

膜構造の裁断図解析と静的・動的な応力・変形解析 及び発想・設計支援システムについて

本間 俊雄^{*1}
森 哲也^{*2}
坂中 玲子^{*2}

梗 概

著者らは全体座標値を直接未知量とした有限要素技術の利用により、無応力の平面上に存在する自然状態の張力材から、張力構造の静的・動的な応力・変形解析を示してきた。特に、膜構造における膜材の応力指定やコンプライアンス最小化による裁断図解析、その裁断図の状態から直接静的・動的解析結果を示した意義は大きい。本論では、設計支援システムを開発するに当たり、本方法の裁断図解析に形状指定も導入し、構造形態や指定条件の違いによる裁断図解析の差異及びケーブル補強膜構造等の裁断図解析も示すことで解析範囲を明らかにする。また、動的解析では、張力材に圧縮力が作用した際の具体的な処理方法を提示する。最後に、これらの解析方法を用いた張力構造の設計支援システム開発のコンセプトを示す。

1. はじめに

著者らは、座標値を未知量とする幾何学的非線形項を考慮したケーブル・トラス材の有限要素法による離散化式を誘導し、これらを用いた構造解析が従来の変位仮定による計算と同水準の能力があることを示してきた[1]。さらには、この定式化を膜部材に拡張し、張力構造解析一般に利用できることを示した[2]。本定式化は、張力構造のように想定形状に対し、初期形状(平面上に折り重なった自然状態)を基準として、設計曲面(初期張力導入時)、応力・変形解析(静的解析)、動的解析へと連続して解を追跡することが可能である[3]。なお、本方法は要素系から全体系に移行する際、直接全体座標値を未知量としているため、座標変換が一切いらない優位性を持つ。

本論では、変位法に属するものの、未知量を変位ではなく座標値とした有限要素法によるこの離散化定式化を用い、曲面を滑らかに被う膜シート(織布)の裁断図解析を行う。裁断図解析では、応力指定やコンプライアンス最小化を目的関数とする従来の定式化に形状指定の目的関数も加える。解析モデルは、曲率が小さなものと大きなものを採用し、モデルの違いによる裁断図の差異を示す。また、空気膜構造やケーブルを導入した膜構造の裁断図解析も試みる。動的(時刻歴応答)解析は、裁断図解析で得られたケーブル補強膜構造の形態を利用し、非抗圧材に圧縮力が作用する際の具体的な処理方法を整理して数値例を示す。最後に、これらの解析手順を採用した張力構造の設計支援システムのコンセプトをまとめる。

2. 基本式

応力 $\boldsymbol{\tau}$ とひずみ $\boldsymbol{\gamma}$ を変形後の位置ベクトル \mathbf{X} で表現した平衡方程式(システム方程式)は、仮想仕事の原理より、次式のように得られる[2,3]。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}, \lambda) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^*(\mathbf{X})^T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}) d\Omega - \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{f} : 荷重モードベクトル、 λ : 荷重パラメータ、 \mathbf{B}^* : ひずみ増分-座標増分関係行列である。ここで、ひずみ-座標関係は、次の Green ひずみを採用する。

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{ij}], \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{X_{\alpha}}{x_i} \frac{X_{\beta}}{x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2)$$

なお、 x_i ($\equiv \mathbf{x}$): 変形前の直交直線座標、 X_i ($\equiv \mathbf{X}$): 変形後の直交直線座標、 δ_{ij} : Kronecker Delta である。 $u_i = X_i - x_i$ ($\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}$) を式(2)に代入すると通常利用されているひずみ-変位関係の Green ひずみを導くことができる。

式(2)より、ひずみとひずみ増分の座標との関係は、次式のように表現することができる。

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{C} \quad (\mathbf{C}: \text{定数ベクトル}), \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^*(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} \quad (3a,b)$$

式(3)の行列・ベクトルを式(1)に導入すると変形後の座標値を未知量とする有限要素法による離散化のための基礎式になる。接線剛性行列 \mathbf{K}_t (Jacobi matrix) は、次式で与えられる。

*1 鹿児島大学 工学部 建築学科 教授 工学博士

*2 鹿児島大学 理工学研究科 建築学専攻 大学院学生

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{K}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_G(\mathbf{X}) + \mathbf{K}_S(\mathbf{X}) \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{K}_G 、 \mathbf{K}_S は各々幾何剛性行列と線形+大変位剛性行列であり、変位仮定と同形式の次式で与えられる。なお、 \mathbf{K}_S は線形項と大変位剛性項を合わせた行列であり、陽な形に2つの項へ分離することができない。

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}}^{*T} \boldsymbol{\tau} d\Omega, \quad \mathbf{K}_S(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{*T} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{X}} d\Omega \quad (5a,b)$$

動的解析では、次の幾何学的非線形運動方程式を考える。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}, \lambda^*) = \mathbf{S}(t) \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{M} ：質量行列、 \mathbf{C} ：減衰行列、 \mathbf{S} ：時間 t に依存した動的荷重ベクトル、 \mathbf{F} ：式(1)で定義された静的な平衡方程式、 λ^* ： λ の設定値 である。

3. 有限要素の離散化

採用する要素は、膜材を三角形一次要素、ケーブル材をトラス一次要素とする。各要素の座標関係は、図1、2に示す通りである。

3.1 膜要素(三角形一次要素)

図1に示すように膜材は三角形要素を採用する。仮定関数は、安定形態の直交直線座標 (X, Y, Z) を次の式で与える。

$$X = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad Y = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y, \quad Z = \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y \quad (7a-c)$$

β_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) は一般化座標、 (x, y) は自然状態における平面直交直線座標である。この式を基準に最終的な式(1)に対応する代表膜要素の離散化平衡方程式は次式を得る。

$$\frac{1}{4S_e} \begin{pmatrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \mathbf{D}_e \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) & 9 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 3 \\ + \mathbf{C}_e \end{matrix} - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (8)$$

ただし、 S_e は要素面積である。 \mathbf{D}_e は構成関係行列を表し、膜部材を直交異方性材と仮定すると次式が与えられる。

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{R}_e^T \mathbf{D}_e^* \mathbf{R}_e$$

$$\mathbf{D}_e^* = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (9a-c)$$

θ は繊維1-方向 (x' -方向) と平面座標 x とのなす角度、 E_1 、 E_2 は各々繊維方向1,2の縦弾性係数、 ν_1 、 ν_2 は各々繊維方向1,2に対するポアソン比、 G_{12} はせん断剛性である。

膜要素の接線剛性行列 \mathbf{K}_{te} は、式(4),(5)より、次のように求められる。

$$\mathbf{K}_{te} = \frac{1}{4S_e} \begin{pmatrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_e + \frac{1}{16S_e^3} \begin{pmatrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \mathbf{D}_e \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (10)$$

ここで、式(10)の第1項が幾何剛性行列、第2項が線形+大変位剛性行列である。なお、各行列・ベクトル成分を以下に示す。

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \frac{1}{8S_e^2} \begin{pmatrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) & 9 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} + \mathbf{C}_e, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 9 \times 9 & 9 \times 9 & 9 \times 9 \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

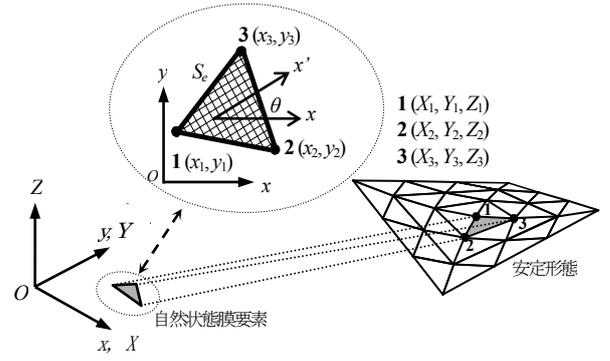


図1 膜要素の自然状態と安定形態の座標関係

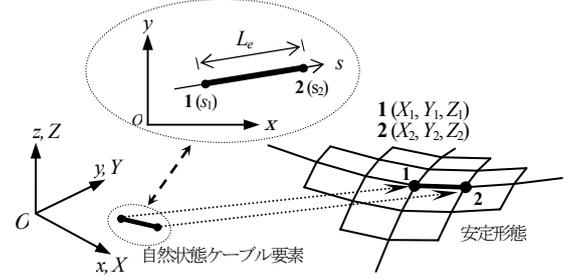


図2 ケーブル要素の自然状態と安定形態の座標関係

\mathbf{X}_e 、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} は次の内容である。

$$\mathbf{X}_e = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3]^T$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ 、 $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ とおくと、 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ 、 $a_i = x_k - x_j$ 、 $b_i = y_j - y_k$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 2, 3, 1$; $k = 3, 1, 2$)。

3.2 ケーブル要素(トラス一次要素)

ケーブル材はトラス一次要素を採用する(図2)。仮定関数は、安定形態の直交直線座標 (X, Y, Z) を次式で与える。

$$X = \alpha_1 + \alpha_2 s, \quad Y = \alpha_3 + \alpha_4 s, \quad Z = \alpha_5 + \alpha_6 s \quad (11)$$

α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) は一般化座標(未定定数)である。 s 軸はケーブル要素1-2上にとる(xy -平面上)。この式を基準に最終的な式(1)に対応する代表ケーブル要素の離散化平衡方程式は次式を得る。

$$\frac{E_e A_e}{L_e} \begin{pmatrix} 6 \times 6 & 6 \times 1 \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \times 1 \\ \boldsymbol{\tau}_e \end{matrix} + \frac{1}{2L_e^2} \begin{pmatrix} 1 \times 6 & 6 \times 6 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{G} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \times 1 \\ + \mathbf{C}_e \end{matrix} - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (12)$$

