付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する基礎的研究

川口健一[*1]
柯　宛伶[*2]

梗　　概

膜構造を代表とする張力構造の形状決定法は、過去に多くの数値解析法が提案されてきた。これらの方法は非線形の不安定問題を安定的に解くことのできる優れた方法であるが、反面、その為に特殊な経験や技巧を要する方法でもある。本報告では、代表的な形状決定問題である極小曲面問題に対して、最も簡単に数値解析的な解を得る為の手法として一般化最急降下法について述べ、簡単な付帯条件付きの問題への応用を紹介する。数値計算例として、付帯条件を適切に設定することで、純粋な極小曲面では得られない形状が得られる例について紹介し、石鹸膜実験と数値解析例の結果を定性的に比較する。

1 はじめに

膜構造を代表とする張力構造の形状決定法は計算機の発達に伴い、過去に多くの数値解析法が提案されてきた。動的緩和法や応力密度法などがその代表であり、今日でも頻繁に使われている([1]-[10])。これらの方法は非線形の不安定問題を安定的に解くことのできる優れた方法であるが、反面、その為に特殊な経験や技巧を要する方法でもある。本報告では、既に解法があり数学分野でも歴史のある極小曲面問題に対して、最も簡単に数値解析的な解を得る為の方法と、簡単な付帯条件付きの問題への応用について述べる。本報で示す手法は一般逆行列を用いた最急降下法（一般化最急降下法）であり、安定的かつ直接的に極小曲面形状が得られる大変簡便な手法である。さらに本報では本手法を用いて、付帯条件を適切に設定することで、純粋な極小曲面では得られない形状が得られる例について石鹸膜実験と数値解析例の結果により示す。

極小曲面は膜構造の理想形状としてよく知られた概念であり、プラトーの石鹸膜実験の解法によってプラトー問題としても知られている。同時に、変分法分野での数学的問題としても多くの研究があり、数学的に解かれた形態も多く存在する。

しかし、固定境界の形状のみが与えられた極小曲面形状は、しばしば望ましい建築形状と一致しなかったり、極小曲面形状そのものが存在しない場合もある。

この様な場合、ケーブル等の付加的な部材の追加が極小曲面形状の改善に役立つことも多い。

本報で示す手法は一般逆行列を用いた最急降下法（一般化最急降下法）であり、逐次的に曲面面積を減らして行くことにより、安定的かつ直接的に極小曲面形状が得られる大変簡便な手法である。

2 理論

2.1 一般化最急降下法

n 個の変数を持つ関数

$$S = f\left(q_1, \ldots, q_n\right) \tag{1}$$

を最小化することを考える。S の最小値を与える変数 $\left(q_1, \ldots, q_n\right)$ を最急降下法により求めるには各変数の変化 Δq_i を、その時点の勾配（gradient）に比例させて、

$$\Delta q_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \alpha \tag{2}$$

として逐次更新する。α は適当な増分値である。これが通常の最急降下法である。この方法をもう少し一般化して解釈すると、S の増分 ΔS を

$$\Delta S = \left[\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right] \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\Delta S = \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} \tag{4}$$

---

*1 東京大学生産技術研究所，教授，工博
*2 東京大学工学部建築学研究科，修士課程

$$\mathbf{A}=\left[\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right] \tag{5}$$

のように線形化し、これを Moore-Penrose 型一般逆行列 $\mathbf{A}^{+}=\frac{1}{\|\mathbf{A}\|^2}\mathbf{A}^T$ を用いて特解を採用したもの、

$$\Delta\mathbf{q}=\mathbf{A}^{+}\Delta S=\frac{1}{\|\mathbf{A}\|^2}\mathbf{A}^T\Delta S \tag{6}$$

と考えることができる。Moore-Penrose 型一般逆行列による特解はノルム最小解を与えるので、もっとも短距離で指定の増分値を達成するという意味で最急降下方向に一致している。この考え方では、ΔS に希望の増分値 ΔS を指定すれば、(2)式の α は、$\frac{\Delta S}{\|\mathbf{A}\|^2}$ として計算できることになる。

極小曲面問題は変分問題として汎関数の停留条件を元にして取り扱われる場合が多いが、本報では停留条件そのものは用いずに直接的数値解法を採用する。

内挿関数 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ を用いて曲面形状を次式で近似する。

$$\mathbf{r}=q_1\phi_1+\ldots+q_n\phi_n \tag{7}$$

曲面の面積Sは

$$S=\iint\sqrt{EG-F^2}\,d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{8}$$

を積分することで得られる。曲面近似に関しては変分法や重み付き残差法等による様々な近似法も可能であるし、ΔS を適宜いくつかの領域に分けて評価することも可能である。ここに、α_1、α_2 は曲面形状を表す二つのパラメータ、E、F、G は曲面の第一計量である。α_1、α_2 と(7)式の $\phi_1,\ldots,\phi_n$ の関係は内挿の仕方によって適宜与えられる。従って(5)式の $\mathbf{A}$ を予め定式化すれば、(6)式において ΔS として適当な負の増分を指示することで、与えられた初期形状より逐次面積のより小さい形状を求めていくことができる。Sに極小値(停留解)が存在すれば、その解の近くで、$\mathbf{A}\approx\mathbf{0}$、即ち $\|\mathbf{A}^2\|\approx 0$ となるので、そこで計算を終了する。

2.2　付帯条件付きの極小曲面

以上が、関数 S の極小値を求める方法であるが、ここへ、ケーブル長などの付帯条件を導入することを考える。この様な付帯条件がm個あるとして、これを次式で表す。

$$g_i(q_1,\ldots,q_n)=0 \qquad (i=1,\cdots,m) \tag{9}$$

増分形式に書き直して、(3)式と連立すると、

$$\begin{bmatrix}\Delta S\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial S}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial S}{\partial q_n}\\ \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial q_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta q_1\\\vdots\\\Delta q_n\end{bmatrix} \tag{10}$$

となる。これをまとめて、

$$\Delta\mathbf{S}=\mathbf{A}\Delta\mathbf{q} \tag{11}$$

と書くと、ムーア・ペンローズ型一般逆行列 $\mathbf{A}^{+}$ を用いて、

$$\Delta\mathbf{q}=\mathbf{A}^{+}\Delta\mathbf{S} \tag{12}$$

と解くことができる。(11)式の解の存在条件は次式で表されるので、

$$\left[\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right]\Delta\mathbf{S}=\mathbf{0} \tag{13}$$

が成り立たなくなった時点で極小値に至ったと判断し計算を終了する。ここに、I は単位行列である。

2.3　付帯条件反力

極小曲面が形成され、停留解に至ったとき、Lagrange未定定数法により次式の汎関数 Π が停留する。

$$\Pi=n_0 S+\sum_i^m[n_i\, g_i(q_1,\cdots,q_m)] \tag{14}$$

ここで、付帯条件 $g_i=0$ としてケーブル長さ一定の条件を考えると、上式の第1項は膜の表面エネルギー，第２項はケーブルの初期張力による歪エネルギーに相当し，n_0 は膜の単位長さ当たりの張力，n_i はケーブル軸力となる。ここで $\lambda_i=n_i/n_0$ とおけば単位膜張力1に対するケーブル反力 λ_i は

$$
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial q_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial q_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial q_n} \end{bmatrix} \qquad (15)
$$

より計算できる。

写真 1: Catenoid Membrane

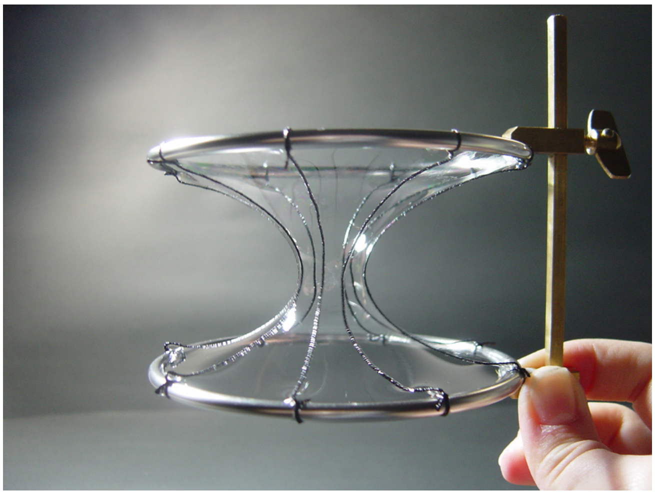

写真 2: Catenoid Membrane with Cables-1

3　石鹸膜実験と数値解析の検証

3. 1　石鹸膜実験 1

数値解析に先だち、簡単な石鹸膜実験を行った。直径 10cm の平行な二つのリングを距離 h cm だけ離して、この間に石鹸膜を形成するという典型的なカテノイド問題である。まず h=6cm として、そのまま石鹸膜を形成したものが写真 1 である。さらに、h=6cm のまま上下のリング間に等間隔に長さ 12cm の糸を 8 本張った状態で石鹸膜を形成したものが写真２である。

結果を見ると、糸を入れた膜（写真２）の形は糸のないカテノイド（写真１）の形の膜構造とかなり違う事が分る。建築的には写真２のような形が好まれる場合も多い。12cm の長さの糸（付帯条件）から反力を得ることで、写真 1 とは大きく異なった形状が得られることが分る。

3. 2　数値計算例 1-1

3. 1 の極小曲面形状決定問題に対し、2 節で提案した数値解析手法を適用した結果を示す。曲面の近似は三角形要素で行い、石鹸膜実験 1 と同じ境界条件を使って、上と下の二つリングの直径は 10cm、h=6cm とする。節点数 312、面積分割数 576 とした。初期形状は円柱状に設定した（図１、２）。解析の結果は下の図３、４のようになった。解析ステップと曲面面積の変化を図 5 に示す。初期面積 187.95cm² より、極小値 174.36 cm² まで直線的に減少している様子が分る。

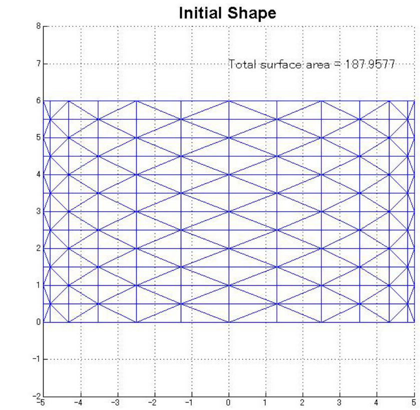

図 1 : Initial Shape 1-1-1

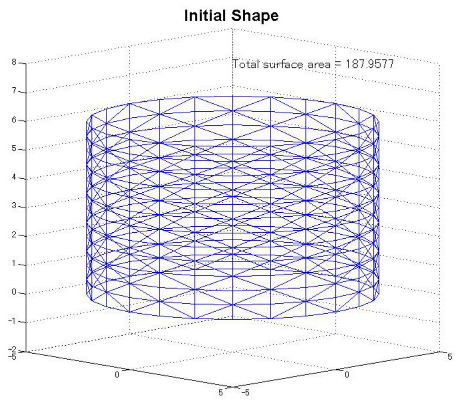

図 2 : Initial Shape 1-1-2

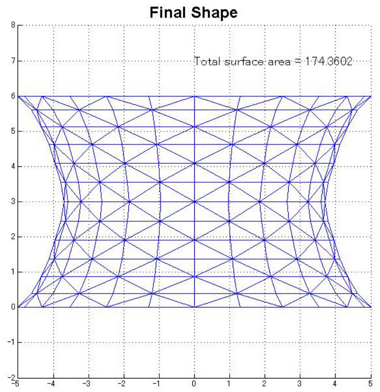

図３: Final Shape 1-1-1

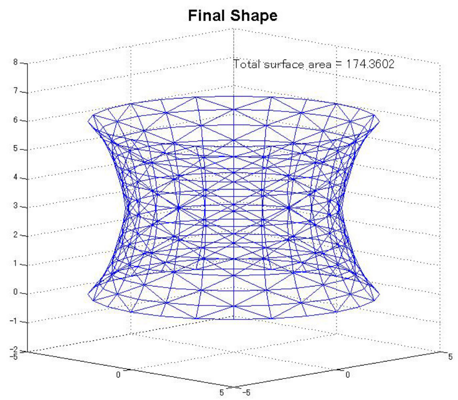

図４: Final Shape 1-1-2

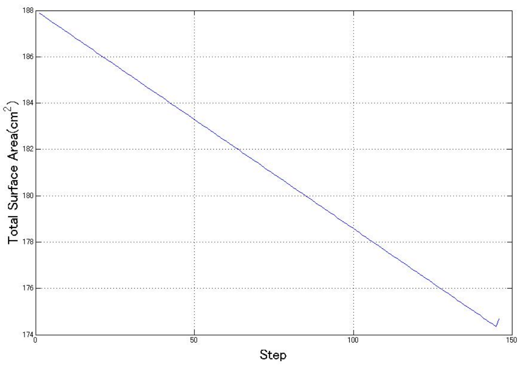

図 5: Change of Total Surface Area with Step 1-1

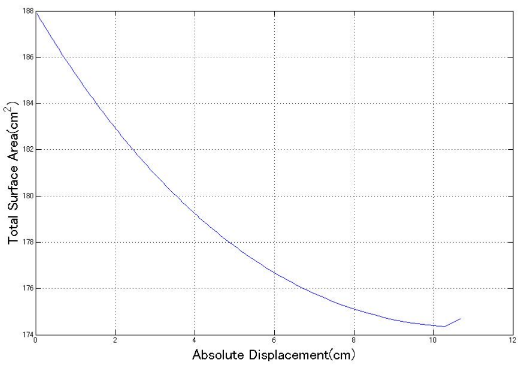

図 6: Change of Total Surface Area with Disp. 1-1

3.3　数値計算例 1-2

3.1 と同じ条件で、リングに設定した頂点を固定点とし、上と下のペアの固定点間を結ぶ 8 本のケーブル（長さ 12cm）を付帯条件として与え数値計算を行った。

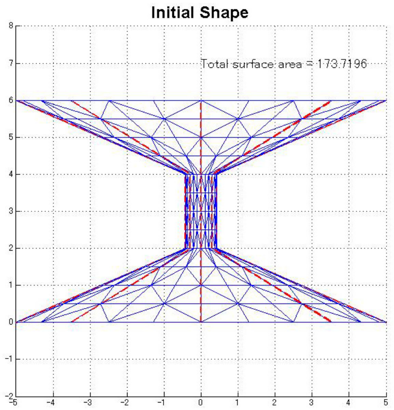

図 7:　Initial Shape 1-2-1

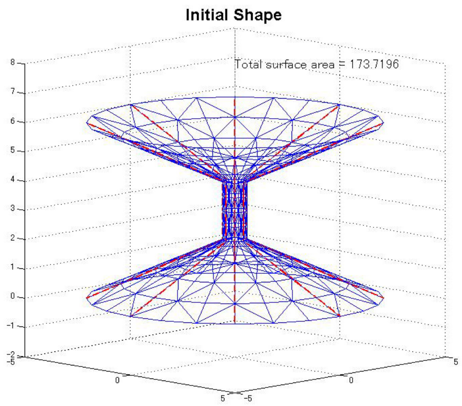

図 8: Initial Shape 1-2-2

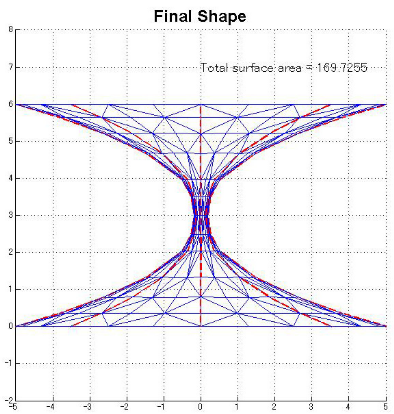

図 9: Final Shape　1-2-1

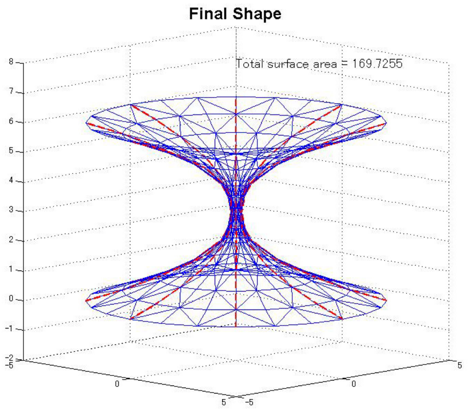

図 10: Final Shape　1-2-2

初期形状を図６、７、最終形状を図８、９に示す。最終形状は 3. 1 の実験結果とほぼ同じになることが分る。

解析ステップと曲面面積の変化を図 10 に示す、初期値 173.72cm² から極小値 169.73cm² まで減少している。極小値における付帯条件反力を表 1 に示す。これは膜の単位長さ当りの張力を 1 とした時の比を示している。

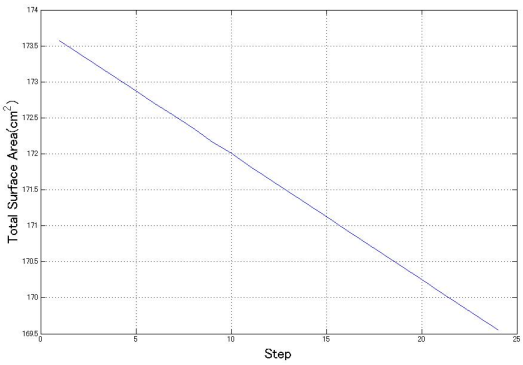

図 11: Change of Total Surface Area with Step 1-2

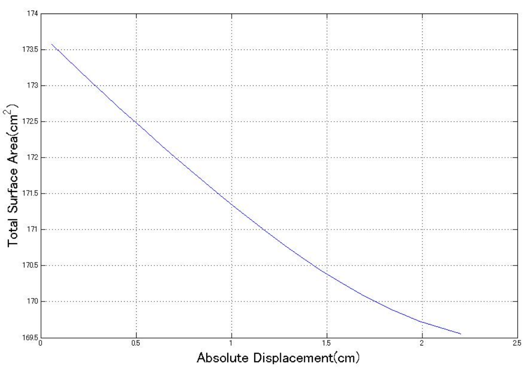

図 12: Change of Total Surface Area with Disp. 1-2

表 1: Length and λ　of Cables-1

Cable	Initial Length	Final Length	λ
1	12	12.00421644	1.735957
2	12	12.00420487	1.742522
3	12	12.00421644	1.735957
4	12	12.00420487	1.742522
5	12	12.00421644	1.735957
6	12	12.00420487	1.742522
7	12	12.00421644	1.735957
8	12	12.00420487	1.742522
Total	96	96.03368522	

unit of length : cm

3. 4　石鹸膜実験 2

カテノイドの形の極小曲面は既往の研究によると、リングの距離と直径の比が 0.65 を超えると存在しなくなることが分っている。この事実を検証するため、リングの距離と直径の比を 1 を目標とする石鹸膜実験を行った。直径 10cm のカテノイド石鹸膜のリング間距離を h=6cm より徐々に離していくと、h=6.5cm を越えた時、石鹸膜は各リングに円盤のように二枚に別れた。以降は h=10cm を越えても変化はない。（写真 3）

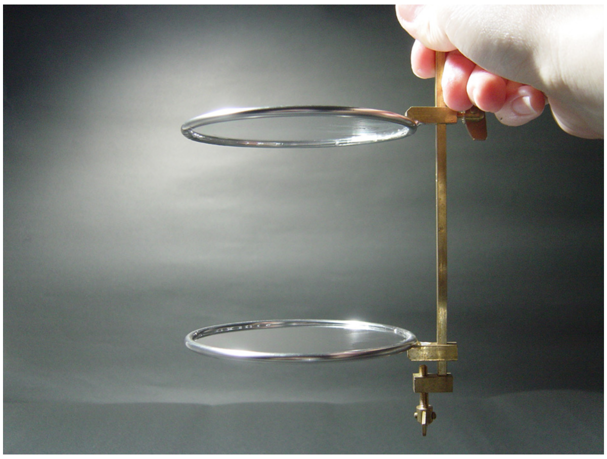

写真 3: Catenoid Membrane Split into Two Plates

この問題では h=6.5cm を越えた場合、純粋な極小曲面は 2 枚の円盤形状以外に存在しない。しかし、付帯条件の導入によりこれ以外の極小曲面を実現することができる。同じ直径 10cm の二つリングの間の距離を 10cm として、上下のリングにペアの固定点を設定して長さ 12cm の 8 本の糸で互いに結んで実験を行った。結果を写真 4 に示す。

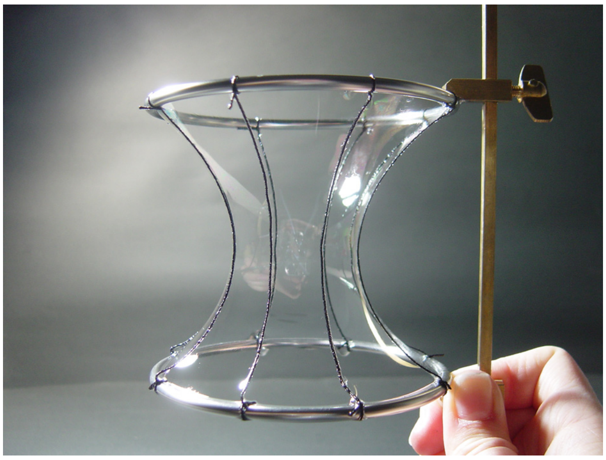

写真 4: Catenoid Membrane with Cables-2

3.5　数値計算例 2-1

石鹸膜実験 2 の糸のない場合に相当する数値解析を行った。この場合は実験でも見たように膜が２枚に別れる状態が唯一の安定な解である。しかし、図 11、12 に示すような円柱形の初期状態から出発すると、数値計算上は要素間の連続性がある為、図 13、14 の様な形状に至って終了する。

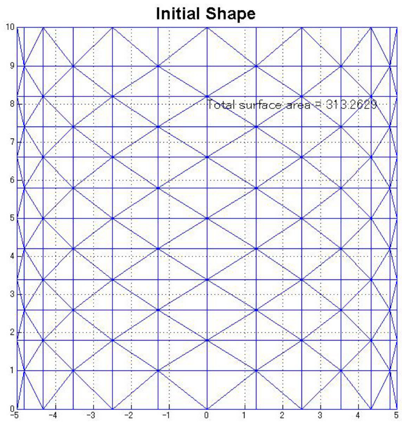

図 13: Initial Shape　2-1-1

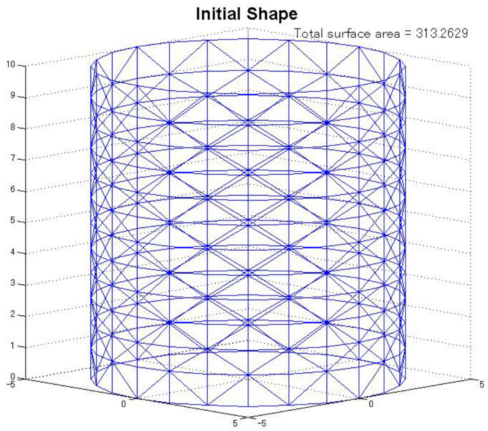

図 14: Initial Shape　2-1-2

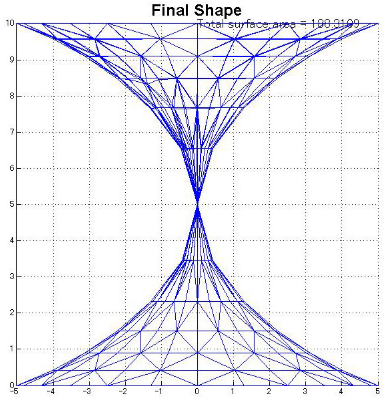

図 15: Final Shape　2-1-1

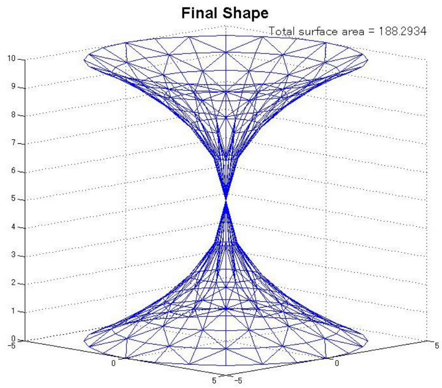

図 16: Final Shape　2-1-2

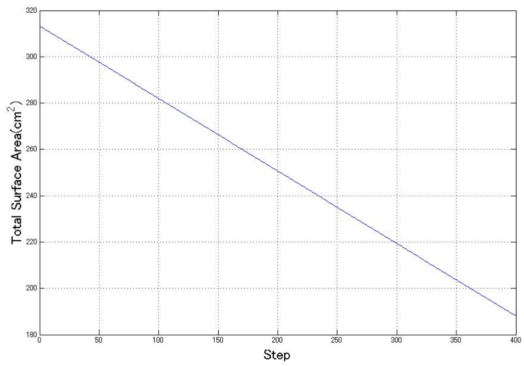

図 17: Change of Total Surface Area with Step 2-1

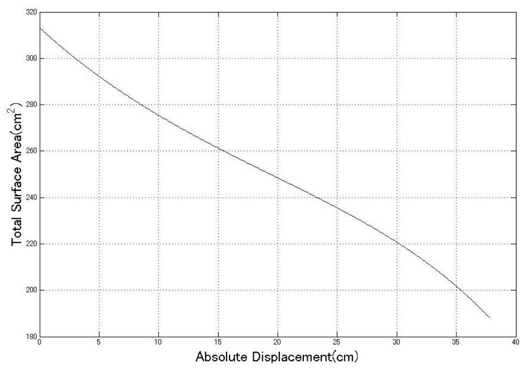

図 18: Change of Total Surface Area with Disp. 2-1

3.6　数値計算例 2-2

石鹸膜実験 2 で、糸の付帯条件がある場合についても数値解析を行った。付帯条件とするケーブル（長さ 12cm）8 本を導入し、リング間距離は 10cm とした。

図 16、17 に示す初期形状から数値解析を行った。結果を図 18、19 に示す。最終形状は石鹸膜実験の結果（写真 4）とよく似ている。解析ステップと曲面面積の関係を図 20 に示す。面積は初期の 242.25cm² から 235.60cm² に直線的に減少している。

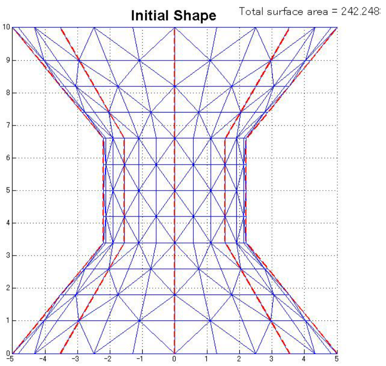

図 19: Initial Shape　2-2-1

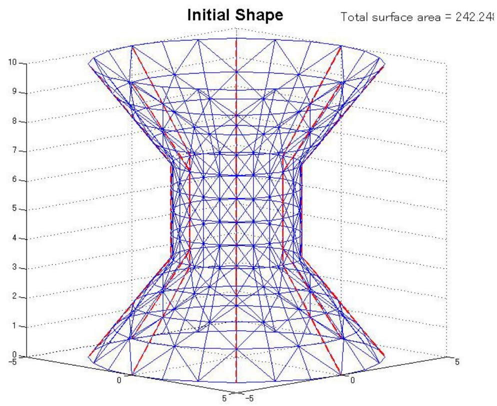

図 20: Initial Shape　2-2-2

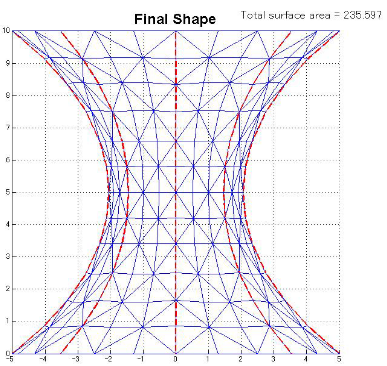

図 21: Final Shape　2-2-1

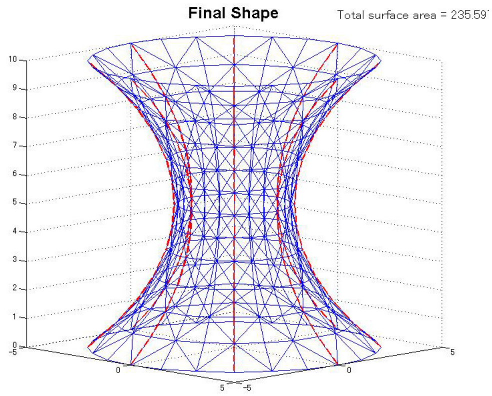

図 22、Final Shape　2-2-2

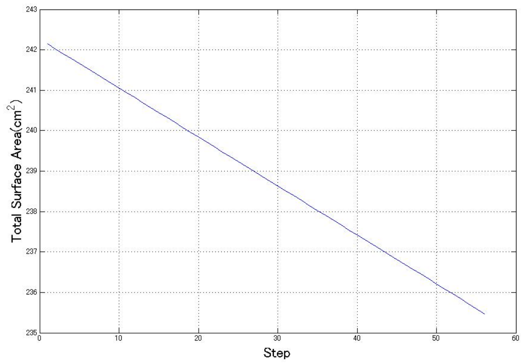

図 23: Change of Total Surface Area with Step2-2

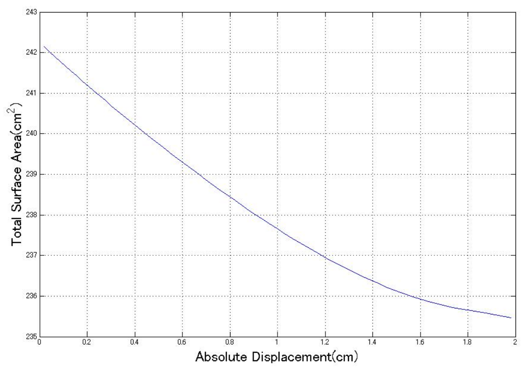

図 24: Change of Total Surface Area with Disp. 2-2

最終状態における付帯条件反力の値を表 2 に示す。表 1 の値に比べ大きい値となっていることが分る。

4　まとめ

一般逆行列を用いたノルム最小解を用いる一般化最急降下法によって簡便かつ安定的に極小曲面を求めることができることが分った。また、付帯条件を導入することで、元来解の存在しない領域の解を得ることができることが分り、本手法はこれらの数値解を求めることにも有効であることが分った。

表 2: Length and λ of Cables-2

Cable	Initial Length	Final Length	λ
1	12	12.0065205	4.06909
2	12	12.0067365	4.06593
3	12	12.0065205	4.06909
4	12	12.0067365	4.06593
5	12	12.0065205	4.06909
6	12	12.0067365	4.06593
7	12	12.0065205	4.06909
8	12	12.0067365	4.06593
Total	96	96.05302783	

unit of length : cm

参考文献

[1] H.-J.Schek. The force density method for form finding and computation of general networks. Computer methods in applied mechanics and engineering 1974; 3:115-134.

[2] Peter Singer, Dieter Strobel, Rosemarie Wagner. Some remarks on determination of tensioned structures. ECCOMAS 2004.

[3] M.R.Barnes. Application of dynamic relaxation to the design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. International Conference on Space Structures, Guildford, 1975.

[4]M.R.Barnes. Form finding and analysis of prestressed nets and membranes. Computers & Structures 1988; 30: 685-695.

[5]Kawaguchi Ken'ichi, (Unpublish) "Application of Generalized Inverse Matrix", University of Tokyo, Tokyo.

[6]鈴木俊男、半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析。日本建築学会構造系論文報告集、No.425、1991、p.111-120。

[7]大森博司、荻原伸幸、松井徹哉、松岡理：有限要素による極小曲面の数値解析。膜構造研究論文集'88、No.2、p.1-10。

[8]Haug, E. and Powell, G. H., Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures. Proc. of IASS Pacific Symposium on Tension Structures and Space Frames, Tokyo, Oct. 1971.

[9]石井一夫：膜構造における等張力曲面形態について。建築学会学術講演梗概集、昭和 50 年、p.719-720。

[10]石井一夫：膜構造の形状解析（形状決定の問題）概説。膜構造研究論文集'89、No.3、p.83-108。

Fundamental Study of Minimal Surface with Constraint Conditions and Steepest Descent Method

Ken'ichi KAWAGUCHI*1

Wan-Ling KE*2

SYNOPSIS

Numerous form-finding methods have been proposed for tension structures. While most of these methods are very effective in finding solutions of nonlinear problems, they usually require some special experiences or tuning techniques in the practical applications. This paper applies the Generalized Steepest Descent Method to find minimal surfaces putting stress on its simple numerical concept. We also apply the method to solve the minimal surface with constraint conditions, which will be proved in the paper as a great help to improve the shape of minimal surface for architectural purposes. Some results of physical soap membrane tests are also illustrated to show the plausibility of the numerical results.

*1 Institute of Industrial Science, the University of Tokyo

*2 Department of Architecture, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo