

# 円形張力膜における主応力線とその方向角について

岩佐 貴史\*  
秋田 剛\*\*

## 梗概

張力場を仮定した薄膜の主応力線とその方向角を検証するために、シェル理論、膜理論ならびに張力場理論に基づく幾何学的非線形有限要素解析を行った。解析モデルは、円形張力膜の中央に設置した回転軸を反時計回りに回転させた際に生じるリンクリング現象である。シェル理論に基づく解析により、回転軸直近の膜面ではリンクリングに伴う面外変位が幾何学的に拘束されることによって、通常の膜理論で得られる平面応力場と類似した応力場が生成されることを示した。これにより、実際の薄膜の主応力線は回転軸近傍で急激に変化し、主応力比（最小主応力/最大主応力）が零となる領域でのみ直線となることを明らかにした。張力場を仮定した薄膜は、圧縮応力を負担しないために全てのリンクリング領域内の主応力線が必ず直線となる。そのため、回転軸近傍で急激に変化する主応力線とその方向角を予測することができず、実際の薄膜で主応力線が直線に漸近する領域においても、回転軸近傍の応力場の影響で主応力線方向角を正確に求めることができない。

## 1. はじめに

張力場理論は、薄膜の曲げ剛性と圧縮に対する抵抗力を共に零と仮定した簡易理論であり<sup>1</sup>、薄膜のリンクリング解析手法として古くから使用されている<sup>2,3,4</sup>。張力場理論に基づく解析は、薄膜の応力場を求めることによって、リンクリング領域や膜面の主応力線とその方向角を明らかにする。これらのうち、張力場理論から求められるリンクリング領域は、実際の現象をよく再現していることが過去の研究で報告されている<sup>5,6</sup>。しかし、薄膜の主応力線とその方向角に関しては、未だ十分な検証がなされていないように考えられる。

張力場を仮定した場合、薄膜に生じるリンクリングは一軸の引き張り応力場としてモデル化される。そのため、リンクリング領域内の主応力線は、リンクリングに直交する方向に外力が作用しない限り必ず直線となる。ところが、実際の薄膜はリンクリング領域内で座屈応力以上の圧縮応力を負担することが過去の研究から指摘されている<sup>7</sup>。これは、引き張り応力場と直交する方向に圧縮応力場が生成されることを示唆するものである。したがって、薄膜の主応力線とその方向角は圧縮応力を負担するリンクリング領域内の応力場に少なからず影響を受けるものと推測される。

本論文は、シェル理論、膜理論ならびに張力場理論に基づく幾

何学的非線形有限要素解析により、円形張力膜に生じるリンクリング現象<sup>8,9,10,11</sup>)をシミュレートする。そして、シェル理論の立場から円形張力膜の主応力線とその方向角の生成プロセスやリンクリング領域内の応力状態を考察し、張力場を仮定した薄膜の主応力線とその方向角について検証する。

## 2. 解析の概要

本研究は、円形張力膜に生じるリンクリング現象を対象に、薄膜の主応力線とその方向角について検討を行った。以下、本研究で用いた解析モデルならびにリンクリング解析法の概要を示す。

### 2.1 解析モデル

図1に、解析モデルを示す。図に示すモデルは、半径 $b$  ( $= 0.30m$ )の円形張力膜の中央に半径 $a$  ( $= 0.05m$ )の回転軸が取り付けられている。解析モデルの寸法ならびに材料パラメータは、過去の研究<sup>9,10,11</sup>)で扱われたモデルを参考に決定した。膜厚は $t = 75\mu m$ である。

解析モデルでは、円形張力膜の外周に半径外向き方向へ引き張り力を導入し、その後中央の回転軸を反時計回りに回転させている。この時、リンクリング現象は中央の回転軸周辺に生じる。円形張力膜への引き張り力の導入は、円形張力膜外周上の全節点に半径外向き方向に

\* 宇宙航空研究開発機構 招聘研究員・博士(工学)

\*\* 大阪府立大学 助教・博士(工学)

向かって強制変位 ( $d_1 = 108\mu m$ ) を導入することで与えた。回転軸の反時計方向への回転量は、回転軸外周上の全節点に回転軸接線方向に向かって強制変位 ( $d_2 = 0.0014m$ ) を与えることで模擬した。解析パラメータを表1に示す。

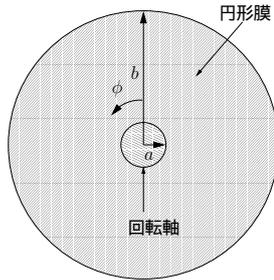


図1 解析モデル

表1 解析パラメータ

| パラメータ        | 単位          | 諸量    |
|--------------|-------------|-------|
| 回転軸半径, $a$   | [m]         | 0.05  |
| 円形膜半径, $b$   | [m]         | 0.30  |
| ヤング率, $E$    | [MPa]       | 5723  |
| ポアソン比, $\nu$ |             | 0.267 |
| 膜厚, $t$      | [ $\mu m$ ] | 75    |
| 回転角, $\phi$  | [deg.]      | 1.60  |

## 2.2 リンクリング解析法

リンクリング解析は、汎用有限要素解析プログラムFEAPpv<sup>12</sup> (Finite Element Analysis Program; personal version) を使用し、シェル理論ならびに張力場理論に基づく幾何学的非線形有限要素解析により行った。また、リンクリング解析との比較のために、膜理論に基づく幾何学的非線形有限要素解析も実施した。シェル要素、膜要素ならびに張力場膜要素は、共に4節点要素を用いた。要素分割は、円周方向に210分割、半径方向に65分割である。

膜厚方向の数値積分法は、Newton-Cotes積分を使用した。そして、中立面上の積分点の応力値を用いて、シェル要素と張力場膜要素の解析結果の比較を行った。比較を行う際、シェル要素による結果は中立面の面内応力成分のみを用いて評価した。これは、比較の対象である張力場膜要素による結果が面内応力成分のみであることと、シェル要素で得られる面外せん断応力成分が面内応力成分と比較して1/100程度以下と小さいためである。

幾何学的非線形有限要素法の定式化は、Total Lagrange法を適用したが、結果の評価に用いた応力は、第2Piola-Kirchhoff応力からCauchy応力へ変換している。解析で用いたシェル要素<sup>7</sup>、膜要素ならびに張力場膜要素<sup>6</sup>は、著者が別途FEAPpvへ追加したものである。

## シェル理論による解析法

解析で用いたシェル要素は、Mixed Interpolation of Tensorial Component (MITC) シェル要素<sup>14</sup>である。MITCシェル要素は、Assumed Strain要素の一つであり、locking free要素として広く使用されている。要素のゆがみに対する解の精度の悪化

が生じないことも特徴の一つである。

本研究は、リンクリング現象をシミュレートするにあたって、膜面の鉛直方向に初期不整量を導入した疑似分岐座屈解析を実施した。導入した初期不整は正規乱数とし、その最大値は膜厚に対して1/100程度となるように調整した。

## 張力場理論による解析法

解析で用いた張力場膜要素は、Roddeman理論<sup>4</sup>に基づく要素であり、プログラミングのアルゴリズムは秋田が提案する方法<sup>13</sup>を適用した。今回の解析モデルは、基本的にスラック領域の生じないモデルであるが、解析時における収束性を向上させるためにViscous Relaxation法<sup>15</sup>を適用している。

なお、張力場膜要素によるリンクリング解析は、薄膜の鉛直方向における初期不整量を導入せずに解析を行っている。

## 膜理論による解析法

解析で用いた膜要素は、通常シェル要素から曲げに係る項を取り除いた要素である。膜要素による解析は、初期不整を導入せず、且つ分岐解析も行っていないため、面外変位が生じない面内問題を解いている。

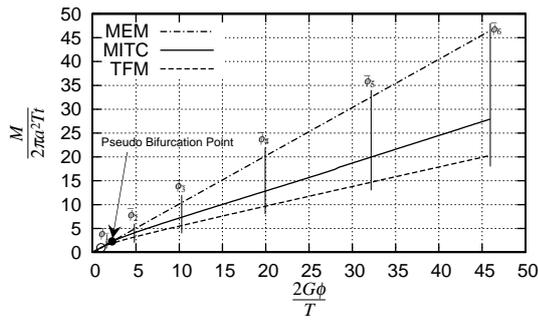
## 3. ねじり剛性とリンクル領域に関する考察

図2に、モーメントと回転角の関係を示す。同図は、円形張力膜のねじり剛性を要素タイプ毎(膜要素、シェル要素、張力場膜要素)に比較した結果である。図に示す $\bar{\phi}_1 \sim \bar{\phi}_6$ は、載荷時における薄膜の状態を検査するために参照した無次元回転角の値を示している。表2に、参照した無次元回転角 $\bar{\phi}_1 \sim \bar{\phi}_6$ を示す。また、図に示す無次元モーメントは、回転軸に隣接する要素のせん断応力を用いて計算している。