ただし、 A_e はケーブル要素 e の断面積(要素内一定)とする。ケーブル要素の接線剛性行列 \mathbf{K}_{te} は、式(10)と同様な形式で次のように得られる。

$$\mathbf{K}_{te} = \mathbf{K}_{Ge} + \mathbf{K}_{Se} = \frac{A_e}{L_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\tau}_e + \frac{A_e E_e}{L_e^3} \mathbf{G}^T \begin{pmatrix} 1 \times 6 & 6 \times 6 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{G} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \mathbf{G} \quad (13)$$

なお、各行列・ベクトル成分は以下の通りである。

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \frac{1}{2L_e^2} \begin{pmatrix} 1 \times 6 & 6 \times 6 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{G} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} + \mathbf{C}_e, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_e = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{X}_e = [X_1 \ X_2 \ Y_1 \ Y_2 \ Z_1 \ Z_2]^T$$

4. 裁断図解析の定式化

前章に説明した膜・ケーブル要素の離散化定式化を用い、膜構造における膜材の裁断図解析(最適化解析)を実施する。

4.1 最適化問題①(応力指定)

設計曲面における膜応力指定の最適化を行う。設計曲面の最適化対象要素における膜応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と想定膜応力 $\boldsymbol{\sigma}_0$ との差の平方和を目的関数とする次の問題を設定する[4,5]。

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}^*) = \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_{e0})^T (\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_{e0}) \quad (14)$$

ここで、 m : 対象となる膜材の総膜要素数、 \mathbf{x}^* : 対象となる膜材の自然状態における節点座標値情報(設計変数)である。

4.2 最適化問題②(コンプライアンス最小化)

最適化指標は、静的外力作用時の仕事量(コンプライアンス)を用いる。コンプライアンス C_{om} は、外力 \mathbf{f}^* の作用時における外力仕事であり、次式で与えられる[6]。

$$C_{om} = \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{f}^* = \sum_{e=1}^m \Delta \mathbf{X}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{X}_e \quad (15)$$

ただし、 $\Delta \mathbf{X}$: 安定形態からの節点移動量ベクトルである。 C_{om} の最小化を行うことにより、作用外力に対する変形量を最小化する。膜応力に関する制約条件を与え、 C_{om} を最小化する次の問題を設定する。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}^*) = C_{om}(\mathbf{x}^*) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\sigma}^L \leq \boldsymbol{\sigma}_e \leq \boldsymbol{\sigma}^U \quad (e=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (16a,b)$$

式(16b)は要素毎の膜応力の上下限値を既定する。

4.3 最適化問題③(形状指定)

設計者がイメージする設計原型曲面と実際に得られる釣合曲面との偏差量を最小化する以下の問題を考える。設計原型曲面は、幾何剛性項のみの線形形状解析により決定する。目的関数は、最適化対象とする釣合曲面の全体系での座標値 \mathbf{X} と決定した設計原型曲面座標値 \mathbf{X}_0 との差の平方和とする[7]。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}^*) = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_{e0})^T (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_{e0}) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\sigma}^L \leq \boldsymbol{\sigma}_e \leq \boldsymbol{\sigma}^U \quad (e=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (17a,b)$$

ここで、 n : 対象となる総節点数である。式(17a)は形状指標の目的関数である。つまり得られる釣合曲面は目標形状を満足しても、一般的に応力が滑らかな状態であるとは限らない。ここに制約条件式(17b)を与える。

4.4 最適化問題④(膜表面積・ケーブル長さ指定)

空気膜構造の裁断図解析の場合、次の問題に置き換える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{e=1}^{m_j} S_{je} - S_{Lj} \right)^2 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\sigma}^L \leq \boldsymbol{\sigma}_e \leq \boldsymbol{\sigma}^U \quad (e=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (18a,b)$$

S_{je} は j 膜材ピースの膜要素 e の面積、 S_{Lj} は j 膜材ピースの指

定面積である。 S_{Lj} を逐次増加させ、目標のライズにする。

境界ケーブルが存在するサスペンション膜構造では、線形解析などで得られた j ケーブルの長さ l_{Lj} を指定する次の問題を想定する。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \left(\sum_{e=1}^{k_j} \ell_{je} - \ell_{Lj} \right)^2 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\sigma}^L \leq \boldsymbol{\sigma}_e \leq \boldsymbol{\sigma}^U \quad (e=1, 2, \dots, m) \\ & N^L \leq N_e \leq N^U \quad (e=1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (19a-c)$$

ℓ_{je} は j ケーブルの要素 e の部材長である。式(19b,c)は要素毎の膜応力及びケーブル軸力の上下限値を既定する。

5. 非抗圧材の圧縮力が作用したときの処理方法

膜やケーブル等の張力材に圧縮力が発生する際、張力材は非抗圧材であるため、圧縮力を許容することができない。特に、動的解析のとき、許容できない応力を処理する確立した方法が要求される。ここでは、最も単純な圧縮力処理方法を採用し、具体的な手順を説明する。基本は、膜・ケーブル材共に剛性を低下させる剛性変化法である[8]。

5.1 膜材の処理

圧縮力が作用する膜要素の最大主応力方向を基準とした構成関係行列 $\hat{\mathbf{D}}$ を次式のようにおく。

$$\hat{\mathbf{D}}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{T}_e, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

最小あるいは最大主応力が負、すなわち圧縮力が作用する場合、次のように剛性成分の一部を低減させて再計算を行う。

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{T}_e \hat{\mathbf{D}}_e \mathbf{T}_e^T, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \xi d_{11} & \mu d_{12} & \mu d_{13} \\ \mu d_{21} & \eta d_{22} & \mu d_{23} \\ \mu d_{31} & \mu d_{32} & \zeta d_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{T}_e : 膜主応力方向を考慮した座標変換行列であり、 η, μ, ξ, ζ は応力状態により与える係数である。最小主応力が負、最大主応力が正のとき $\eta=0.01, \mu=0.0, \xi=1.0, \zeta=1.0$ を設定する。この操作後の再計算で最小主応力が負のままであるとき、 $\zeta=0.1$ とする。最大主応力が負のときは、 $\eta=0.01, \mu=0.0, \xi=0.01, \zeta=1.0$ とおく。なお、通常の応力状態は $\eta=\mu=\xi=\zeta=1.0$ である。

5.2 ケーブル材の処理

ケーブル要素軸力 N_e が負のとき、軸剛性を単純に $1/100$ とする。なお、ケーブル構造のみの解析では、計算が不安定になることがあるため、取扱に注意が必要である。通常、連立一次方程式を解く際、間接法である反復計算法系の解法を採用する。

5.3 計算アルゴリズム(動的計算)

ここでは動的計算のアルゴリズムを示す。計算手順は、図3の通りである。図中の予測子・修正子計算は、非線形計算で用いられるニューマーク法の手順である[9]。注意すべき点は、膜要素・ケーブル要素の主応力・軸力に対する負の判定基準を、

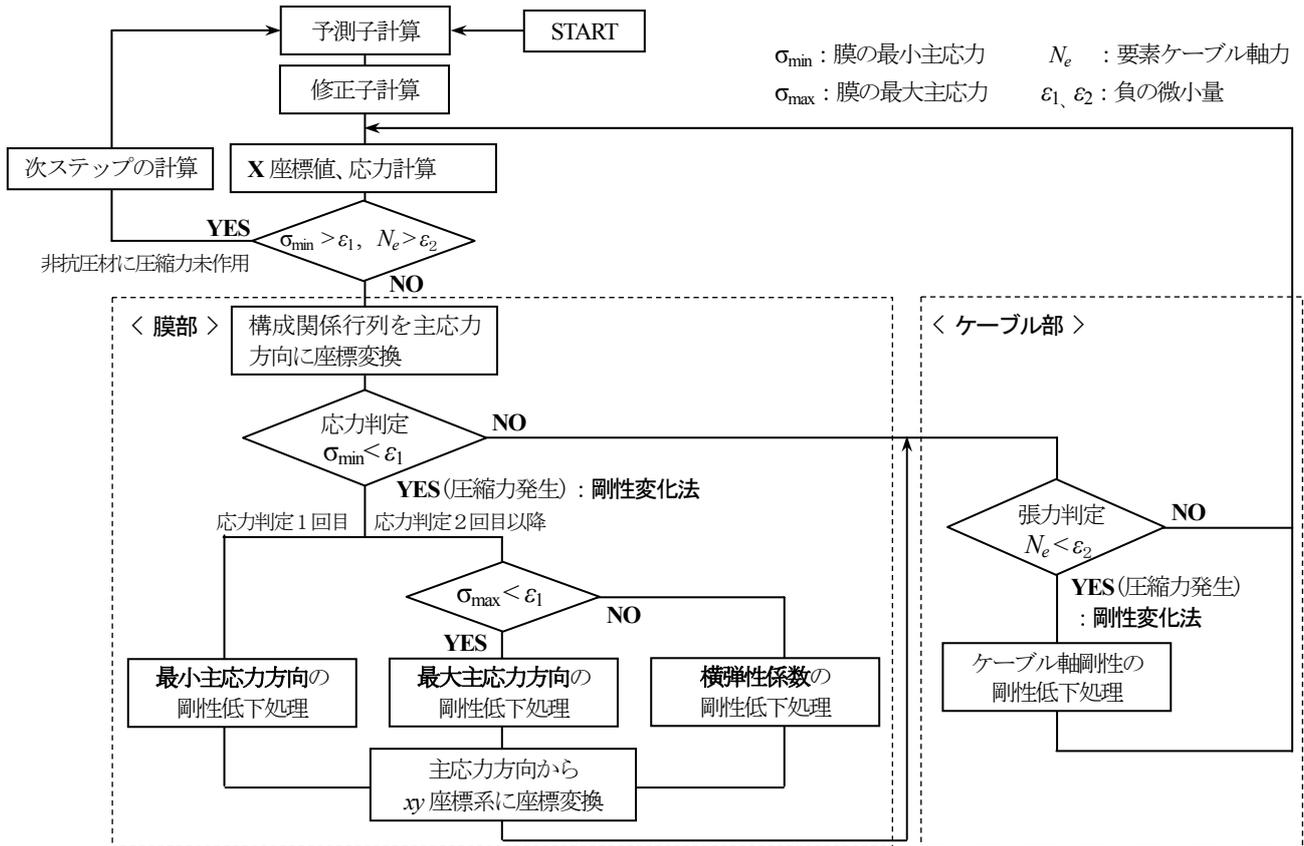


図3 張力構造における動的計算のアルゴリズム(剛性変化法を導入したニューマーク法)

0.0(零)とするのではなく、張力オーダーの 1/1000~1/10000 を目安にした微小な負の値以下を圧縮力が作用したと判断することである。0.0 を負の判定基準にすると数値的に不安定な状況が発生する場合がある。なお、静的計算においても、図 3 に示した剛性変化法の導入を基本とする。

6. 解析モデル

採用した膜とケーブルの材料定数は表 1 に示す膜材 2 種、ケーブル材 1 種を採用する[10],[11]。解析モデルは、図 4~7 に示す Model-A から-D の 4 つとする(単位 mm)。各図 a 部は解析モデルの鳥瞰図である。図 b 部は、膜ピースの接続情報であり、対称性からグレイ領域部のみを解析対象としている。図 c 部は、b 部グレイ領域部膜材の初期裁断図である。各モデルに種々の応力レベルを設定し、解析を行う。なお、自然状態の膜材ピースにおける内部節点は設計変数にしない。また、繊維 1-方向と平面座標とのなす角度は、 $\theta = 0$ とする。

Model-A, -B において、図 4, 5.c 部に示す平面上の初期裁断

図をそのまま縫合すると構造形態を構成させる曲率の違いから、Model-A は比較的滑らかに貼ることができ、Model-B は応力集中が顕著となる。この二つの解析モデルにおいて、曲率の違いにより最適化問題①~③の解析を実施し、得られた裁断図の差異を比較する。

Model-C(図 6)は空気膜構造のモデルである。このモデルは、最適化問題④膜構造の膜材ピース毎の表面積を目的関数とした問題により、裁断図を計算する。

Model-D(図 7)は、ケーブル補強サスペンション膜構造の最適化問題④のケーブル長さを目的関数とした問題にすることで裁断図計算をする。引き続き、Model-D の裁断図解析の結果を用い、ケーブル補強サスペンション膜構造の動的解析を行う。

7. 数値解析結果

7.1 サスペンション膜構造の裁断図解析

Model-A, -B を用いた解析結果を示す。膜材は、表 1 に示す

表 1 膜・ケーブル材の材料定数表

材種	膜-I [10]	膜-II B [11]	ケーブル[11]
膜厚・ケーブル断面積	$t=0.8\text{ mm}$	$t=0.8\text{ mm}$	$A=210.0\text{ mm}^2$
縦弾性係数	$E_x \cdot t=213.8, E_y \cdot t=645.3\text{ (N/mm)}$	$E_x \cdot t=980.7, E_y \cdot t=686.7\text{ (N/mm)}$	$E=1.373 \times 10^5\text{ (N/mm}^2\text{)}$
ポアソン比	$\nu_{xy}=0.3, \nu_{yx}=0.9055$	$\nu_{xy}=0.63, \nu_{yx}=0.45$	—
せん断剛性	$G_{xy} \cdot t=55.9\text{ (N/mm)}$	$G_{xy} \cdot t=63.74\text{ (N/mm)}$	—
単位質量	$1.215 \times 10^{-6}\text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$1.275 \times 10^{-6}\text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$5.688 \times 10^{-4}\text{ (kg/mm)}$

