。ここでは応力密度法と本研究の関係について述べる。

まず、ケーブル部材の要素内汎関数 $\pi(w,L) = wL^2$ について (2-25)式は

$$n = \frac{\partial 2wL^2}{\partial L} = 2wL \quad (2\text{-}26)$$

と計算される。さらにここから n と w の間の関係

$$n = 2wL \quad , \quad w = \frac{1}{2} n L^{-1} \quad (2\text{-}27)$$

が得られる。文献[1)]における応力密度の定義は軸力を長さで除したものである。ただし、文献[1)]における長さはトラス要素の両端間距離に限定されているから、(2-26)式の w と文献[1)]の応力密度が定数倍を除いて一致するのは、ケーブル要素が唯一つのトラス要素からなるときである。

さらに文献[1)]には外力の作用しないとき、応力密度法の解はケーブルの長さの重みつき 2 乗和を最小にするような形状である、との旨の記述が見られる。トラス要素のみからなる系について、応力密度法はトラス要素の要素内汎関数を $\pi(w,L) = wL^2$ とした場合と一致する。

一般に力の釣り合い式は汎関数の停留問題に帰着できる。本研究の位置づけは、応力密度に代わる様々なパラメータを重み係数 w として与え、力の釣り合い式を直接解かず汎関数の停留問題として解くものである。

また、応力密度法をテンセグリティ構造に応用すると、解は存在しないか不定となってしまうことが知られている。文献[7)~10)]はこのような不定解から解を得ようとするものである。

汎関数の停留問題も、一般に解の存在や一意性は保証され

ていない。これに対し、本報の４章では、汎関数の適切な選択によりテンセグリティ構造の形状決定が安定的に行えた例を紹介する。

3　汎関数の選択について

本章では要素内汎関数を適切に選択するための基礎考察を行う。

3、４章の例題において"解"と表現するものは、汎関数の停留問題を拘束条件付最小化問題に置き換え簡便に解いて得られたものであり、汎関数の安定な停留点の一つと考えられる。真の最小解であるか、唯一の停留点であるか、といった考察は行っていない。

3.1　トラス要素からなる系

本節ではケーブルネット構造などの形状決定を目的とし、トラス要素に与える要素内汎関数について考察する。

図５は95の自由節点、５つの固定点、220の直線からなるコネクティビテイを表す。220の直線全てを個別にトラス要素とした。本節では図７で与えられた固定点座標のもとで、次に示す汎関数の停留問題を、指数 p を様々に変えながら解き、その解の比較や考察を行う。

$$\Pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_j L_j^{\ p} \rightarrow stationary \qquad (3\text{-}1)$$

p=1,2,4,6 としたときの解を図６〜９に示す。それぞれの解における、長さの総和、２乗和、４乗和、６乗和を表１に示す。また、p を 1.0 から 6.0 まで連続的に変更しながら解を求めたときの、長さの総和、２乗和と p の関係を図10、11に示す。表１と図10、11から、指定した目的関数が他の解より小さい値をとっていることが確認できる。

指数 p を変更することは重み係数 w を変更することと同等であるが、多数のトラス要素に異なるパラメータを指定することは現実的でない。そこで指数 p を選択する基準は w を一様としたときの形状に求めるべきと考え、４章で紹介する解析例では、トラス要素の要素内汎関数に wL^2 を与えた。ただし、ストラット要素を含む場合については3.4節で述べる。

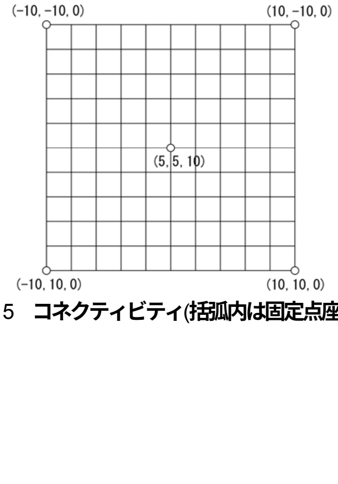


図５　コネクティビティ(括弧内は固定点座標)

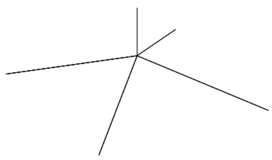


図６　長さの最小化

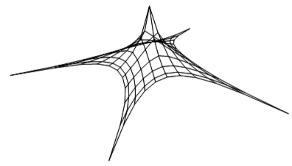


図７　長さの２乗和の最小化

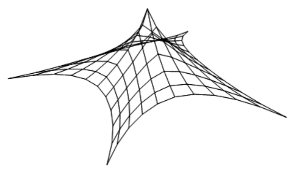


図８　長さの４乗和の最小化

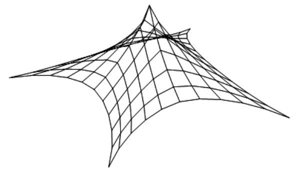


図９　長さの６乗和の最小化

表１　最小化問題の解と状態量

目的関数 / 状態量	$\sum L$	$\sum L^2$	$\sum L^4$	$\sum L^6$
$\sum L$	1.38E+02	3.24E+02	3.94E+02	4.11E+02
$\sum L^2$	2.00E+03	6.41E+02	7.35E+02	7.81E+02
$\sum L^4$	4.76E+05	6.15E+03	2.86E+03	2.96E+03
$\sum L^6$	1.16E+08	1.11E+05	1.31E+04	1.20E+04

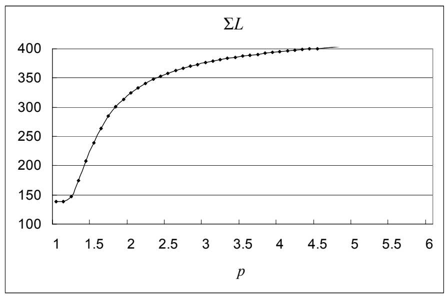


図10　長さの総和と指数ｐの関係

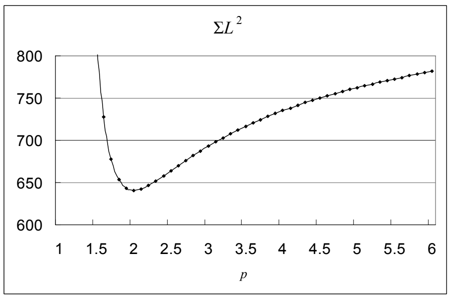


図11　長さの２乗和と指数ｐの関係

3.2　三角形要素からなる系

本節では、膜構造の形状決定などを目的とし、三角形要素に与える要素内汎関数について考察する。図12は、２枚の平行に配置されたリングの間に張られる円柱状のコネクティビティを表す。リングの直径を10.0とする。リング間距離をｄとする。円周方向をＵ、その直交方向をＶとし、Ｕ方向に32、Ｖ方向に16の節点を設定した。形状は32x15x2=960

の三角形要素の集合で表現する。リング上の節点はすべて固定点とし、予め座標を与える。このとき、汎関数の停留問題

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j} S_{j} \rightarrow stationary \tag{3-2}$$

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j} S_{j}^{2} \rightarrow stationary \tag{3-3}$$

の解を、リング間距離 d を様々に変えながら求める。一般に膜の形状は極小曲面が最適とされることが多い。(3-2)式は多面体の表面積を極小化するものである。これと、(3-3)式の解を特に表面積の観点から比較する。

本例題の停留点は安定点と不安定点の二つ存在する場合があり、安定点のみが求まった。本例題に関しては川口らによる文献 [11)]で詳細に報告されている。

図 13 に d=4.0 のときの(3-2)式の解を、図 14 に(3-3)式の解を示す。ここでいう“解”は、形状に変化が見られないと判断したものを抽出したものである。計算を終了する判定基準を設けない代わりに、次に示す“停留の度合い” $|\nabla\Pi|$ を計算し考察の対象とした。また、図 13,14 など幾つかの解については計算を続行して複数の解を抽出し、比較の対象とした。

$$\nabla\Pi = \left[\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Pi(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \right] \quad |\nabla\Pi| = \sqrt{\nabla\Pi\nabla\Pi^{t}} \tag{3-4}$$

表 2 にそれぞれの解における $|\nabla\Pi|$ や表面積などの諸量を示す。まず第一に着目するべきは、(3-2)式と(3-3)式の与える解が同一の表面積に収束したことである。また、S1_d4.0_1 は図では破綻しているように見えるが、母線の形状から十分滑らかな曲面であり、表 2 から極小曲面との表面積の差はわずかであることがわかる。さらに解析を続行すると S1_d4.0_2 で表面積はほぼ収束し、さらに膨大なステップ数を経て整然とメッシュの配置された S1_d4.0_3 に至った。一方(3-3)式を用いたほうは、S2_d4.0_1 で表面積はほぼ収束しメッシュの配置も綺麗である。ここで、両者の収束計算におけるステップ数を比較すると、その収束性は大きく異なることが分かる。これは、具体的な数値計算アルゴリズムにも依存すると考えるべきであるが、むしろ(3-2)式のもつ定性的な性質の影響と考えることもできる。石原らによる文献 [9)]は面積汎関数のもつ不定性が数値解析の安定性に影響を与えることを指摘している。

同様に d=6.0,6.6 について、(3-2)式の与える解を図 14 に、(3-3)式の与える解を図 15 に示す。また、それぞれの解に対応する諸量を表 3、4 に示す。d=6.0 のとき両者の表面積は一致し、d=6.6 のとき誤差が認められる。S2_d6.6_1 について計算を続行し $|\nabla\Pi|$ のオーダーを 4 桁下げたものが、S2_d6.6_2 である（表 4 のみに掲載）。しかし表面積は変化せず、S2_d6.6_1 において表面積は収束していると考えられる。

同様に d=6.7 のときの(3-2)式の与える解を図 17 に、(3-3)式の与える解を図 18 に、その諸量を表 5 に示す。約 d=6.67 以上では極小曲面は上下の 2 枚の円盤に分かれてしまうことが知られている。このとき数値解析解はただの最小解となるが考察の対象とした。図 17、18 を比べると、よく似た形状が得られているが表面積は若干異なる。また、S2_d6.7 は数値解析において不安定性がみられた。

このように微妙な相違は認められるものの、(3-1)式と(3-2)式はよく似た形状を与えているといえる。また、極端な状況を除き、メッシュの整然とした配置や数値解析の安定性、収束の速さなど、いくつかメリットも認められた。

そこで 4 章で紹介する解析例では実験的に、三角形要素の要素内汎関数に wS^2 を選択し、一つの曲面に属する全ての三角形要素に同じ重み w を指定した。

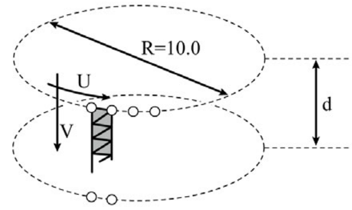


図 12　コネクティビティ

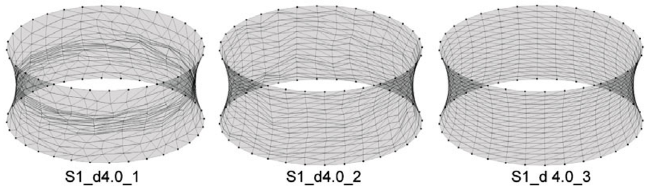


図 13　面積の最小化(約 500Step,1300Step,3500Step)

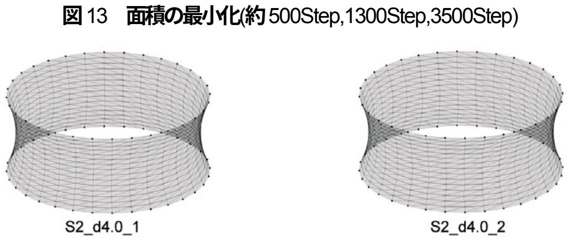


図 14　面積の 2 乗和の最小化(約 300Step,800Step)

表 2　d=4.0 における諸量

#	π	Π=Σπ	$\|\nabla\Pi\|$	Area=ΣS	d
S1_4.0_1	S	1.22E+02	3.96E-01	121.92	4.0
S1_4.0_2	S	1.22E+02	2.05E-03	121.88	4.0
S1_4.0_3	S	1.22E+02	2.02E-04	121.88	4.0
S2_4.0_1	S^2	1.55E+01	1.13E-01	121.89	4.0
S2_4.0_2	S^2	1.55E+01	8.92E-05	121.88	4.0

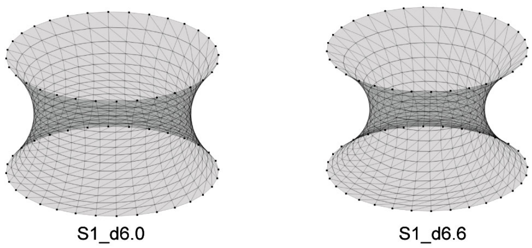


図 15　面積の最小化(d=6.0,6.6)

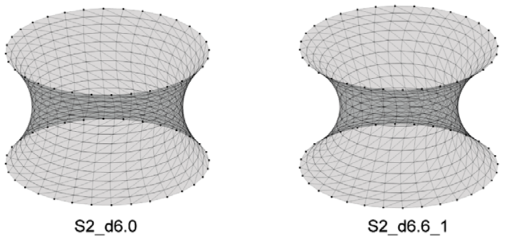


図 16　面積の 2 乗和の最小化(d=6.0,6.6)

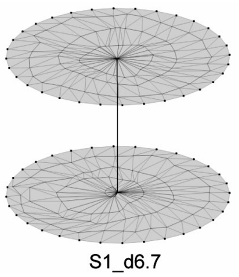


図 17:面積の最小化(d=6.7)

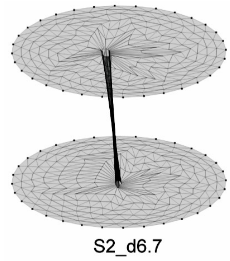


図 18:面積の 2 乗和の最小化
(d=6.7)

表 3　d=6.0 のときの諸量

#	π	Π=Σπ	|∇Π|	Area=ΣS	d
S1_6.0	S	1.75E+02	2.59E-03	174.62	6.0
S2_6.0	S^2	3.18E+01	4.12E-05	174.62	6.0

表 4　d=6.6 のときの諸量

#	π	Π=Σπ	|∇Π|	Area=ΣS	d
S1_6.6	S	1.87E+02	4.05E-03	187.46	6.6
S2_6.6_1	S^2	3.67E+01	3.72E-04	187.49	6.6
S2_6.6_2	S^2	3.67E+01	3.82E-08	187.49	6.6

表 5　d=6.7 のときの諸量

#	π	Π=Σπ	|∇Π|	Area=ΣS	d
S1_6.7	S	1.56E+02	2.33E+01	156.28	6.7
S2_6.7	S^2	3.19E+01	7.14E-02	162.99	6.7

3.3　ケーブルと膜からなる系

本節では補強ケーブルと膜からなる構造の形状決定などを目的とし、3.2 節に引き続き三角形要素の要素内汎関数について考察を行う。

図 19 は前節を継承したコネクティビティに、8 つのケーブル要素を追加したものである。V 方向に連続的にトラス要素を追加し、まとめてケーブル要素とした。このようなケーブル要素を U 方向に等間隔に 8 本設定した。それぞれ個別に全長を表す関数 L を定め L=12 を拘束条件として与えた。

このモデルを用いて、次に示す二つの汎関数の停留問題の解を求め、比較と考察を行う。

$$\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j S_j + \sum_j \lambda_j (L_j - \bar{L}_j) \to stationary \quad (3\text{-}5)$$

$$\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j S_j{}^2 + \sum_j \lambda_j (L_j - \bar{L}_j) \to stationary \quad (3\text{-}6)$$

本例題も文献[11)]に複数の解についての報告がなされているが、ここでは(3-5)、(3-6)式の与える解の比較に的を絞って考察する。

d=4.0、5.0、6.0 のときの(3-5)式が与える解を図 20 に、(3-6)式が与える解を図 21 に示す。同様に、d=6.6、6,7、8.0 のときの(3-5)が与える解を図 22 に、(3-6)式の与える解を図 23 に示す。d=6.6、6.7 の間で起きる形状の遷移は文献[11)]で報告されている。(3-5)式と (3-6)式はよく似た形状を与えているといえる。しかし、d=4.0、5.0、6.0、6.6 について詳細に比較すると、8 本のケーブルの形状は、(3-5)式の与える解の方が滑らかであり、メッシュの配置も整然としている。逆に形状が遷移した後の大きな曲率をもつ形状では、(3-6)式の与える曲面のほうが滑らかである。

それぞれの解に対応する諸量を表 6、7 に示す。前節と異なり、すべての解において、表面積に差が認められるが、やはり(3-6)式が(3-5)式によく似た形状を与えているということができる。また、S1_4.0～6.6 においてケーブルは、振動する、突然変形するなどの不安定な挙動を示した。このような挙動は前節同様、数値解析の具体的な手法に依存するとも考えられるが、(3-5)式の定性的な性質と考えることも出来る。

これらの結果から 4 章で紹介する解析例ではやはり実験的に wS^2 を選択し、同じ領域内の三角形には同じ重み係数を与えた。

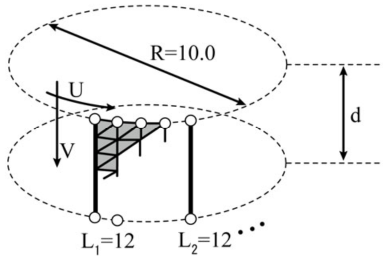
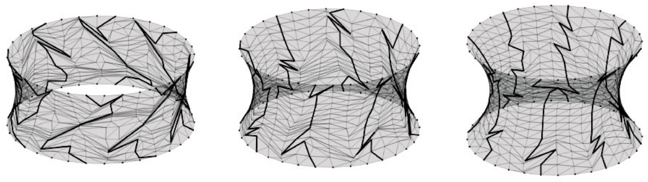
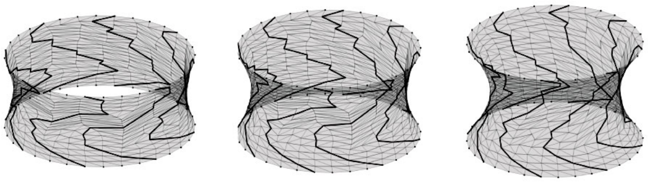


図 19　コネクティビティの設定



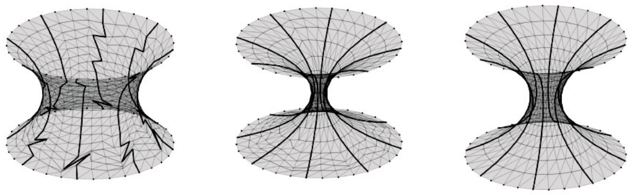
S1_4.0　　S1_5.0　　S1_6.0

図 20　面積の最小化(d=4.0,5.0,6.0)



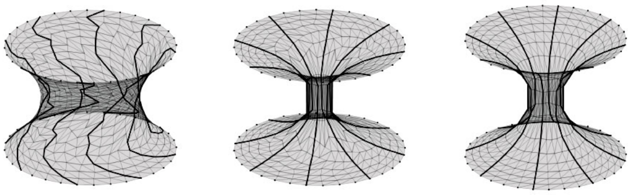
S2_4.0　　S2_5.0　　S2_6.0

図 21　面積の 2 乗和の最小化(d=4.0,5.0,6.0)



S1_6.6　　S1_6.7　　S1_8.0

図 22　面積の最小化(d=6.6,6.7,8.0)



S2_6.6　　S2_6.7　　S2_8.0

図 23　面積の 2 乗和の最小化(d=6.6,6.7,8.0)

表 6　d=4.0,5.0,6.0 **のときの諸量**

#	π	Π=Σπ	|∇Π|	表面積ΣS	d
S1_4.0	ΣS	1.22E+02	6.60E-02	122.09	4.0
S1_5.0	ΣS	1.50E+02	2.12E-02	149.62	5.0
S1_6.0	ΣS	1.75E+02	5.62E-02	174.74	6.0
S2_4.0	ΣS^2	1.57E+01	1.04E-05	122.43	4.0
S2_5.0	ΣS^2	2.35E+01	1.03E-04	150.01	5.0
S2_6.0	ΣS^2	3.20E+01	1.11E-03	174.96	6.0

表 7　d=6.6,6.7,8.0 **のときの諸量**

#	π	Π=Σπ	|∇Π|	表面積ΣS	d
S1_6.6	ΣS	1.87E+02	2.05E-02	187.49	6.6
S1_6.7	ΣS	1.77E+02	2.86E-02	176.80	6.7
S1_8.0	ΣS	1.93E+02	1.06E-04	193.44	8.0
S2_6.6	ΣS^2	3.68E+01	1.60E-04	187.72	6.6
S2_6.7	ΣS^2	3.41E+01	5.87E-14	178.69	6.7
S2_8.0	ΣS^2	3.99E+01	5.24E-14	194.24	8.0

3.4　ケーブルとストラットからなる構造

本節ではテンセグリティのようなケーブル部材とストラット部材からなる系の形状決定を目的とし、コネクティビティを図 24 のように設定する。これは一般にシンプレックス型テンセグリティと呼ばれているものである。細線で表した直線はケーブル部材、太線はストラット部材を表す。

ケーブル部材は 1 つのトラス要素でモデル化し要素内汎関数を、ストラット部材は 1 つのストラット要素でモデル化し拘束条件を与える。特に次に示す汎関数の停留問題の解を、p を変えながら求め、比較、考察を行う。

$$\Pi(\boldsymbol{x},\lambda)=\sum_j L_j^{\ p}+\sum_k \lambda_k (L_k-\overline{L}_k)\to stationary \tag{3-7}$$

j はトラス要素に関する総和を、k はストラット要素に関する総和を表すものとする。ストラット要素は長さを 10.0 に拘束し、ケーブル要素の長さの累乗和を拘束条件のもとで停留させる。

p=1.0、2.0、2.1、2.2、3.0、4.0 のときの解を図 26 に示す。一般に長さが 0 のとき長さの勾配は計算できない。従って、p=1.0、2.0 についてはただの最小解だが、考察の対象とした。p=2.10 の解は図では直線に見えるが、わずかに立体形状となっている。

図 27、28 に p を 1.0 から 6.0 に動かしたときの長さの 2 乗和と 4 乗和の値を示す。最小化した目的関数がほかの解よりも小さな値をとっていることがわかる。

さて、指数 p を決定する明確な根拠はないが、図 26 の結果から、4 章では実験的に wL^4 をケーブル要素に与え、テンセグリティの形状決定が行えた例を紹介する。このとき、与える重み係数 w は、まず(2-25)式より軸力を計算して

$$n=4wL^3 \tag{3-8}$$

より、

$$w=\frac{n}{4L^3} \tag{3-9}$$

となる。重み係数 w を既知量として与えることは、応力密度と類似で、次数の異なる量を与えたものといえる。

R.Motro は文献[8])で、図 26 に示すコネクティビティと対称性をもつテンセグリティの応力密度の比を求めている。図 25 に示すように、上部のケーブル部材を top、下部を bottom、対角線上のものを lateral、太線を strutt とし、この順に応力密度は $q_t:q_b:q_l:q_s=1:1:\sqrt{3}:-\sqrt{3}$ として算出されている。

本例題のコネクティビティは、自己釣り合い力モードを一つしか持たず、その計算には(2-25)式を用いることが出来る。そこで、(2-25)式から要素軸力 n を計算し、さらに応力密度を求め、top の応力密度を 1 とした比率に換算したものが表

8 の FD Ratio である。文献[8]で示された応力密度と一致することが確認できる。これは本報で紹介された解の確からしさに一定の保障を与えるものである。

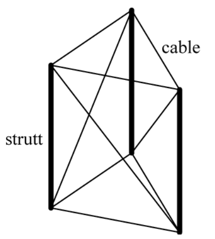


図 24　コネクティビティ

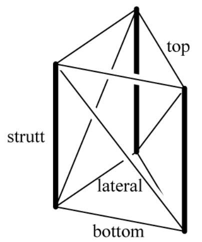


図 25　要素の分類

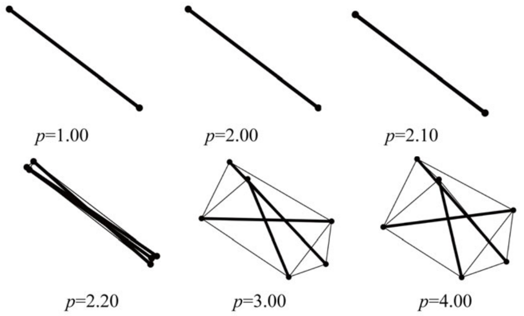


図 26　長さの累乗和を最小にする形状

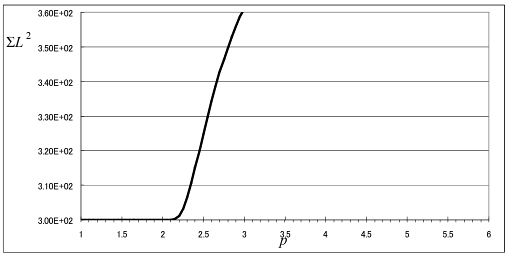


図 27　長さの２乗和と指数の関係（ケーブルのみ）

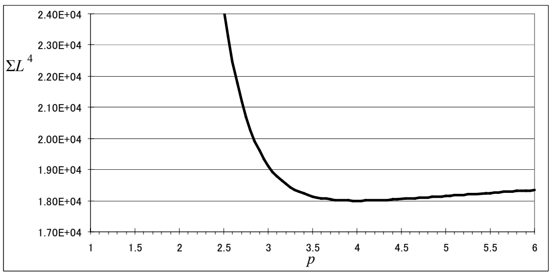


図 28　長さの４乗和と指数の関係（ケーブルのみ）

表 8　長さの４乗和を最小化したときの諸量

	Param	n	L	FD Ratio
strutt	L=10.0	-2.400E+03	10.00	-1.732E+00
top	p=4.0	8.155E+02	5.89	1.000E+00
bottom	p=4.0	8.155E+02	5.89	1.000E+00
lateral	p=4.0	1.859E+03	7.75	1.732E+00

4　形態解析例

本章では 3 章の考察を踏まえ、いくつかの適切に設定された汎関数による形状決定の例を紹介する。

汎関数の停留問題の数値解法としては、与えられた問題を拘束条件付最小化問題に置き換え、安定解を簡便に一つだけ求めている。また、真の最小解であるかは考察せず、収束した形状を解として採用した。

重み係数 w の具体的な値を決める明確な根拠は今のところなく、初期設定値は試行錯誤により定めた。また、初期形状にはすべての座標値に-1.0～1.0 のランダムな値を与えた。これは解の初期形状への依存を極力排除するためである。

4.1　テンセグリティ

本節では、次に示す汎関数の停留問題がテンセグリティの形状決定に有効であった例を紹介する。

$$\Pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}) = \sum_j w_j L_j^{\ 4} + \sum_k \lambda_k (L_k - \overline{L}_k) \rightarrow stationary$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{L}} = \frac{n_1}{4L_1^{\ 3}} \cdots, \overline{L}_1 \cdots \qquad (4\text{-}1)$$

j はケーブル部材をモデル化したトラス要素、k はストラット要素に関する総和を表す。

また、重み係数 w は同一の部材に属するトラス要素や三角形要素にはまとめて、同じ値を与えている。

・　シンプレックス型テンセグリティの解析

3.4 節と同一の例題について、重み係数 w やストラット要素の長さ $\overline{L}$ を様々に変え、(4-1)式の解を一つずつ求めた。トラス要素の初期重み係数 w は 5.0 を、ストラット要素の初期拘束長さ $\overline{L}$ は 10.0 を指定した。図 29 を参照すると、重み係数を大きくしたものは縮み、またその逆も成り立つことがわかる。

また、長さの 2 乗をケーブルの要素内汎関数に設定したところ、どのようなパラメータを与えても、直線状の解しか得られなかった。

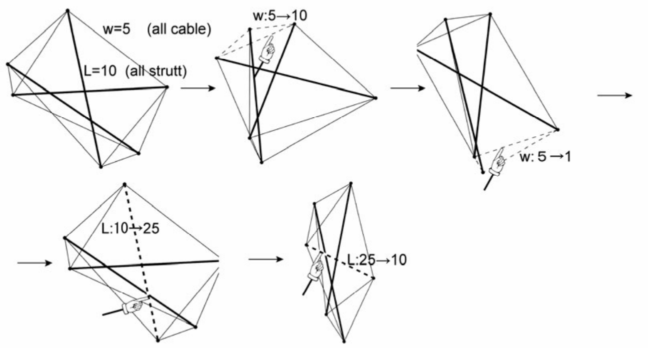


図 29　シンプレックスの形状決定とパラメータスタディ

・　立方八面体型テンセグリティの解析

図 30 に示す立方八面体に由来するコネクティビティをもつテンセグリティについて、様々にパラメータを変えながら、(4-1)式の解を一つずつ求めた結果を図 31 に示す。

図 30 は面を張っているように見えるが、これは立体形状を把握しやすくするためである。幾何学的要素は、全ての辺に一本ずつケーブル部材を配置し、正方形の対角線にストラット部材を図 30 のように配置したのみである。全てのケーブル部材は 8 本のトラス要素でモデル化され、その一つずつに要素内汎関数を与えた。これは 5.2 節のコネクティビティに流用するためである。図 31 から重み係数を大きくしたケーブル部材が縮む様子などがわかる。

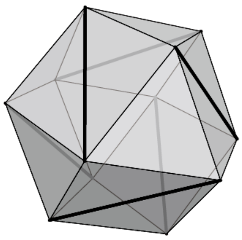


図 30　コネクティビティの設定

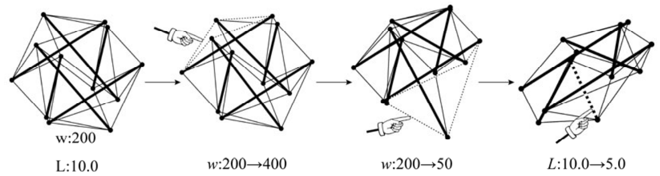


図 31　立法八面体型テンセグリティの形態解析

・　20 本のストラットをもつテンセグリティ

20 本のストラット部材を配置し、1 本目のストラット部材に節点 1,2 を、2 本目のストラット部材に節点 3,4 を・・・と、順序良く節点 40 まで割り振る。N を 1 から 9 までの整数とし、第 i 節点は第[i+2N]節点と、第[i+2N+1]節点にケーブル部材を用いて接続される。節点番号が 40 を越えたら 40 を差し引く。この規則により全ての節点に 4 本のケーブル部材が接続されたコネクティビティを得ることができた。(図 32)

このようにして定められたコネクティビティに対し、ケーブル部材を一つのトラス要素に、ストラット部材は一つのストラット要素にモデル化した。

重み係数 w は第[i+2N]節点に接続したトラス要素に 1.0 を、第[i+2N+1]節点に接続したトラス要素に T を設定した。そし、様々な N,T を指定し(4-1)式の解を求めた。

T=2.0 のときの様々な解を図 33 に、N=6 のときの様々な解を図 34 に示す。図 34 で T を連続的に小さくしていくと、T =0.9 付近で形状の遷移がみられた。また、初期形状をランダムに与えているため、確率的に複数の局所安定解に停留する例がみられた。図 35 は共通の N,T から得られた二つの解である。

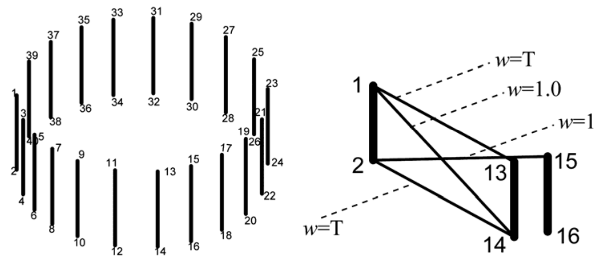


図 32　コネクティビティの設定(N=6 の場合)

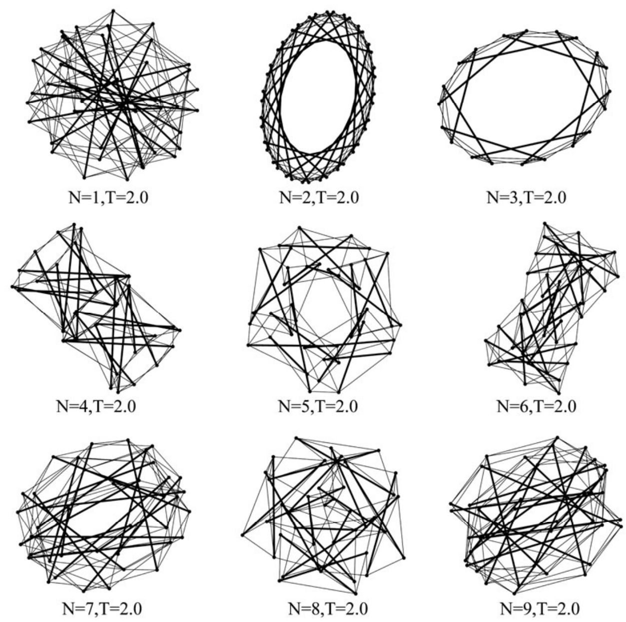


図 33　部材数が共通で、コネクティビティの異なるテンセグリティ

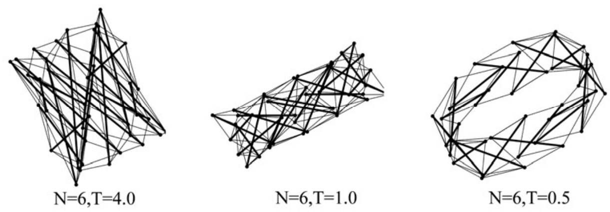


図 34　重み係数の変更による形態解析

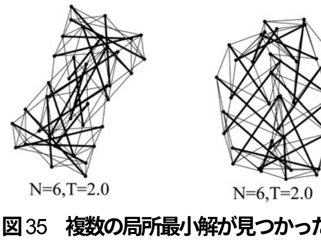


図 35　複数の局所最小解が見つかった例

4.2　複合型テンセグリティ

野口らは文献[6)]において、テンセグリティを拡張し、張力を膜材料にも負担させるテンセグリティの提案を行った。本節ではこのように、互いに独立なストラット部材がケーブル部材および膜と釣り合う構造を複合型テンセグリティと呼び、図36に示すコネクティビティの解析例を報告する。図36は図30のコネクティビティを継承し、4つの辺に囲まれた正方形に8x8x2=64の三角形要素からなる近似的な曲面を追加したものである。6つの曲面の境界には一つずつケーブル部材が配置されている。ケーブル部材は8つのトラス要素としてモデル化し、それぞれに要素内汎関数を与えた。本例題で解く汎関数の停留問題は次のように表される。

$$\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{p}) = \sum_j w_j L_j^{\,4} + \sum_j w_j S_j^{\,2} + \sum_k \lambda_k (L_k - \overline{L}_k) \rightarrow stationary \qquad (4\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{L}} = \frac{n_1}{4L_1^{\,3}}\cdots, \frac{\sigma_1}{2S_1}\cdots, \overline{L}_1\cdots$$

図37に連続的にパラメータを変更し、それぞれ得られた解を示す。重み係数 $\boldsymbol{w}$ を変更しても形状に大きな変化は見られないが、ストラット部材間の距離、角度、境界ケーブル部材の曲率などに注意すると形状が変化している。一方、ストラット要素の長さを変更すると形状は大きく変化するが、引っ張り要素が柔軟に大きさを変え、形状が破綻することはなかった。

図38に同一のコネクティビティをもつ多様な形状を示す。

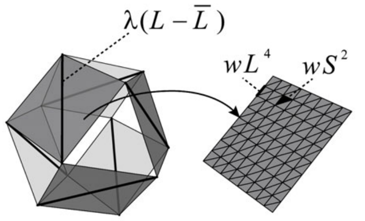


図36 コネクティビティと要素内汎関数の設定

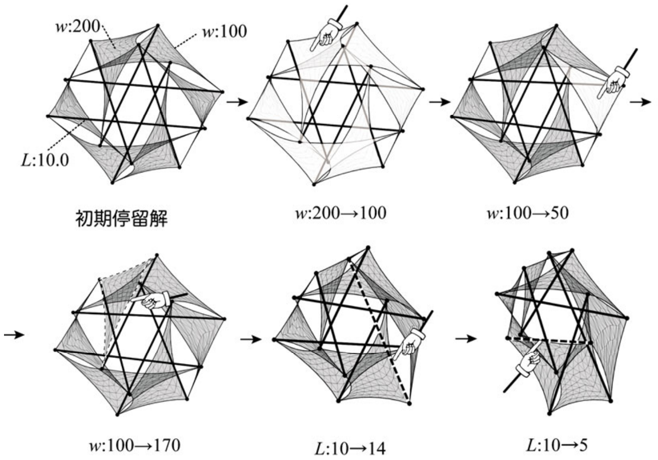


図37　複合型テンセグリティの形態解析

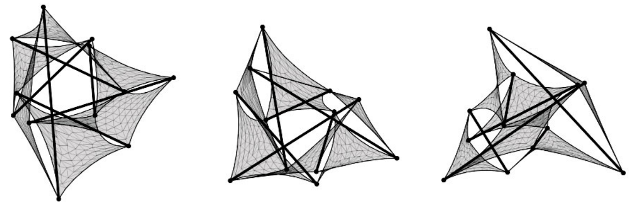


図38　共通のコネクティビティをもつ多様な形態

4.3　ケーブルと膜からなる構造

図39は3.3節を継承したコネクティビティであり、異なるのはリング上の固定点をV方向に配置したケーブル部材の両端に限定し、そのかわりリング上の固定点間にケーブル部材を配置したことである。U方向のケーブル部材は4つのトラス要素でモデル化し、V方向のケーブル部材は15のトラス要素でモデル化した。要素汎関数はすべてのトラス要素、三角形要素に個別に与えた。本例題で解く汎関数の停留問題は次のようになる。

$$\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{p}) = \sum_j w_j L_j^{\,2} + \sum_j wjS_j^{\,2} \rightarrow stationary$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{X}} = \frac{n_1}{2L_1}\cdots, \frac{\sigma_1}{2S_1}\cdots, \overline{X}_1\cdots \qquad (4\text{-}3)$$

$\overline{\boldsymbol{X}}$ は固定点の座標をまとめたものであり、本節の例題では、2つのリングの形状も様々に変更しながら(4-3)式の解を求めた。

図40にパラメータの変更により得られる様々な解の形状を示す。重み係数の変更によりケーブル部材の曲率が変化していることがわかる。

実際にはケーブル部材の曲率が極端に大きくなると、滑らかとは言えない形状も得られた。

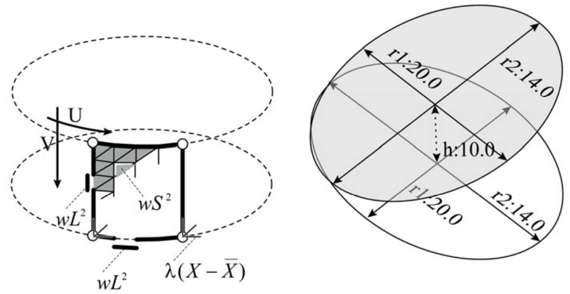


図39　コネクティビティと要素内汎関数の設定、上下のリングの形状と配置

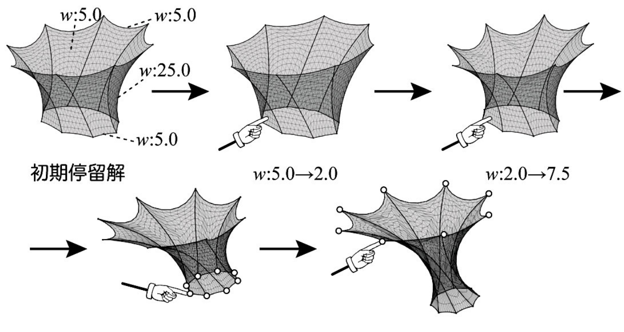


図40　重み係数と固定点座標の変更による形態解析

4.4　ケーブルと膜とストラットからなる構造

まず、図41に示すようなコネクティビティを円状に6つ繰り返したコネクティビティを設定した。ケーブル部材は多数のトラス要素でモデル化し、個別に要素内汎関数を与えた。

三角形要素の要素内汎関数にwS^2をトラス要素の要素内汎関数にwL^2を与えたときには形状が平面に潰れてしまった。そこで次に示す汎関数の停留問題の解を求めたところ高さを持った形状が得られた。これは、Frei Otto設計のケルンのダンス場を模したものである。

$$\Pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}) = \sum_j w_j L_j^{\ 4} + \sum_j w_j S_j^{\ 2} + \sum_k \lambda_k (L_k - \bar{L}_k) \rightarrow stationary \qquad (4\text{-}4)$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \bar{\boldsymbol{L}} = \frac{n_1}{4L_1^{\ 3}} \cdots, \frac{\sigma_1}{2S_1} \cdots, \bar{L}_1 \cdots$$

図42に重み係数wやストラット要素の長さの変更により得られる様々な解の形状を示す。

5　模型

図43に図33に掲載されたN,T=6,2.0のテンセグリティの模型写真を示す。

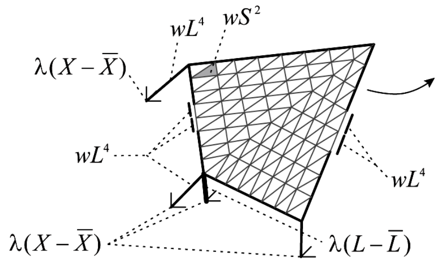


図41　コネクティビティと要素内汎関数の設定

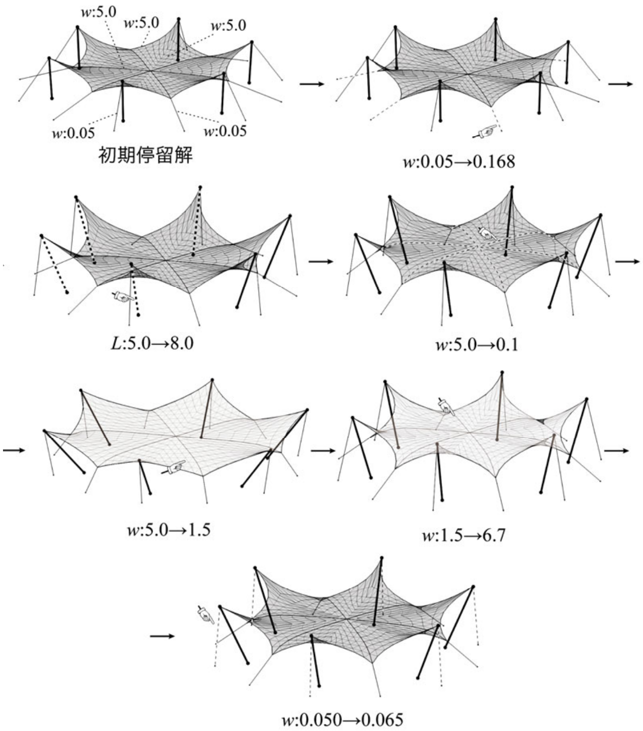


図42　ケルン・ダンス場の形態解析

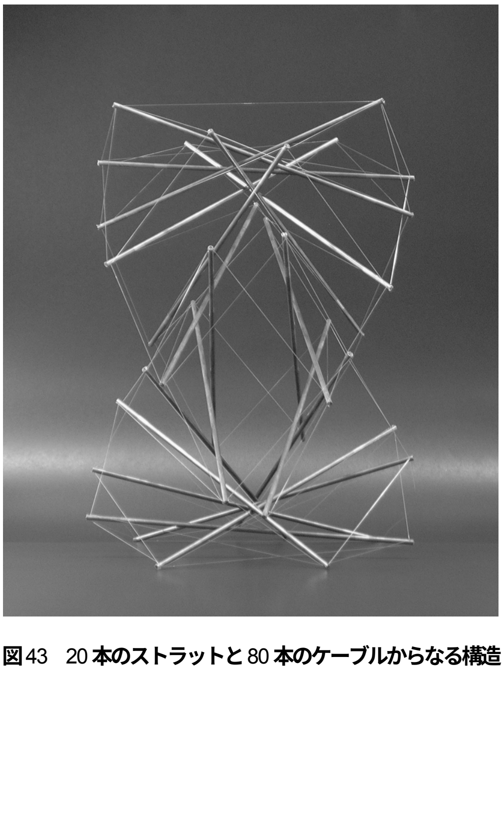


図43　20本のストラットと80本のケーブルからなる構造

6　まとめ

張力構造の形状決定問題を汎関数の停留という観点から考察した。特に長さや面積の重みつき累乗和について、単純な例題を用いて比較考察した。

このような考察を踏まえ、張力構造の形状決定問題に汎関数の自由な設定という視点を導入し、適切に設定された汎関数と共にいくつかの解析例が示された。

参考文献

1) Schek, H. J., The force density method for form finding and computation of general networks, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1974, 3, pp.115–134.

2) Barnes, M. R., Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation, *International Journal of Space Structures*, 1999, 14, pp.89-104.

3) 石原 競, 八木 孝憲, 萩原 伸幸, 大森 博司, 極小面解析による膜構造の形状解析：複合変分汎関数を用いて, 日本建築学会構造系論文集, 1995, No469, pp.61-70.

4) 川口健一, 柯宛伶, 三木優彰, 付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集, 2008, No.632, pp.1773-1777.

5) 真柄 栄毅, 川股 重也, 国田 二郎, 混合法によるケーブル・ネットの解析(その２・数値解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集(構造), 1973, pp.611-612.

6) Goto, K., Noguchi, H., Form Finding Analysis of Tensegrity Structure Based on Variational Method, *Proceedings of The Forth China – Japan - Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, 2006, pp.455-460.

7) Connelly, R., Back, A., Mathematics and tensegrity, *American Scientist*, 1998, 86,　pp.142–151.

8) Vassart, N., Motro, R., Multiparametered form finding method: application to tensegrity systems, *International Journal of Space Structures,* 1999, 14(2),　pp.147-154.

9) Tibert, A., G., Pellegrino, S., Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures, *International Journal of Space Structures*, 2003, 18(4), pp.209-223.

10) Zhang, JY., Ohsaki, M., Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43, pp.5658-5673.

11) 川口健一, 不安定構造物の理論とその応用に関する研究, 東京大学学位論文, 1990.

FUNDAMENTAL STUDY ON SHAPE FINDING OF TENSION STRUCTURES AND RELATED FUNCTIONALS

Masaaki MIKI [*1)]

Ken'ichi KAWAGUCHI [*2)]

SYNOPSIS

Shape-finding of tension structures is the process in which we find the appropriate shape that enables the structures to have the initial self-equilibrated states, so-called prestress states. For the shape-finding we usually carry out numerical analysis to solve special equations. Equations are formulated according to the self-equilibrated states or the stational condition of special functionals. This paper proposes generalization of functionals for shape-finding of tension structures. The generalization contains formulations of foregoing methods, such as, force density methods and minimal surface problems. Each functional gives different results of shape-finding while they all satisfy the condition of self-equilibrated states. Some of the newly introduced functionals enables us to find the shape of tension structures with compressive components, such as Tensegrities. In the first half of the paper the concept of the generalization is introduced. In the second half some numerical results are shown and discussed.

*1)　Graduate Student, Dept. of Engineering, Tokyo Univ.

*2)　Prof., IIS, Univ. of Tokyo, Dr. Eng.