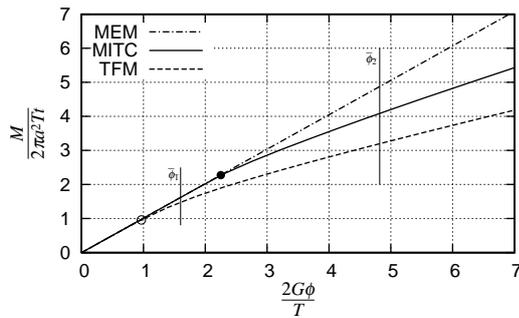
図より、膜要素による結果(MEM)は、ねじり剛性の低下が生じず概ね線形関係が成立していることが判る。これは、今回の膜要素による解析を面内問題として実施したためであり、分岐によって生じる載荷経路の移行を考慮していないためである。

一方、シェル要素(MITC)による結果は、無次元回転角( $\bar{\phi} = 2G\phi/T$ )の増加に伴いねじり剛性が急激に低下する。リンクリング現象は、この剛性低下が生じる点(疑似分岐点)で回転軸周辺に生じることになる。表3に疑似分岐点の無次元回転角、無次元モーメント、主応力線方向角ならびに最小主応力をそれぞれ示す。

張力場膜要素による結果は、シェル要素による結果と同様に無次元回転角( $\bar{\phi} = 2G\phi/T$ )の増加に伴いねじり剛性が急激に低下するが、回転軸を同じだけ回転させた際に負担するモーメントがシェル要素による結果と比較して小さい。これは、張力場膜要素が薄膜の持つ微小な曲げ剛性や圧縮に対する抵抗力を共に零と仮定するためである。その結果、同図(b)の拡大図からも判断できるように、リンクルが発生する際のモーメントもシェル要素による結果と比較して小さくなる。



(a) 全体図



(b) 拡大図

図2 無次元 $M - \phi$ 曲線

表2 参照点の無次元回転量

| 記号             | 無次元回転角 $\frac{2G\phi}{T}$ | 備考     |
|----------------|---------------------------|--------|
| $\bar{\phi}_1$ | 1.60                      | 分岐直前   |
| $\bar{\phi}_2$ | 4.82                      | 分岐直後   |
| $\bar{\phi}_3$ | 10.29                     | 分岐後    |
| $\bar{\phi}_4$ | 19.94                     | 分岐後    |
| $\bar{\phi}_5$ | 32.17                     | 分岐後    |
| $\bar{\phi}_6$ | 45.94                     | 最終ステップ |

表3 疑似分岐点の値

| $\frac{2G\phi}{T}$ | $\frac{M}{2\pi a^2 T t}$ | $\alpha$ [deg.] | $\sigma_c$ [MPa] |
|--------------------|--------------------------|-----------------|------------------|
| 2.252              | 2.274                    | 37.05           | -1.248           |

図3は、解析終了時 ( $\bar{\phi}_6$ ) における円形膜の変形図を示している。図に示すリクルは円周方向に15本発生している。図中のWrinkled Region in T.F.Tは、張力場膜要素で求められるリクル領域である。図に示すように、張力場膜要素で求められるリクル領域は、シェル要素で得られるリクルリング現象と良い対応関係にあり、その有効性が伺える。

図4にはリクル領域が拡大する状況を示している。図に示す結果は、参照点 ( $\bar{\phi}_1 \sim \bar{\phi}_6$ ) において最小主応力が0以下となる領域を示している。シェル要素による結果 (MITC) は、載荷量が大きくなるにつれ張力場膜要素による結果 (TFM) より大きくなるもののその差が小さい。したがって、張力場を仮定した薄

膜のリクル領域は、載荷の段階に関係なく実際の薄膜の最小主応力が0以下となる領域を良く表しているのが判断できる。

以上より、張力場を仮定した場合、リクル発生後のねじり剛性は実際よりも小さく見積もられるものの、リクル領域 (最小主応力が0以下の領域) は実現象をよく再現していることが判る。そこで、張力場要素の残りの解析指標である主応力線とその方向角について考察した。

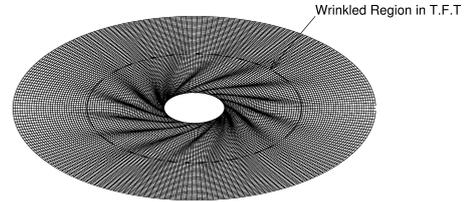


図3 変形図 ( $\bar{\phi}_6$ )

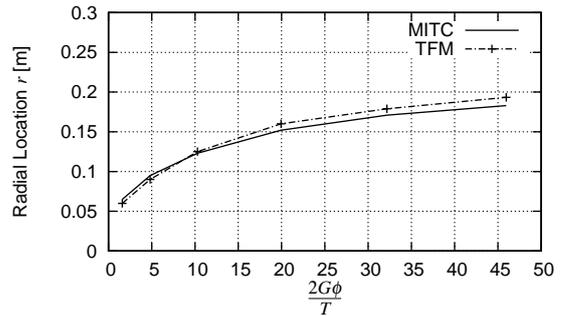


図4 リクル領域の拡大状況

#### 4. 主応力線とその方向角の生成プロセスに関する考察

図5に、主応力線とその方向角の概念図を示す。本研究で対象とする主応力線は、円形膜に生じる最大主応力の方向線であり、主応力線方向角は極座標系の半径方向と主応力線とのなす角で定めた。図中の $\alpha$ が主応力線方向角に対応する。なお、円形膜は軸対称モデルであるため、主応力線方向角は極座標系の $\theta$ 方向にほぼ一定であり、半径位置 $r$ に依存する。

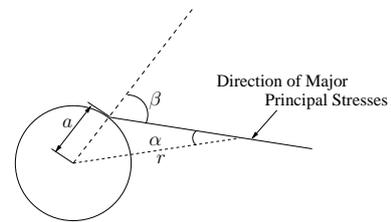


図5 主応力線とその方向角の概念図

はじめに、張力場を仮定した薄膜の主応力線とその方向角を検討するにあたって、シェル理論の立場からそれらの生成プロセスについて検討した。図6に、シェル要素で求めた主応力線方向角分布を示す。横軸は半径位置 $r$ を示し、縦軸は主応力線方向角を示している。図に示す方向角は、同一円周上 ( $\theta$ 方向) における主応力線方向角の平均値を示している。図より、リクルが発生する前の主応力線方向角 ( $\bar{\phi}_1$ ) は、半径方向に一定となっているのが判

る．しかし，分岐後，釣合経路が別の経路へ移行することによって，主応力線方向角 ( $\bar{\phi}_2$ ) は回転軸近傍 ( $r < 0.10m$ ) で増大し，回転軸遠方 ( $r > 0.10m$ ) で減少する傾向を示す．そして，載荷に伴い回転軸遠方 ( $r > 0.10m$ ) のリクル領域内の主応力線方向角は，リクル領域の拡大とともに徐々に減少していく．

一方，回転軸近傍 ( $r < 0.1m$ ) の方向角は載荷に伴い増大するものの，その変化は分岐直後の変化 ( $\bar{\phi}_1 \sim \bar{\phi}_2$  の変化) と比べて小さい．そのため，回転軸近傍の主応力線方向角は分岐直後の段階 ( $\bar{\phi}_2$  或いは  $\bar{\phi}_3$  の段階) で概ね決定されており，その後回転軸の回転量を増大させてもほとんど変化していないことが判る．また，回転軸近傍の方向角分布は， $r = 0.057m$  の位置に折れ点を有している．

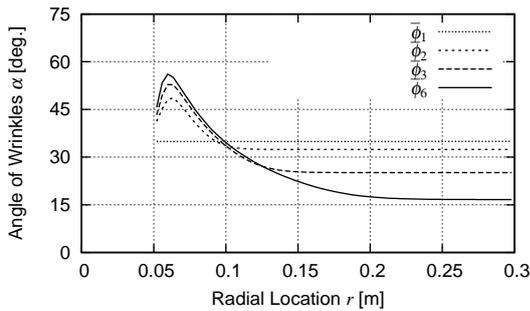


図 6 主応力線方向角分布 (シェル要素)

図7に，解析終了時における半径方向の面外変位分布を示す．縦軸の面外変位は，同一円周断面における面外変位の絶対値を平均した値であり，回転軸周辺に生じるリクル振幅の平均的な特徴を表している．図より，回転軸近傍の面外変位は，回転軸による幾何学的な拘束によって振幅が零に近づく．この時， $r = 0.057m$  の位置に折れ点が生じるが，この位置は主応力線方向角の折れ点と一致している．過去の研究<sup>7</sup>から，回転軸と折れ点までの間の領域は，座屈応力以上の圧縮応力を負担する領域であることが解析的に報告されており，主応力線方向角分布の折れ点もこの圧縮応力によって生じていると考えられる．

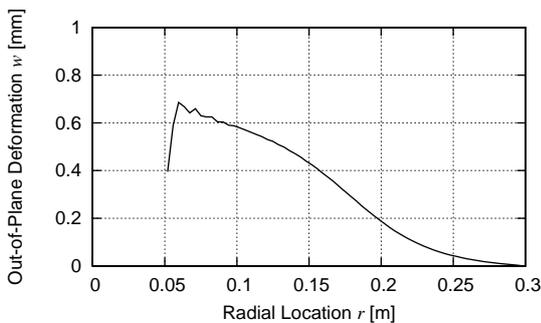


図 7 面外変位分布

図8は，回転軸直近 ( $r = 0.05m$ )，折れ点 ( $r = 0.057m$ )，回転軸近傍境界 ( $r = 0.10m$ ) ならびに回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) における主応力線方向角の履歴曲線を示している．同図は，膜要素による解析結果 (MEM) も同時に示している．図より，疑似

分岐点に達する前 (リクル発生前) の主応力線方向角は，半径位置  $r$  に関係無く同一経路をたどるが，疑似分岐点でのリクルの発生に伴い，半径位置  $r$  毎に異なる経路に移動する．そして，無次元回転角が5を越えた辺りから主応力線方向角は，回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) を除き一定値に収束しはじめる．回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) では，リクルの発生が回転軸近傍 ( $r = 0.05m \sim 0.15m$ ) と比較して遅いため，主応力線方向角の収束しはじめる回転角が大きくなっている．また，同図より回転軸直近 ( $r = 0.05m$ ) の主応力線方向角は，膜要素の結果と概ね一致しているのが判る．これは，リクルに伴う面外変位 (曲げ変形) が回転軸で拘束されることによって，回転軸直近の応力場が曲げ変形の無い膜要素と類似した応力場になるためと考えている．

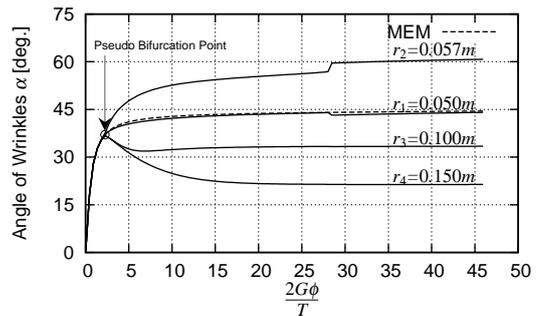


図 8 主応力線方向角の履歴曲線 (シェル要素)

次に，張力場を仮定した場合の主応力線方向角分布を図9に示す．図より，シェル理論による解析結果と同様に回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) の主応力線方向角は，リクル領域の拡大に伴い減少する．しかし，回転軸近傍 ( $r < 0.10m$ ) の主応力線方向角分布は，回転軸に近づくほど増大する傾向を示す．張力場膜要素は，リクル領域内で圧縮応力を負担しないため，主応力線が直線となり回転軸近傍ほど方向角が増大する．これは，シェル要素による結果との大きな違いの一つであり，張力場の仮定から導かれる解の特徴の一つである．

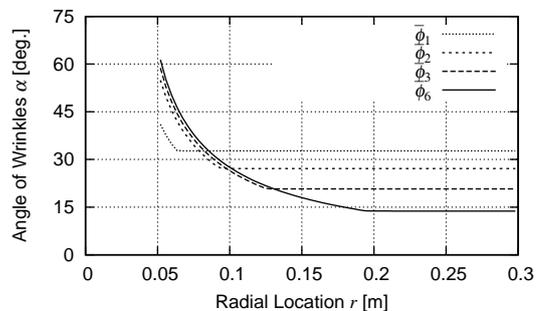


図 9 主応力線方向角分布 (張力場膜要素)

また，リクルが発生した後の主応力線方向角分布 ( $\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3, \bar{\phi}_6$ ) の変化は，シェル要素による結果と同様に小さい．したがって，張力場を仮定した場合でも回転軸近傍の主応力線方向角はリクル発生直後の段階で概ね決定されており，その後回転軸の回転量を増大させてもほとんど変化しないことが判る．

図10は、張力場膜要素における主応力線方向角の履歴曲線を示す。図より、リンクルが発生する前の主応力線方向角は半径位置 $r$ に関係なく同一経路をたどる。しかし、リンクルの発生に伴い、主応力線方向角は半径位置 $r$ 毎に異なる経路に移動する。そして、無次元回転角が5を越えたあたりから回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) を除き一定値に収束しはじめる。回転軸遠方 ( $r = 0.15m$ ) では、リンクルの発生が回転軸近傍 ( $r = 0.05m \sim 0.15m$ ) と比較して遅いため、主応力線方向角の収束しはじめる回転角が大きくなっている。これらの結果は、シェル要素による結果と同様の傾向を示している。また、リンクル発生前の主応力線方向角は、膜要素による結果と同一であることから、リンクル発生前はシェル要素、張力場膜要素ならびに通常の膜要素で同一の解が得られることが判る。

しかし、リンクル発生後の主応力線方向角を半径位置 $r$ 毎にみると、シェル要素による結果と大きく異なっている。シェル要素の場合、回転軸直近 ( $r = 0.05m$ ) の方向角は通常の膜要素と概ね同じ結果となるのに対し、張力場膜要素の方向角は、回転軸直近ほど大きくなる。これは、前述したように張力場理論が回転軸直近傍の圧縮応力を理論上再現できず、主応力線がリンクル領域内で直線となるのが原因である。張力場膜要素では、圧縮に対する抵抗力を考慮しないため、リンクル領域内において膜要素の結果と同一になる領域は存在しない。

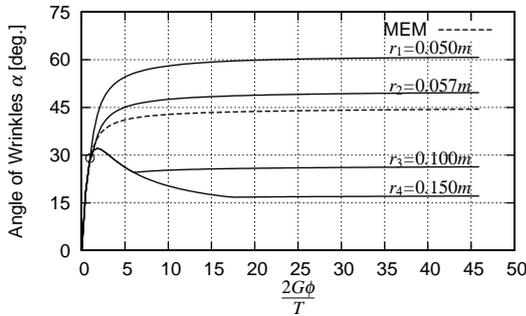


図 10 主応力線方向角の履歴曲線 (張力場膜要素)

### 5. 主応力線の直線性に関する考察

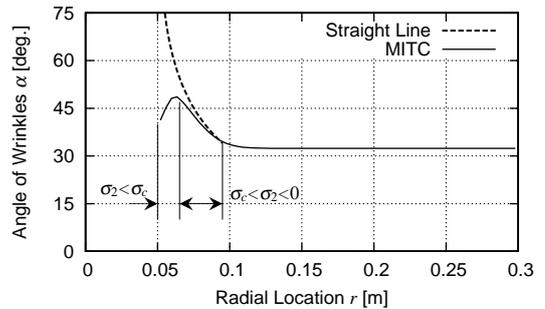
本節では、円形薄板に生じる主応力線の直線性について検討した。はじめに、張力場を仮定した薄板はリンクリング現象を一軸の引き張り応力場でモデル化する。そのため、リンクル領域内の主応力線は必ず直線となる。図5を参考にすると、張力場を仮定した薄板の主応力線方向角は、

$$\alpha = \sin^{-1} \left[ \frac{a}{r} \cdot \sin \beta \right], \quad \beta = \text{const} \quad (1)$$

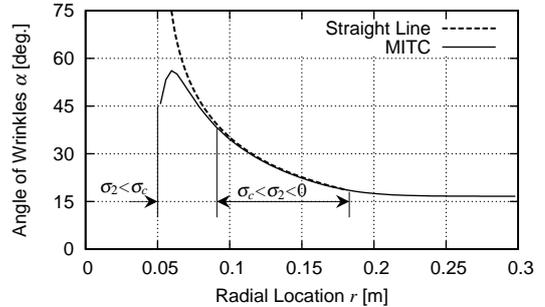
で求められ、半径位置 $r$ が小さくなるにつれ増大する傾向を示す。なお、 $\beta$ は、回転軸の回転量によって一意に決まる値である<sup>8</sup>。しかし、実際の薄板はリンクル領域内で圧縮応力を負担することにより、主応力線と直交する方向に外力が作用する。そして、リンクル領域内の主応力線は直線性を喪失する (図6参照)。そこで、シェル理論の立場から、主応力線の直線性と実際の応力場との対応関係について検討を行った。

図11にリンクル発生直後 $\bar{\phi}_2$ と解析終了時 $\bar{\phi}_6$ の主応力線方向角分布を示す。同図はシェル要素による解析結果を示しており、図中

の'Straight Line'は、主応力線が直線であると仮定した場合のリンクル領域内の主応力線方向角分布を式(1)を用いて計算した結果を示している。また、同図はリンクル領域内で圧縮応力が解放される領域 ( $\sigma_c < \sigma_2 < 0$ ) と圧縮応力を負担する領域 ( $\sigma_2 < \sigma_c$ ) が判るように表示している。図中 $\sigma_c$ は、リンクルが発生する疑似分岐点での最小主応力の値 (表3参照) である。図より、リンクル発生後しばらく経過した際のリンクル領域内の主応力線は (同図 (b))、圧縮応力が解放される領域において概ね直線となっているのが判る。しかし、リンクル発生直後のリンクル領域内の主応力線は (同図 (a))、圧縮応力が解放される領域でも直線となっていない。



(a) リンクル発生直後 ( $\bar{\phi}_2$ )



(b) 解析終了時 ( $\bar{\phi}_6$ )

図 11 主応力線方向角分布

式(2)に、主応力線方向角と応力場の関係を示す。同式は、平面応力場での釣合式を示している。張力場理論は、圧縮応力を負担しないため、式(2)の主応力比 $\lambda$ はリンクル領域内で常に零となる<sup>8</sup>。したがって、主応力比が零であることが、主応力線が直線となるための条件であり、この時幾何学的な条件として式(1)が成立することになる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\sigma_r - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\sigma_r / \sigma_1 - \lambda}{1 - \lambda}} \right], \quad \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{aligned} \quad (2)$$

図12にリンクル発生直後 $\bar{\phi}_2$ と解析終了時 $\bar{\phi}_6$ の主応力比 $\lambda$ 分布を示す。図より、リンクル発生直後は主応力比が概ね零となる領域がほとんど無いのに対し、解析終了時は主応力比が概ね零 ( $-0.02 < \lambda < 0$ ) となる領域が存在し、その領域は図11 (b)

で主応力線が直線に漸近する領域 ( $0.01m < r < 0.18m$ ; 図11参照)に対応している。これより、主応力線の直線性は最小主応力ではなく主応力比に大きく依存しているのが判断できる。図11において、リンクル発生直後に圧縮応力が解放される領域でも主応力線が直線に漸近しなかったのは、この領域の最小主応力と最大主応力が共に小さく主応力比で換算するとその絶対値が大きくなったためである。張力場理論は、リンクル領域内の圧縮応力が零であるが故に主応力線が直線となる。しかし、実際の薄膜における主応力線の直線性は、圧縮応力の値のみで評価できるのではなく、主応力比を用いて評価しなくてはならないことが判る。

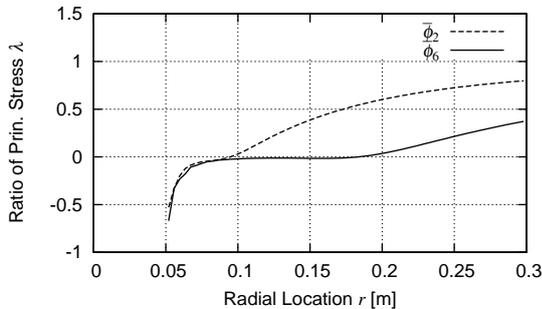


図 12 主応力比λ分布

図13に、シェル要素ならびに張力場膜要素から求まる主応力線方向角分布の比較を示す。同図は、解析終了時 $\phi_6$ の結果を示している。図に示すように、シェル要素と張力場膜要素から求まる主応力線方向角は主応力線が直線となる領域 ( $-0.02 < \lambda < 0$ )でも一致せず、シェル要素の方が張力場膜要素よりも大きい結果となっている。したがって、張力場を仮定した薄膜は、主応力線の直線性を再現することができて、主応力線方向角までは正確に再現できないことが判る。これは、張力場理論が回転軸近傍の主応力比を理論上再現することができず、その結果リンクル領域内全域の応力場を正確に求められないのが原因である。

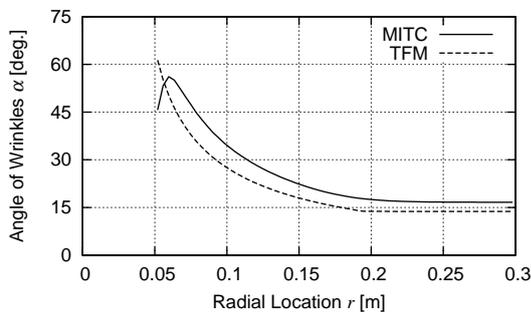


図 13 主応力線方向角の比較

## 6. まとめ

円形張力膜に生じるリンクリング現象を対象に、シェル理論の立場から主応力線とその方向角の生成プロセスについて考察した。そして、リンクリング現象の簡易解析法として広く使用されている張力場理論の解の有効性を検討した。得られた結果を以下にまとめる。

- 1) リンクルが発生する前の円形膜の最大主応力線は、半径方向

に一定の角度で生じており、直線とならない。リンクル発生前の応力場は、面内問題を解いて得られるため、シェル理論、膜理論ならびに張力場理論に基づく解析法で予測することができる。

- 2) 回転軸直近の主応力線方向角の生成プロセスは、シェル要素による結果と通常の膜要素による結果で概ね一致する。したがって、回転軸直近の応力場は、通常の膜理論で得られる平面応力場と類似した応力場が生成されている。回転軸直近では、リンクルに伴う面外変位が回転軸で幾何学的に拘束されることによって、平面応力状態に近い状態をつくり出しているためと考えられる。
- 3) リンクル領域内における主応力線の直線性に影響を与えるパラメータは、最小主応力ではなく、主応力比（最小主応力と最大主応力の比）である。そのため、リンクル発生直後は、圧縮応力が解放される領域においても主応力比の絶対値が大きく主応力線が直線とならない。一方、リンクル発生後しばらく経過した後は、最大主応力の増加に伴いリンクル領域の一部で主応力比が概ね零となり、主応力線が直線に漸近する。
- 4) 回転軸近傍の領域は、回転軸によって面外変位が拘束されるため、圧縮応力が増大し主応力比が大きくなる。その結果、主応力線の直線性が失われ、主応力線方向角が半径方向に対して急激に変化する。張力場理論は、回転軸近傍の圧縮応力場を理論上考慮できないため、この領域の主応力線方向角を予測することができない。
- 5) 張力場理論は、実際の薄膜で主応力比が零に近づく領域の主応力線の直線性を再現することができる。しかし、主応力線方向角は正確に再現することができない。これは、張力場理論が回転軸近傍の主応力比を理論上再現することができず、リンクル領域内全域の応力場を正確に求めることができないためである。

## 参考文献

- 1) 林 毅：軽構造の理論とその応用(上)、日本科学技術連盟、昭和41年
- 2) Stein, M. and Hedgepeth, J.M.: Analysis of Partly Wrinkled Membranes, NASA TN D-813, 1961.7
- 3) Mansfield, E.H.: Load Transfer via a Wrinkled Membrane, Proc. Roy. Soc. Lond., Vol. 316, No. 1525, pp.269-289, 1970
- 4) Roddeman, D.G., Drukker, J., Oomens C.W. and Janssen, J.D., "The Wrinkling of Thin Membranes: Part 1-Theory, Part 2-Numerical Analysis," Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp.884-892, 1987.
- 5) 岩佐貴史, 名取野弘, 樋口健, 古谷寛, "矩形膜のリンクリング現象に関する実験とその数値解析", 膜構造研究論文集, No.19, 2005.
- 6) 秋田 剛, "射影行列による膜面構造のリンクリング解析に関する研究", 東京大学博士論文, 2004.
- 7) Iwasa, T., Natori, M.C., and Higuchi, K., "Evaluation of Tension Field Theory for Wrinkling Analysis with Respect to the Post-Buckling Study," Journal of Applied Mechanics, Vol. 71, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, 2004.

- 8) Mikulas, M.M. : Behavior of a Flat Stretched Membrane Wrinkled By the Rotation of an Attached Hub, NASA TN D-2456, 1964.9
- 9) 宮村倫司, 半谷裕彦 : 回転応荷筒筒首に発生するしわの有限要素法による解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第481号, pp. 63-70, 1996.3
- 10) 宮村倫司, 半谷裕彦 : 面内伸びを受ける円形張力膜のしわ ポリエステルフィルムとC種膜の実験, 日本建築学会構造系論文集, 第494号, pp. 83-90, 1997
- 11) 宮村倫司, 半谷裕彦 : 面内伸びを受ける円形張力膜のしわ 有限要素法による分岐解析と実験の比較, 日本建築学会構造系論文集, 第494号, pp. 91-98, 1997
- 12) Taylor, R.L.: FEAP-A Finite Element Analysis Program Version 7.3 User Manual
- 13) 秋田 剛, 中篠恭一, 名取啓弘, “射影行列による膜面のリンクルモデル(射影行列による修正弾性行列の導出),” 日本機械学会論文集(A編), 73巻 726号, pp. 224-231, 2007.2
- 14) Bathe, K.-J., Dvorkin, E. N. : A Formulation of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components, Inter'l J. Numerical Methods in Engineering, Vol.22, 697-722, 1986.
- 15) Webster, R.L., “On the Static Analysis of Structures with Strong Geometric Nonlinearity,” Computer & Structures, Vol. 11, pp.137-145, 1980.

## Investigation on Direction of Major Principal Stresses in Stretchable Circular Membrane

Takashi Iwasa<sup>\*)</sup>

Takeshi Akita<sup>\*\*)</sup>

### SYNOPSIS

Geometrically nonlinear finite element analyses based on shell theory, membrane theory and tension field theory were carried out to discuss directions of major principal stresses in a stretchable circular membrane with a rotation hub. From the simulation results on shell theory, it was presented that the stress field around the hub in the wrinkled region are similar to the plane stress field given by the membrane theory due to the geometrical constraint on wrinkles. According to this stress field including some compressive stresses, it was clarified that the direction of the major principal stresses is drastically changed in the vicinity of the hub, and is unchanged in only wrinkled region with the negligible principal stress ratio (minor principal stress / major principal stress). In tension field theory, since the membrane can carry no compressive stresses, the direction of the major principal stresses is unchanged in any wrinkled region. As a result, tension field theory is unable to predict precisely the directions of the principal stresses within the wrinkled region around the hub as well as the wrinkled region with the negligible principal stress ratio.

<sup>\*)</sup>Dr.-Eng. Invited Scientist, Japan Aerospace Exploration Agency

<sup>\*\*)</sup>Dr.-Eng. Research Associate, Osaka Prefecture University