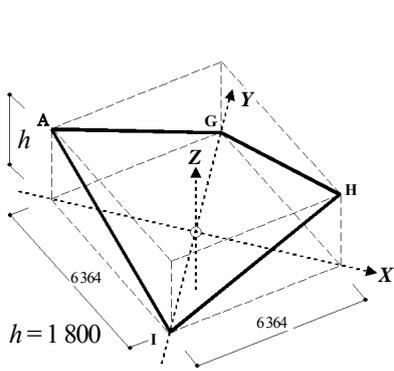


図 4.a 解析モデル Model-A

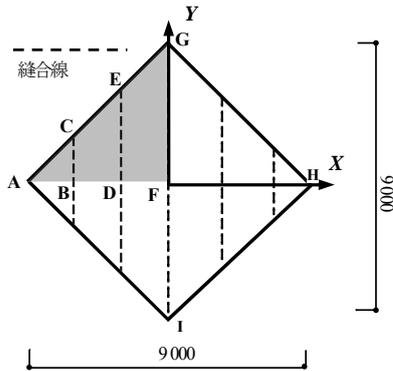


図 4.b 膜帯接続情報 Model-A

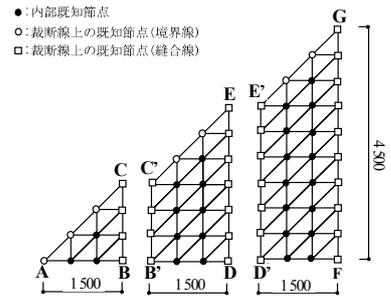


図 4.c 要素分割モデル Model-A

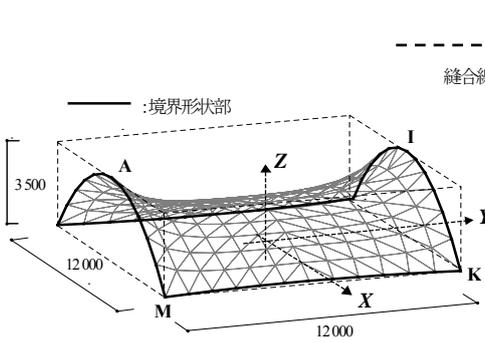


図 5.a 解析モデル Model-B

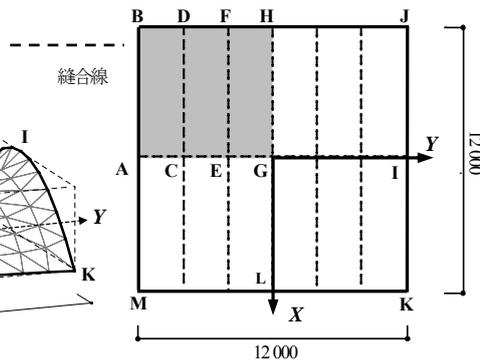


図 5.b 膜帯接続情報 Model-B

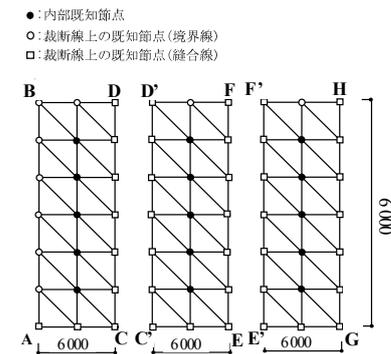


図 5.c 要素分割モデル Model-B

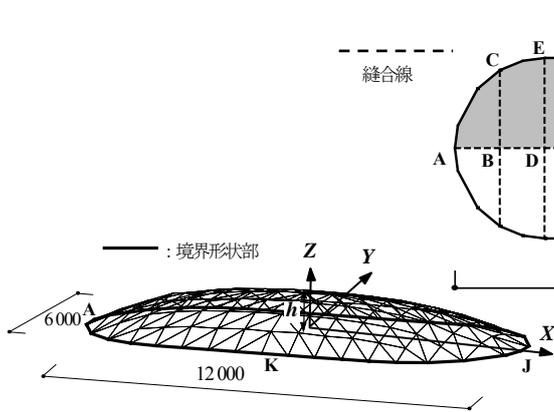


図 6.a 解析モデル Model-C

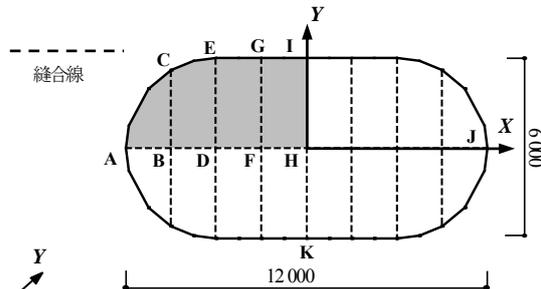


図 6.b 膜帯接続情報 Model-C

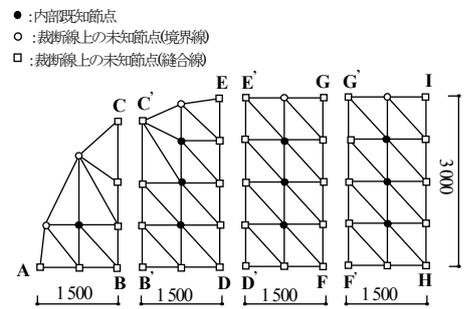


図 6.c 要素分割モデル Model-C

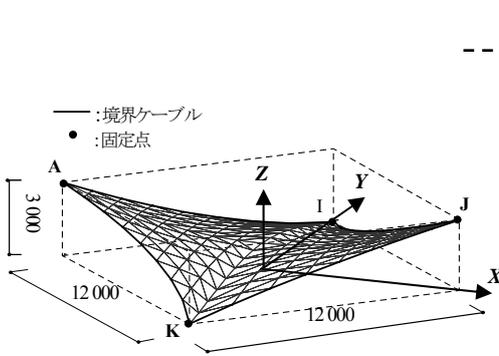


図 7.a 解析モデル Model-D

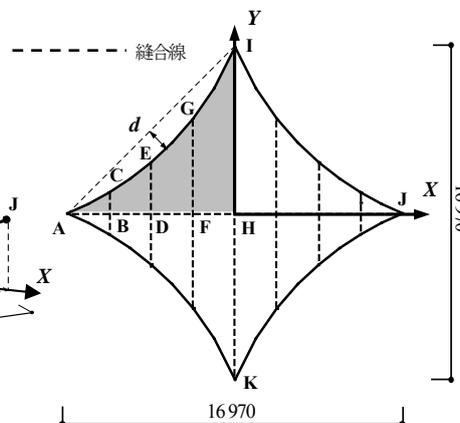


図 7.b 膜帯接続情報 Model-D

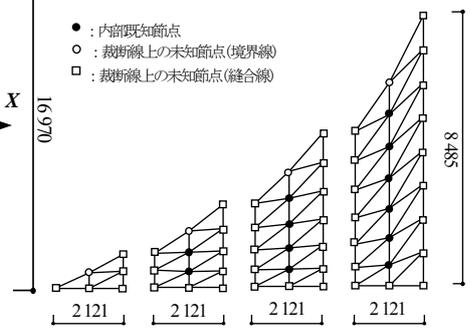


図 7.c 要素分割モデル Model-D

膜-Iを用いる。境界条件は、外周部を固定とした曲面を有する膜構造モデルである。Model-Aの境界は直線とする。Model-Bの境界はM-A-B, M-Kライン共に二次曲線と与える。解析は各モデルの対称性より、図4, 5.b部に示すグレイ領域(全体の1/4)で行った。要素分割モデルは図4, 5.c部に示す(Model-A:節点数55,要素数81, Model-B:49節点,72要素)。裁断図の決定では、自然状態の膜材ピースにおける内部節点を固定し、裁断線(ピース境界部)を設計変数とする。なお、裁断線の平滑化と設計変数の低減を図るため、裁断線は3次スプライン曲線を利用する[12]。図8,9の解析結果は、Model-Aと-Bの表示内容を対応させて図番記号を一致させている。初期裁断図による釣合形状と応力状態(主応力図)はそれぞれ図8,9.a,cに示している。また、各最適化問題①~③の結果図は、図8,9.d,e,f部の左より最適裁断図による釣合形状図、最適裁断図、主応力図と並べた。裁断図は、破線が初期裁断図、実線が最適裁断図である。なお、形状と応力のデータ比較は、付図1,2及び付表1,2にまとめた。

[最適化問題①]

本問題では、準ニュートン法により裁断図を求める。目標応力値は $t\sigma_x$ (x-軸垂直応力) = $t\sigma_y$ (y-軸垂直応力) = 12.0 N/mm , $t\tau$ (せん断応力) = 0 N/mm とする。解析結果は図8,9.dにまとめた。

[最適化問題②]

制約条件付き最適化手法では、逐次2次計画法(SQP法)を用いる。制約条件は次式とする。

$$8.0 \leq t\sigma_x, t\sigma_y \leq 16.0 \text{ (N/mm)} \quad (22)$$

外力は釣合形状の全内部節点に鉛直下向き(一節点に $P = 5.0 \text{ N}$)に作用させる。解析結果は図8,9.eに示す。外力作用後の形状は変位を1000倍にして表示する。

[最適化問題③]

初期裁断図に構造条件を与え、幾何剛性項による線形形状解析を行い、得られた形状を目標形状と設定する。ここではAIラインを目標形状としている。最適化手法にはSQP法を採用する。制約条件は次式の通りである。

$$8.0 \leq t\sigma_x, t\sigma_y \leq 16.0 \text{ (N/mm)} \quad (23)$$

解析結果は図8,9.fに示す。

7.2 空気膜構造の裁断図解析

空気膜構造の裁断図解析のモデルは、Model-C(節点数39,要素数55)を用い、式(18a,b)による最適化問題とする。ここでは、解析モデル図6.aの $h = 1000 \text{ mm}$ (ライズ)を指定した。膜材は、表1に示す膜-Iを採用する。境界条件は、外周部を固定境界とし、内圧 30 mmAq 作用時の形態を想定する。膜応力の範囲は次の通りである。

$$1.0 \leq t\sigma_x, t\sigma_y \leq 1.5 \text{ (N/mm)} \quad (24)$$

解析結果は図10に示す。左から最適裁断後の形状、最適裁断図、最適裁断図を用いた主応力図である。裁断図では破線が初期裁断図、実線が最適裁断図である(形状・応力データは付図3,付表3に示す)。ただし、このモデルの解析は、Model-A,

-Bのように簡単な手順では計算できない。目標形状を得るため、指定膜材ピース面積 S_d を、初期裁断図の膜面積から内圧力を調整させながら徐々に増加させ、段階的に内圧 30 mmAq 作用時の最終ライズに近づけている(8段階に分割)。なお、初期裁断図からは、 $h = 1000 \text{ mm}$ の曲面が構成できないため、初期裁断図による釣合形状と主応力図は示していない。

7.3 ケーブル補強サスペンション膜構造の裁断図解析

ケーブル補強サスペンションの解析モデルは、Model-D(節点数45,要素数:膜要素64,ケーブル要素8)とする。各部材は表1の膜-IIとケーブルを用いる。最適化問題は式(19a,b)による。解析モデル図7.bの三角形HAIにおいて、節点Hより直線AIに垂線を降ろした足の長さの1/10を同じ垂線上の直線 $d = 1200 \text{ mm}$ とするケーブル長さを指定した(図7.b参照)。境界条件は、各頂点A, I, J, Kを固定する。膜応力とケーブル軸力の制約条件は次の通りである。

$$5.0 \leq t\sigma_x, t\sigma_y \leq 7.0 \text{ (N/mm)} \quad (25)$$

$$55.0 \leq N \leq 65.0 \text{ (kN)} \quad (26)$$

解析結果は、図11.a,bに初期裁断図による釣合形状と主応力図を示す。図11.cは最適裁断図による釣合形状と裁断図及び釣合状態の主応力図である。釣合形状と応力状態の比較データは、付図4,付表4に示す。

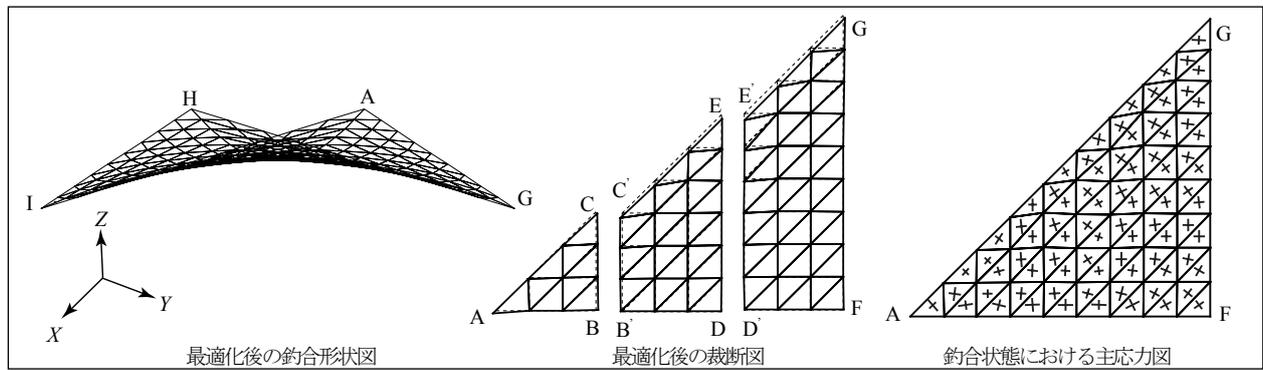
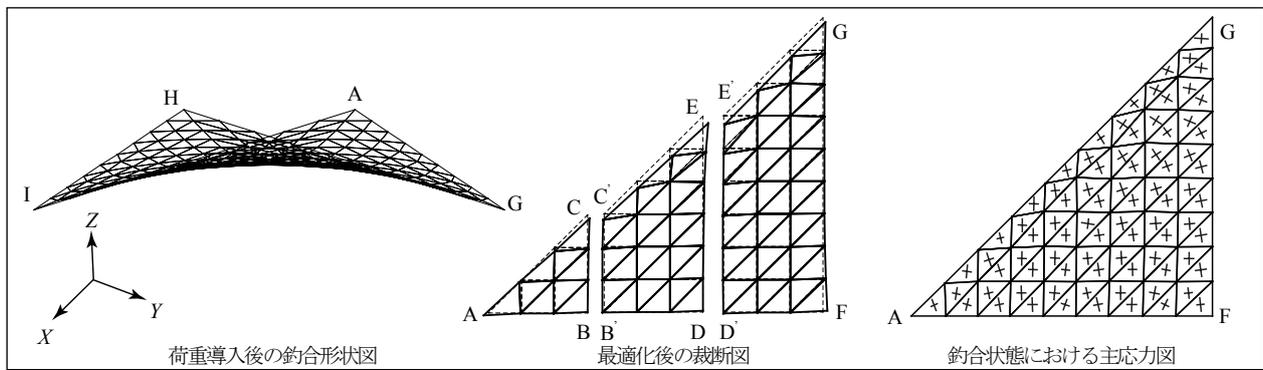
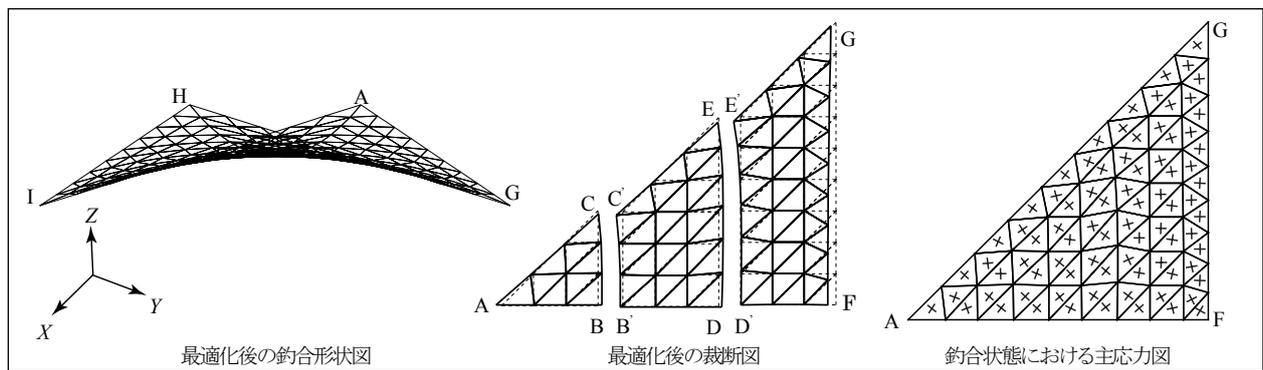
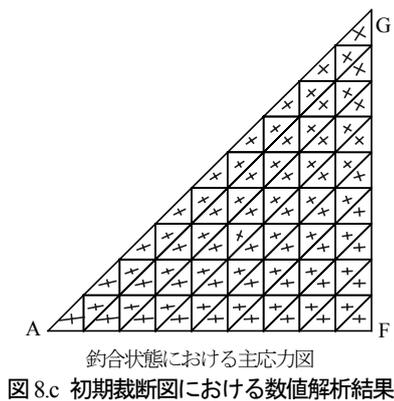
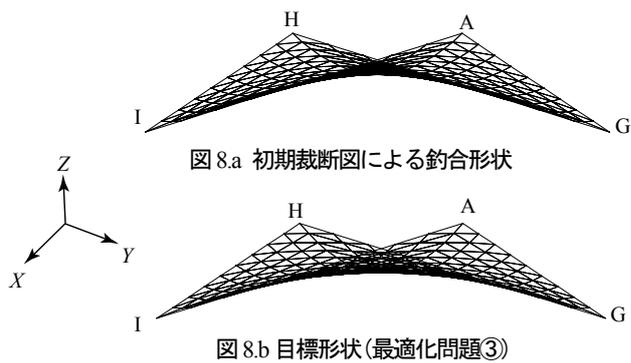
7.4 動的解析(時刻歴応答解析)

ここでは、Model-Dの裁断図解析から得られた釣合形態を用いる。図11に示す平面上に存在する裁断図を解析データとし、図3に示した非抗圧性処理能力を確認する。運動方程式(6)の減衰項は無視した。ニューマーク法の計算パラメータは $\beta = 0.25, \gamma = 0.5$, 時間刻み $\Delta t = 0.01 \text{ (sec)}$ とする。動的外力はピンクノイズより作成した図12の単位 m^2 当たりの荷重を膜面の法線方向に作用させる(0-50sec)。数値結果は、図13に示す膜・ケーブル要素を取りあげ、非抗圧材の処理内容を確認するため、意味がある挙動を示す範囲で膜部材主応力とケーブル部材軸力の時刻歴応答波形を図14に示す。

8. 評価

著者らは、張力構造解析に対する座標値を直接未知量にする基本的な離散化定式化を行い、応力指定とコンプライアンス最小化の最適化をサスペンション膜構造の裁断図解析に適用し、連続して動的解析を示してきた[3]。本論では、その方法を用い、厳しい条件のモデルを加えて、制約条件の範囲を種々変えた解析結果及び形状指定の裁断図解析を示し、それらの数値結果を比較した。さらに、膜面積やケーブル長さを指定する最適化問題の設定により、空気膜構造やケーブル補強サスペンション膜構造の裁断図解析も示すことができた。動的解析では張力材に圧縮力が作用しない外力レベルの低い結果のみを示してきたが、ここでは、圧縮力作用時の処理について、剛性変化法を導入した数値解析上安定となる計算手順を紹介し、数値結果例を示した。これらの考え方と数値例により、本方法は、平面上にある膜材ピースを基準に、一般の膜構造の裁断図解析と動的解析が、数値解析上安定した状

Model-A の解析結果



Model-B の解析結果

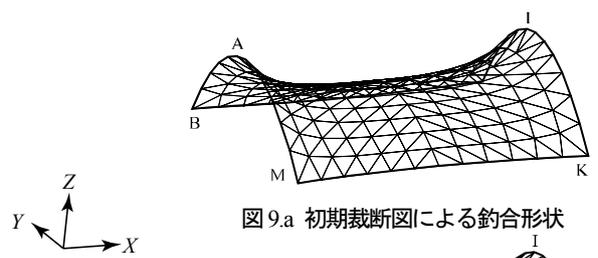


図 9.a 初期裁断面による釣合形状

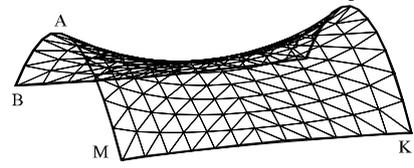
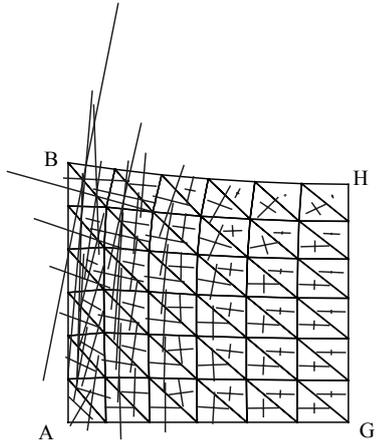


図 9.b 目標形状(最適化問題③)



釣合状態における主応力図

図 9.c 初期裁断面における解析結果

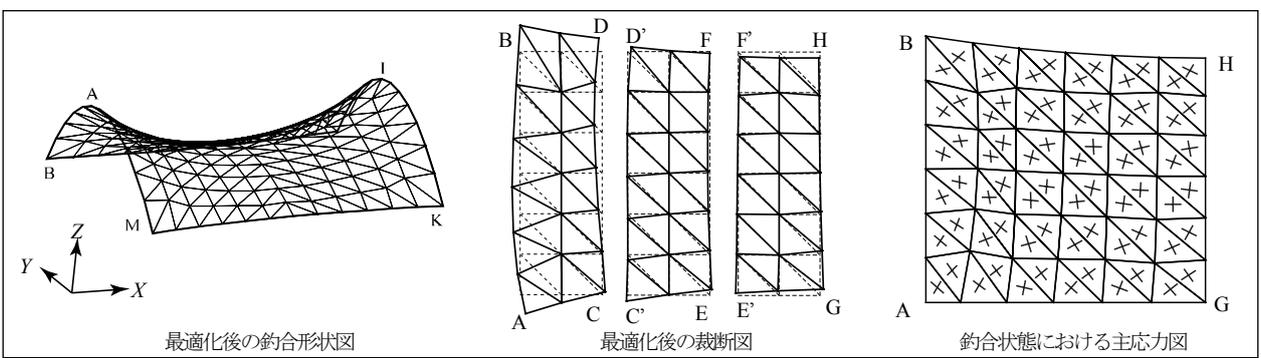


図 9.d [最適化問題①]における解析結果

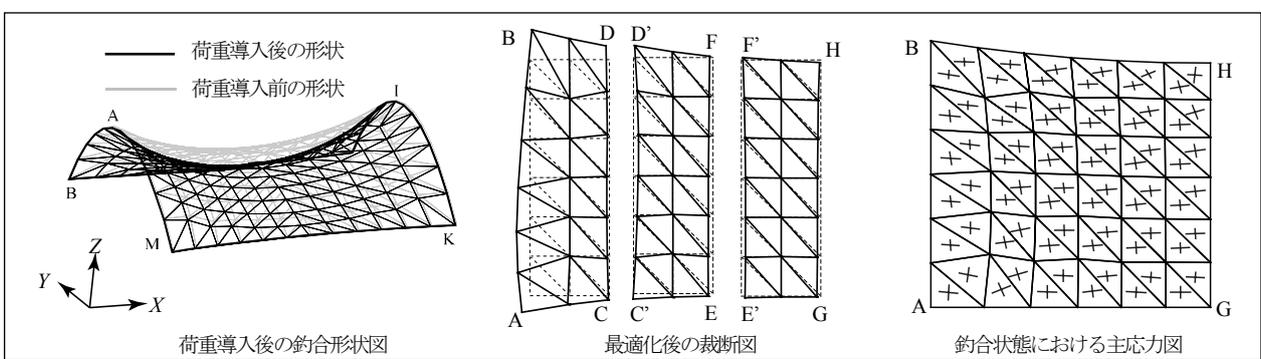


図 9.e [最適化問題②]における解析結果

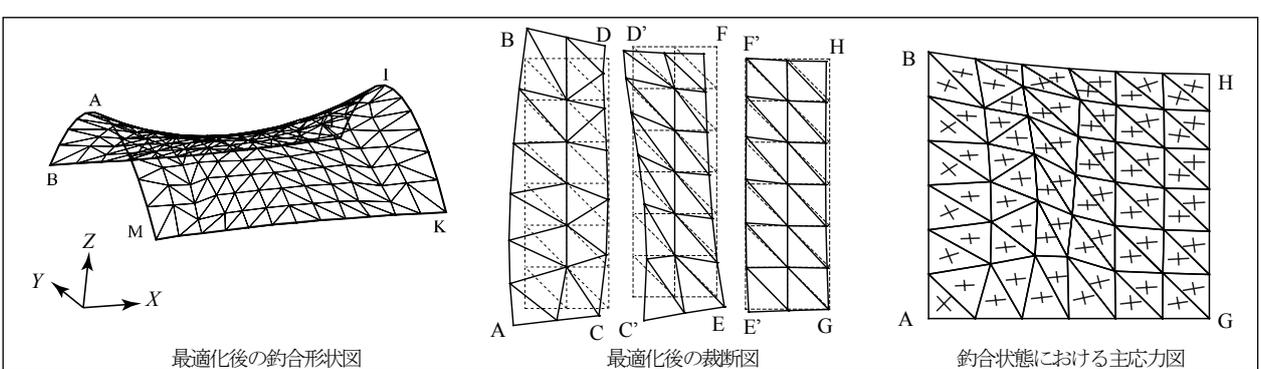


図 9.f [最適化問題③]における解析結果

Model-C の解析結果

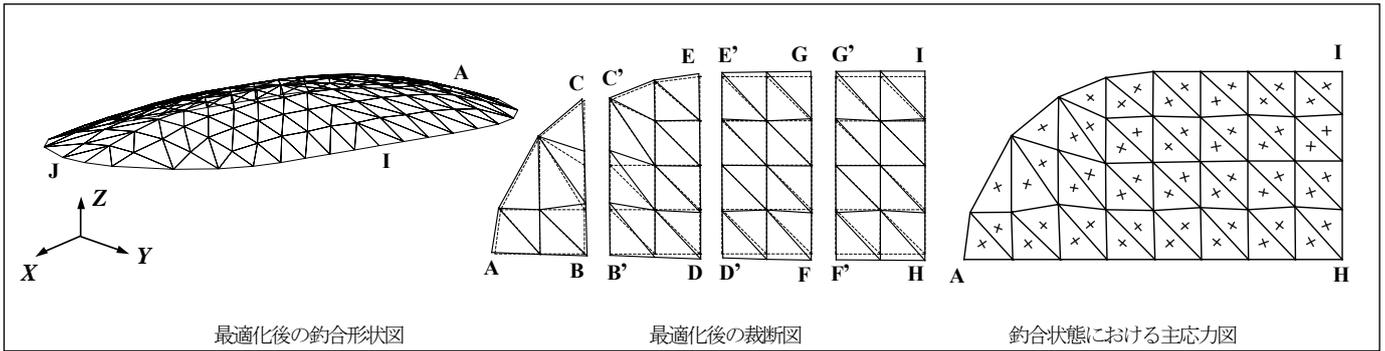


図 10 [最適化問題④]における解析結果(空気膜構造モデル)

Model-D の解析結果

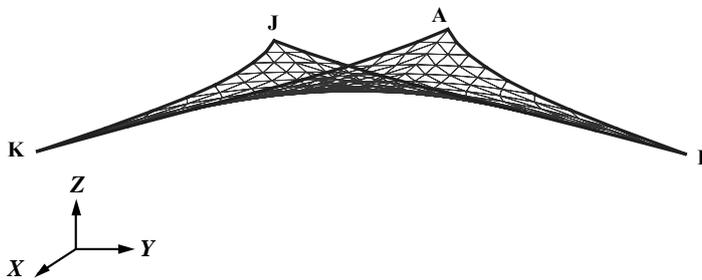


図 11.a 初期裁断面による釣合形状

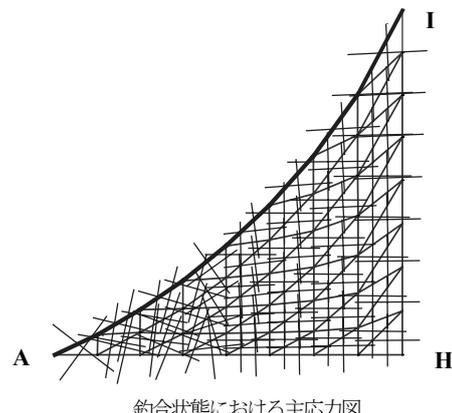


図 11.b 初期裁断面における数値解析結果

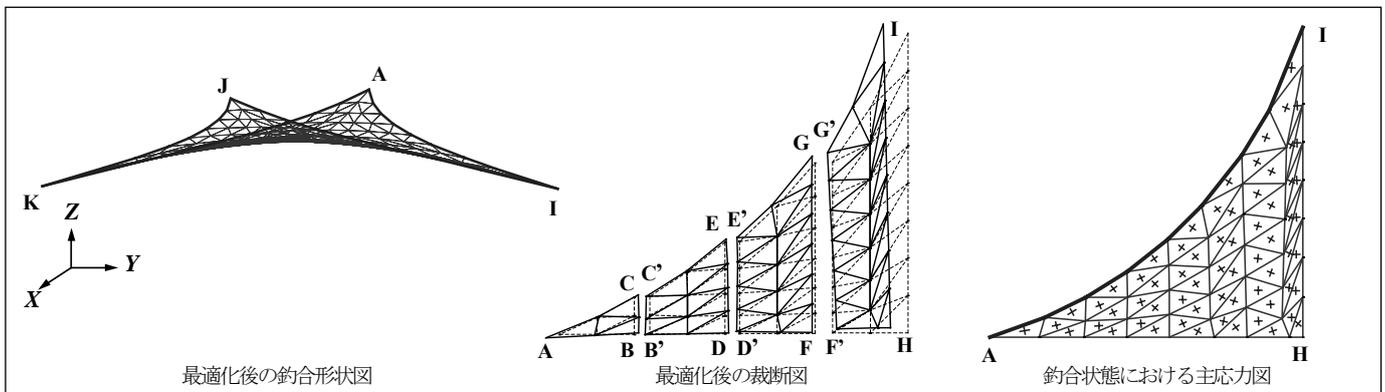


図 11.c [最適化問題④]における解析結果(ケーブル補強サスペンション膜構造)

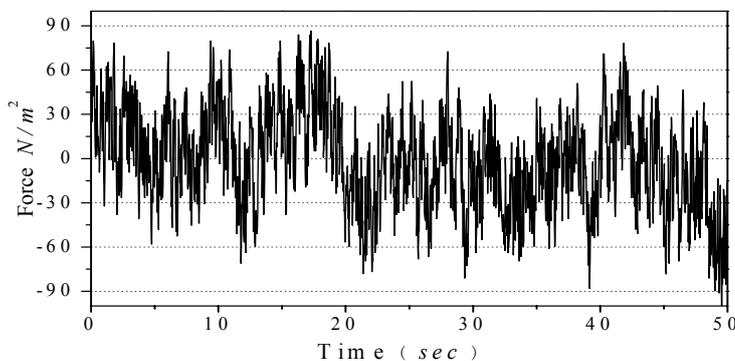


図 12 時刻歴応答解析用想定風外力 N/m^2

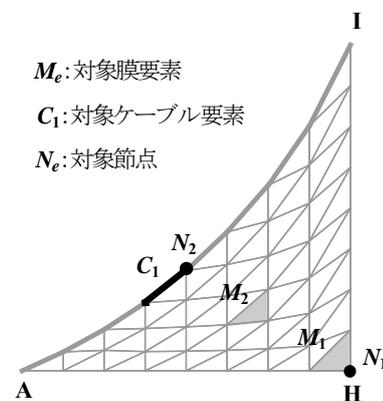


図 13 時刻歴応答解析出力結果の膜・ケーブル要素・節点位置

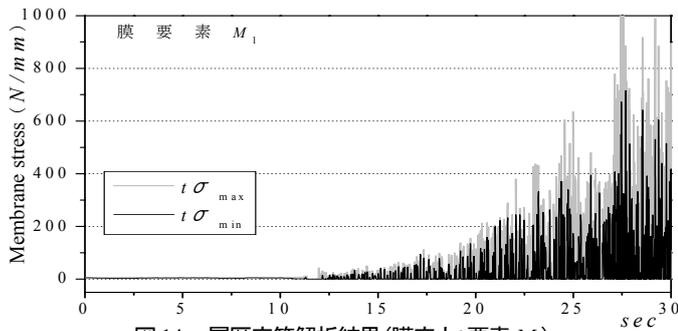


図 14.a 履歴応答解析結果(膜応力:要素 M_1)

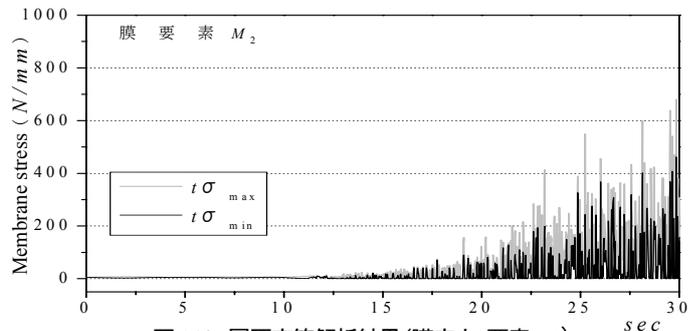


図 14.b 履歴応答解析結果(膜応力:要素 M_2)

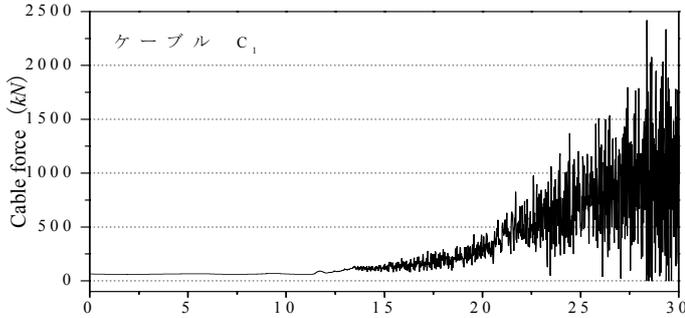


図 14.c 履歴応答解析結果(ケーブル軸力:要素 C_1)

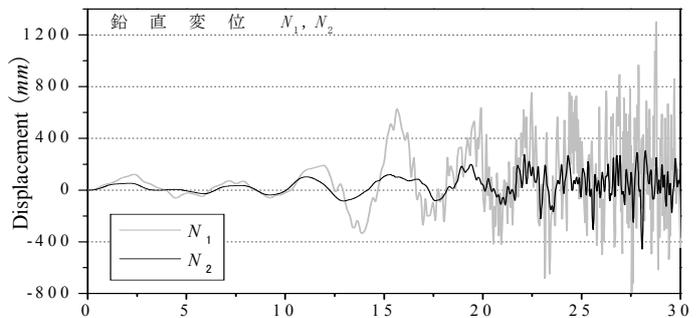


図 14.d 履歴応答解析結果(節点変位: N_1, N_2)

況で実行することが可能であることが判る。

9. 発想・設計支援システム開発のコンセプト

張力構造は初期状態が形状不確定な不安定状態で存在する。そのため通常の構造設計で実施される応力-変形解析を行う前に、上述した初期形状解析や裁断図解析等、張力構造物特有の解析が必要となる[11]。一般に意匠デザイナーのイメージする形状は力学的釣合状態を満たさない場合も考えられ、張力構造物を実空間内に形成する際、多くの問題が生ずる。つまり、デザイナーの自由な発想は、最終的に構造計算の結果に依存せざるを得ない。

このようなデザインと構造設計の間を埋めるため、文献[13]では、線形解析を用い、張力構造の初期形態を支援する考え方を示した。線形解析と幾何学的非線形解析の結果は、形状イメージに限定すれば大きな差がなく、初期値から、CG (computer graphics) によるイメージ確認ができる発想・設計支援システムの試作システムを紹介している。文献[14]では、線形解析に本論文で示した解析方法を用いて、デザインと構造設計を結びつけたシステム構築の試みを紹介している。

ここでは、上述の離散化手法による最適化計算を用い、デザイナーの発想を支援し、かつ張力構造の最終設計形態が決定できる統一した流れを示す。

図 15 は著者が考える張力構造のシステム概念図である。図の左半分が文献[13]で示した形状イメージを発生させる部分である。GUI (graphic user interface) の利便性を考慮し、操作性を配慮することで、デザイナーに負荷が発生しないシステム設計を考える必要がある。解析は幾何剛性項のみの線形範囲なので、計算上解が発散することなく自由な発想が反映させられる。ただし、初期値から極端に形態が変化すると構造設計に移る際に無理が生じる。

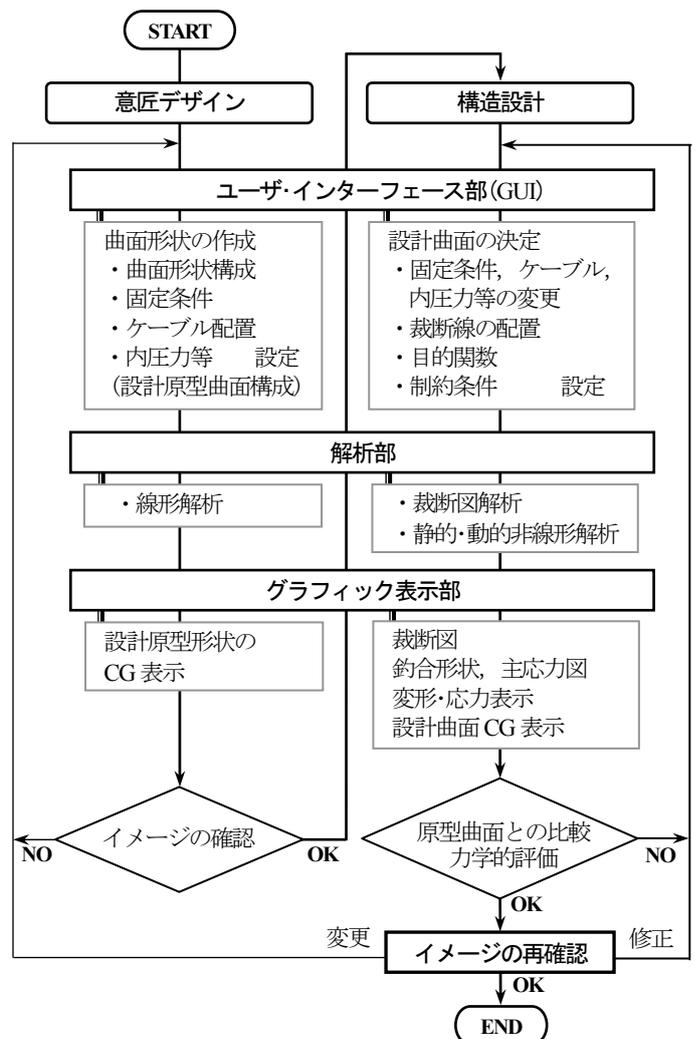


図 15 張力構造の発想・設計支援システム概念図

図 15 右半分が前章までに示した方法による非線形解析部分である。定型(矩形等)の境界形状においては開発が終了している[14]。しかし、自由な発想を支援するためには、任意形態が構成できるようにしなければならない。なお、構造設計において、解析部は非線形計算であるため、数値解析上の特性を把握しておくことが重要である。

10. まとめ

本論では、座標値を直接未知量とすることで、有限要素技術による離散化定式化を示し、平面上にある膜材ピースより、最適化問題に置き換えてサスペンション膜構造、空気膜構造、ケーブル補強膜構造の裁断図解析を示した。さらには得られた裁断図より、接合情報を導入し、裁断図の情報を基準に動的解析を示した。動的解析において、膜材及びケーブル材に圧縮力が作用した際は、剛性変化法を導入した具体的な解析手順を示した。最後に、これらの解析方法を採用した張力構造の発想・設計支援システムの考え方を紹介した。以上により、安定した張力構造解析の一つの解析手順の流れを示すことができたと考えている。

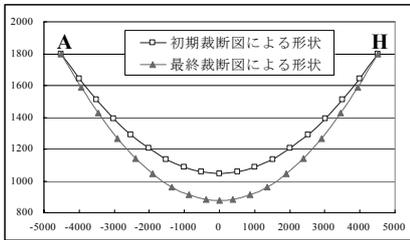
今後、解決すべき問題は、要素分割数を押さえた溶着部の剛性評価、ケーブル・膜の滑り解析、空気膜構造の動的モデルの構築、材料非線形性等の導入、多次元の風速変動荷重による解析、減衰評価、フレーム・連続体と一体となった解析が想定される。著者らは本方法を基本にこれらの問題を順次解決させ、実モデルを対象としたシステム構築を目指したい。

謝辞 九州大学教授 前田潤滋博士には風荷重についてコメントを頂きました。また、鹿児島大学理工学研究所建築学専攻 矢山正大君の協力を得ました。ここに深謝致します。

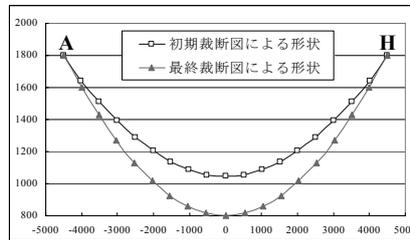
参考文献

- [1] Honma,T, Ataka,N. : Geometrically Nonlinear Structural Analysis by FEM Using the Coordinate Value on a Deformed Body, Information, 7(5), 569-584, 2004
- [2] 本間俊雄, 安宅信行: 座標値を未知量とした有限要素法による張力構造の解析と評価, 膜構造論文集, 18, 15-21, 2005
- [3] 本間俊雄, 合田雄策, 安宅信行: 座標値を未知量とした有限要素技術による張力構造解析の二方法, 日本建築学会構造系論文集, 602, 161-169, 2006
- [4] 大崎純, 上谷宏二, 高谷真次: 逆問題型手法による膜構造の目標形状・応力トレードオフ設計法, 日本建築学会構造系論文集, 395, 107-115, 1996
- [5] 八木孝憲, 萩原信幸, 大森博司, 松井徹哉: 膜構造の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 508, 71-78, 1998.
- [6] 大崎純, 山川誠: 膜構造の静的載荷時の剛性を考慮した初期応力・裁断膜形状最適化, 膜構造研究論文集, 11, 31-38, 1997
- [7] 大崎純, 上谷宏二, 高谷真次: 逆問題型手法による膜構造の目標形状・応力トレードオフ設計法, 日本建築学会構造系論文集, 395, 107-115, 1996
- [8] 西村敏雄, 登坂宣好, 本間俊雄: 有限要素法による張力場解析手法について, 日本建築学会構造系論文報告集, 351, 76-83, 1985
- [9] 藤井文夫, 瀧諭, 萩原伸幸, 本間俊雄, 三井和男: 非線形構造モデルの動的応答と安定性, 計算工学シリーズ2, コロナ社, 2003
- [10] 坪田張二, 吉田新, 黒川泰嗣: 裁断図をもとにした膜構造の実初期つり合い状態の解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 373, 101-109, 1987
- [11] 日本建築学会編: 空間構造の数値解析ガイドライン, 日本建築学会, 2001.
- [12] 市田浩三, 吉本富士市: スプライン関数とその応用, 教育出版, 1979
- [13] 本間俊雄, 谷口弘子: ステアリング的機能を考慮した膜構造の初期設計支援可視化システム, 日本コンピュータグラフィックス協会, 第9回 NICOGRAPH 論文コンテスト論文集, 215-225, 1993
- [14] 森哲也, 矢山正大, 本間俊雄: 張力構造の形態解析に関する一方法と設計支援システム, コロキウム構造形態の解析と創生 2006, 日本建築学会, 71-78, 2006

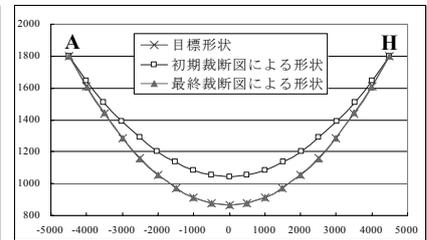
付録 Model-A の解析結果データ



付図 1.a 最適化前後の形状比較[最適化問題①]



付図 1.b 最適化前後の形状比較[最適化問題②]



付図 1.c 最適化前後の形状比較[最適化問題③]

付表 1.a 最適化結果後応力 (N/mm) [最適化問題①]

	初期裁断図による釣合状態			最適化後の釣合状態		
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\tau$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\tau$
目標応力				12.00	12.00	0.00
平均値	12.82	8.22	1.47	12.00	12.00	0.01
最大値	30.02	17.04	2.97	12.17	12.24	0.24
最小値	9.29	5.36	0.05	11.79	11.84	-0.13
標準偏差	3.39	2.05	0.85	0.074	0.099	0.064

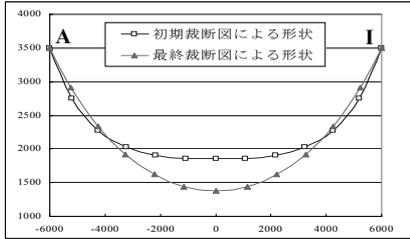
付表 1.b 最適化前後の応力比較 (N/mm) [最適化問題②]

	初期裁断図による釣合状態		最適化後の釣合状態	
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$
平均値	12.82	8.22	11.46	14.10
最大値	30.02	17.04	15.99	15.99
最小値	9.29	5.36	8.01	8.00
標準偏差	3.39	2.05	2.02	1.78
C_{am} (Nmm)	369.29		217.30	

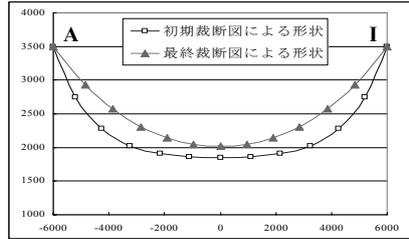
付表 1.c 最適化前後における応力の比較 (N/mm) [最適化問題③]

	初期裁断図による釣合状態		最適化後の釣合状態	
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$
目標応力			$8 \leq t\sigma_x \leq 16$	$8 \leq t\sigma_y \leq 16$
平均値	12.82	8.22	11.74	11.86
最大値	30.02	17.04	15.99	15.99
最小値	9.29	5.36	8.01	8.00
標準偏差	3.39	2.05	2.02	1.78

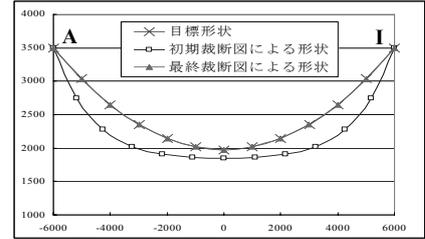
付録 Model-B の解析結果データ



付図 2.a 最適化前後の形状比較[最適化問題①]



付図 1.b 最適化前後の形状比較[最適化問題②]



付図 1.c 最適化前後の形状比較[最適化問題③]

付表 2.a 最適化結果後応力 (N/mm) [最適化問題①]

	初期裁断図による釣合状態			最適化後の釣合状態		
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\tau$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\tau$
目標応力				12.00	12.00	0.00
平均値	50.75	25.74	-3.91	11.79	11.85	-0.03
最大値	476.67	118.92	1.13	13.47	12.74	1.13
最小値	-0.14	0.14	-27.96	10.22	11.52	-1.44
標準偏差	74.53	16.70	6.70	0.413	0.547	0.490

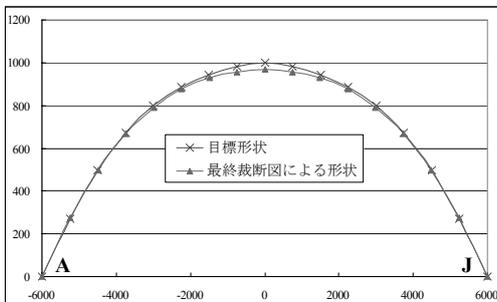
付表 2.b 最適化前後の応力比較 (N/mm) [最適化問題②]

	初期裁断図による釣合状態		最適化後の釣合状態	
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$
平均値	50.75	25.74	9.40	14.79
最大値	476.67	118.92	14.22	15.91
最小値	-0.14	0.14	7.97	10.64
標準偏差	74.53	16.70	1.41	0.86
C_m (Nmm)	222.10		258.34	

付表 2.c 最適化前後における応力の比較 (N/mm) [最適化問題③]

	初期裁断図による釣合状態		最適化後の釣合状態	
	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$	$t\sigma_x$	$t\sigma_y$
目標応力			$8 \leq t\sigma_x \leq 16$	$8 \leq t\sigma_y \leq 16$
平均値	50.75	25.74	10.30	15.27
最大値	476.67	118.92	16.0	16.0
最小値	-0.14	0.14	8.0	10.81
標準偏差	74.53	16.70	1.99	0.76

付録 Model-C の解析結果データ

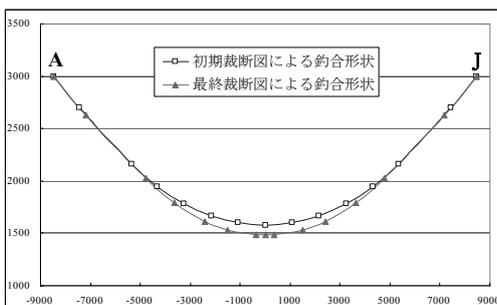


付図 3 最適化前後の形状比較[最適化問題④]

付表 3 最適化結果後応力 (N/mm) [最適化問題④]

	最適化後の釣合状態	
	$t\sigma_x$ (N/mm)	$t\sigma_y$ (N/mm)
目標応力	$1.0 \leq t\sigma_x \leq 1.5$	$1.0 \leq t\sigma_y \leq 1.5$
平均値	1.24	1.25
最大値	1.45	1.49
最小値	1.07	1.01
標準偏差	0.08	0.13

付録 Model-D の解析結果データ



付図 4 最適化前後の形状比較[最適化問題④]

付表 4 最適化結果後応力 (N/mm) [最適化問題④]

	初期裁断図による釣合状態			最適化後の釣合状態		
	$t\sigma_x$ (N/mm)	$t\sigma_y$ (N/mm)	N_B (kN)	$t\sigma_x$ (N/mm)	$t\sigma_y$ (N/mm)	N_B (kN)
目標応力				$5 \leq t\sigma_x \leq 7$	$5 \leq t\sigma_y \leq 7$	$55 \leq N_B \leq 65$
平均値	44.00	38.43	755.40	5.20	5.28	64.90
最大値	52.16	51.16	765.60	6.93	6.98	65.00
最小値	40.29	33.33	731.63	5.00	5.00	64.62
標準偏差	3.24	4.54	11.39	0.33	0.32	0.13

CUTTING PATTERN ANALYSIS, STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS ON STRESS AND DISPLACEMENT
OF MEMBRANE STRUCTURE AND THE CONCEPT FOR IDEA SUPPORT AND DESIGN SUPPORT SYSTEM

Toshio Honma ^{*1)}
Tetsuya Mori ^{*2)}
Reiko Sakanaka ^{*2)}

SYNOPSIS

In this paper, FEM of which an unknown quantity is the coordinate value on a deformed body, is applied to geometrically nonlinear membrane structure analysis. This basic method has already been proposed by us. In this discretization formulation, a cable element and a membrane element are described. The three dimensional coordinate value of the tension structure on the deformed body is obtained directly by this formulation and all the static and dynamic mechanical behavior is grasped. Concerning the static analysis, numerical result that satisfied the cutting pattern of plane membrane piece and the most suitable equilibrium configuration of the deformed body at the same time is shown as an optimization problem. The analytical modeling is a suspension membrane structure, and a pneumatic structure, and a suspension membrane structure of cable reinforcement. The membrane and the cable are no-compression properties. The numerical procedure with a variable stiffness method is explained as the compressive stress affects the no-compression property. Finally, the concept on the idea and the design support system development of the membrane structure using these procedures is explained.

^{*1)} Professor, Dept. of Architecture & Architectural Engineering, Faculty of Engineering, Kagoshima Univ., Dr. Eng.

^{*2)} Graduate student, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ.