

膜構造の畳み込みに関する折紙的アプローチに関する基礎的研究

渡邊尚彦*

川口健一**

梗概

開閉式膜屋根構造等，展開式膜構造に用いられる折り畳みパターン設計には折紙的アプローチが役立つ．折紙的アプローチでは膜のせん断変形を無視し曲げ変形を折線に集中させた幾何学を仮定する．本研究では板の固有曲げモードをヒントとして折りモードを得，実際に折り畳むことのできる「可折条件」を考慮した折線の調整法を示し，畳み込み経路解析を行う，という各手法を提案する．

1 はじめに

面的な広がりを持つ構造物を畳み込む，或いは畳み込まれた構造物を展開するという手法は建物の合理的な施工，解体，展開型・可変形状型構造の開発などの分野で様々な応用が考えられてきている [1]．宇宙工学の分野では宇宙展開型アンテナ，太陽電池パネル，ソーラーセイルなどへの応用を目指し，多くの畳み込みパターンが提案されている [2][3][4][5][6]．本研究は平面材の折り畳みパターンの構造を明らかにするため「折紙的アプローチ」の有用性に着目し，折りの数理に関して得られている成果を膜構造の折り畳みに応用しようとするものである．実際の膜材料はせん断変形，曲げ変形，ねじれ変形を伴うが，本研究では問題を明確化するため，これらの変形は生じないものとし，膜の幾何学的変化を折線により接続された剛体的平面により生じるものと仮定する．提案する解析の主な流れは

- (1) 板の固有曲げモードから折線を抽出し折面化する手法の提案
- (2) 実際に可折条件を満たすような折線を調整する手法の開発
- (3) 得られた折線を基に剛体的畳み込み経路解析を行うというものである．(1) はできるだけ恣意性を排した方法で平面の本来持っている曲げ変形モードを歪みエネルギーの小さい順に得，それをもとに主要な折線を得るというものである．(2) は得られた折線が実際に折り畳み可能かを判定する方法を示し，可折でない場合折線を補足・削除・座標移動を施すことで実際に折り畳み可能な折線構造を得るというものである．(3) は不伸長変位解析を面の折り畳みに適用するというものである．

なお本論文で「折面化」とは，曲げモードなどの曲面を「折線のつけられた面」として近似する際に必要な折線の一部を得る作業を表す．ただし，そこで得られる折線は可折なものであるとは限らない．また「可折面」とは実際に可折条件を満たすような折線のつけられた平面のことである．以降この定義に従う．以下に各部分の手法について説明する．

2 折面化

面の自然な折線を得るために座屈波形がヒントにされることがある．三浦らは「ミウラ折り」を薄肉円筒シェルに現れるダイヤモンド座屈波形をヒントに得，板の $Elastica$ 問題の解としての結果も得ている．[7][8][9][10] 円筒シェルのねじり荷重作用時に現れる座屈波形もチューブの折畳み時の折線を得るためのヒントとされている [11]．しかし本論文では荷重条件に依存しない面の純粋な曲がり易さを表す形を得るために弾性剛性マトリクス K_E のみを用いて

$$[K_E - \lambda I]u = 0 \quad (1)$$

によって固有曲げモード u を得ることとする．固有値が小さいほど対応する曲げモードの歪みエネルギーは小さい．

ここで得られた曲面は直観的に構成される折線を想起させるものもあるが，そうでない場合に曲げの偏在情報から折線に変換する一般性のある方法が必要とされる．本研究では，曲面を可展的な区分的多角形の集合として直接近似するのは困難であるが曲線であれば折線として近似することが比較的容易であることに着目し，曲面を x 軸 y 軸に平行な線で切った断面の曲線の極値点間を線形補間するという作業を繰り返す方法によって近似的折面を得ることとする．

3 可折条件

面の折りの幾何学的性質に関して「平坦可折条件」「剛体可折条件」が知られている．「平坦折り」とは，折線情報が与えられている平面がもし平坦に折り畳めるならば成り立つべき山谷線の位置情報を扱ったもので前川定理，川崎定理をはじめその一般化がなされている [12][13][14][15]．一方「剛体折り」とは各面がプレートで辺がヒンジとしてモデル化されるような区分的多角形の集合体が，与えられた山谷線情報から各面が伸びや曲げを生じずに剛体的変位をしようかという問題を扱うものであり，Gauss 写像を用いた検討や機構を持つ 4 価の頂点についての研究 [9][16] がこれまで多く行われている．しかし「平坦可折条件」の研究の発展に比べると「剛体可折条件」については実際の

*東京大学大学院工学系研究科修士課程

**東京大学生産技術研究所 助教授

かつ一般的方法が確立されていない．以下では既往の研究で見られた「平坦可折条件」の成果を使って，部分的に与えられている折線情報から実際に平坦可折な山谷線を構成する方法を提案する．ここでは折面化した際の折線情報をできるだけ生かすという方針である．また「剛体折り」については判定法を数値解析によるものと図式解法によるものを提案し，その有用性を数値解析結果から検証する．

3.1 平坦折り条件

以下では折線を平面に描かれたネットワーク情報の幾何的操作として扱う．単頂点に集中する線分について平坦折り条件とは以下のものを考慮する．

- [i] 各折線間角度は 180 度以下
- [ii] 頂点の 1 頂点から出る直線の本数は 4 本以上の偶数
- [iii] 折線の成す一つ置き角の和は 180 度（川崎定理）
- [iv] 山谷線の本数の差は 2（前川定理）
- [v] $\theta_1 > \theta_2, \theta_2 < \theta_3$ の θ_2 両端の山谷は逆（隣接山谷条件）

[iii][iv][v] は平坦可折条件として知られている諸性質であり，[i][ii] は折線構成操作のため便宜上加えたものである．[v][iv][v] は線分の接続・座標情報のみ扱う問題であり，[ii][iii] は山谷情報を扱う問題である．従って与えられた折線に対して平坦可折を目指して行われる調整操作は

判定 [i][ii] より「頂点・辺の追加・削除」

判定 [iii] より「節点座標移動」

判定 [iv][v] より「山谷変更」

となる．[iii] より平坦可折な山谷は座標情報に依存して単なる折線の接続情報からは決定できないことから，折線ネットの決定 頂点座標調整 山谷調整といった順に操作を行うものとする．接続情報を決定する「線分の追加・削除」操作についてはどの節点からスタートしてもできるが（ただし結果は異なる），[iii] を考慮した「節点座標移動操作」は効果的な順番を考慮する必要がある．ここに内部の多角形の核を外側に向かって膨張するように操作を行う方法を提案する．具体的に幾何グラフを扱うにあたって図 1 に示すような頂点座標データと辺の情報を使用した．

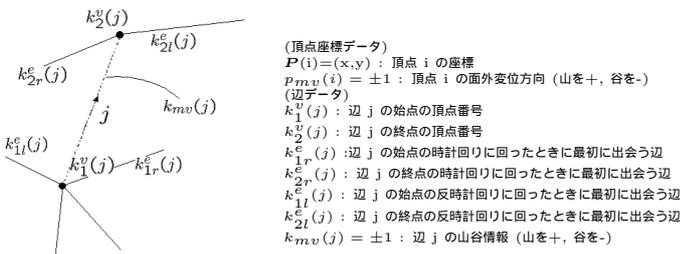


図 1：辺の周りの情報

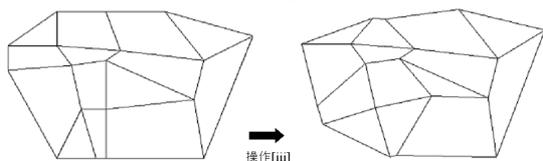


図 2：判定 [iii] をもとに行った座標調整

以上の流れに沿って可折面化する方法を適用した例を図 2 に示す．

3.2 剛体折り条件

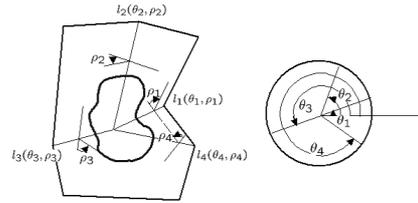


図 3：記号 $l_i(\theta_i, \rho_i)$

剛体折り判定について，平面につけられた各折線は微小な二面角の変化が起こりうるか，という観点から，以下のよう定式化し，判定することができる．

半直線が集中する局所的な頂点を考える．半直線の折線 l_1, l_2, \dots, l_n の x 軸からの平面角を $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ とする．また l_1, l_2, \dots, l_n の 2 面角の補角をそれぞれ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ とする． z 軸周りの回転， x 軸周りの回転それぞれの操作を表す行列をそれぞれ A_i, C_i とし， $\chi_i = A_i C_i A_i^{-1}$ とすると，もし 1 枚の連続的な面が折られてつけられた折線ならば

$$\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n = I \quad (2)$$

が成り立つ．今剛体可折ならば平坦に開かれた状態から微小変位 ($\Delta \rho$) を起こしうると考え， $\sin \Delta \rho_i = \epsilon_i, \epsilon_i \sin \theta_i$ を $\delta_i^s, \epsilon_i \cos \theta_i$ を δ_i^c と表記することにすると，近似操作，高次項省略の結果，左辺の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 - \sum_{i,j=1}^n \delta_i^s \delta_j^s & \sum_{i,j=1}^n \delta_i^s \delta_j^c & \sum_{i=1}^n \delta_i^s \\ \sum_{i,j=1}^n \delta_i^c \delta_j^s & 1 - \sum_{i,j=1}^n \delta_i^c \delta_j^c & - \sum_{i=1}^n \delta_i^c \\ - \sum_{i=1}^n \delta_i^s & \sum_{i=1}^n \delta_i^c & 1 - \sum_{i,j=1}^n (\delta_i^s \delta_j^s + \delta_i^c \delta_j^c) \end{bmatrix} \quad (3)$$

のようになる．ここで ϵ は山谷によって符号が異なる，微小な二面角の変化に相当する値である．これが単位行列 I となることに注意し，行列の各成分に着目する．

まず， ϵ に関して 1 次のものしか含まない (1,3), (2,3) 成分に着目するとこれは

$$A \epsilon_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_n \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \cdots & \sin \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

となる．(1,2)(2,1) 成分に着目すると

$$\epsilon^T C \epsilon = 0 \quad (5)$$

C マトリクスは

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cdots \\ \text{sym} & & \vdots & \end{bmatrix} \quad (6)$$

または

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \dots & \cos \theta_1 \sin \theta_n \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \dots & \cos \theta_2 \sin \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\cos \theta_n \sin \theta_1 & -\cos \theta_n \sin \theta_2 & -\cos \theta_n \sin \theta_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。式(4)(5)は式(2)の必要条件であるがこれらの幾何解釈は次の通りとなる。

式(4)を $\sum \alpha_i = \sum \epsilon_i \lambda_i = 0$ とすると、各 α_i は、方向 λ_i 、大きさ ϵ_i を持ったベクトルと考えることができ、実際の折れ面と対応させて考えると λ_i は平坦に開かれた状態での各折線方向、 ϵ_i は二面角の補角の大きさに相当することに注目できる。式(4)(5)が成り立つということは各折線属性に合わせてベクトル表記された折線を結んだとき

- [1] 閉経路を描くことができ(式(4))
 - [2] 向き付けされた面積が0となる(式(5))
- となることに相当する。

具体的な剛体可折性図式判定手順を図4を例に示す。

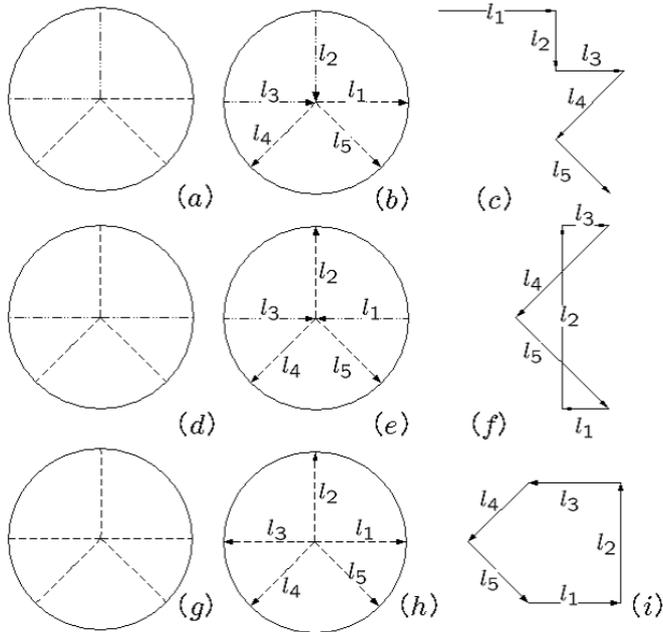


図4：剛体折り図式判定方法

まず谷折り線は外側のベクトル、山折り線は中心に向かうベクトルとして山谷の折線属性にしたがい、方向を持たせる((b)(e)(h))。次に、その方向ベクトルを l_1 から順に反時計回りに抜き出し、長さを調節しながら閉経路になるようにする。ここでどうしても閉経路にならないもの(c)は剛体折り不可能。式(5)より閉経路になっても向き付けされた面積が0にならないもの(i)も剛体折り不可能。閉経路かつ向き付けされた面積が0となるものが剛体折り可能と判定する。実際に(d)だけが剛体可折である。

複頂点の場合はまず各頂点で局所剛体可折かどうかをベクトル図を描くことによって確認し、それぞれベクトル長さの相互関係が無矛盾であれば剛体可折と判定できる。

3.3 数値解法

形式的折線図の座標データから与えられる A, C マトリクスに対し、式(4)(5)を満たすモードの符号の存在判定をすることにより、山谷の剛体可折性を判定することができる。式(5)は非線形より Newton-Raphson 法に準じた繰り返し計算により行う。まず A の一般逆行列 A^- を使って

$$\epsilon' = [I - A^- A] \alpha \quad (8)$$

と解の候補 ϵ' をたて(ここで α は各線分の折線属性にあわせ、 ± 1 で表されたものとする)、

$$f(\epsilon') = \epsilon'^T C \epsilon' \quad (9)$$

が0になるまで ϵ, α を繰り返し更新するというものである。ここで収束した ϵ の符号と、はじめに仮定した山谷 α との符号一致性によって剛体折り可能であったかを判定できる。多頂点の場合は A, C マトリクスを重ね合わせ、全体マトリクスと個別のマトリクスについて収束計算を行うことで判定を行う。

3.4 数値解析結果

以上で定式化を行った剛体折り判定の数値解法の妥当性を以下の例で検証した。

図5, 6に示す4個と5個の単頂点, 図7, 8に示す2頂点と4頂点の場合について、考える全ての山谷の組合せから剛体可折なものを選び取ることができるかどうかを検討した。

各図に示す l_i の山谷を ± 1 で表し、その組合せを α ベクトルとして入力し、繰り返し計算によって収束した ϵ の符号のモードとの一致性より剛体可折判定を行う。

表1は図5に示す4個頂点のそれぞれ線の山谷属性(例えば1を山折り-1を谷折りとする)に合わせて入力された α と収束した ϵ の値である。表中の左の \times は実際の剛体可折性を示し、それぞれに対し行った判定結果(入力値と出力値の符号の一致性)とともに示した。式(6)をもとにした C_1 、式(7)をもとにした C_2 の2種類のマトリクスを使用しそれぞれ収束結果を比較した。

また表2は5個頂点について C_1 マトリクスを使って行った解析で入力値 α と収束値 ϵ で符号が全て一致した山谷の組合せの収束値を選び出している。それぞれ収束値の負値に網掛けがされている。

表3は2頂点について全体マトリクスによる計算で入力値と出力値の符号が一致した山谷の組合せのみをすべてあげた。表3の中で網掛けがされているのが各頂点 p_1, p_2 についても剛体可折と判定されたものである。

表4は図8の4頂点に対して判定を適用したものであり、全体マトリクスも各頂点周りのマトリクスについても剛体可折と判定された山谷のパターンを選び出している。表4の下表は全体マトリクスで剛体可折とは判定されなかったが各頂点については剛体可折と判定されたパターン

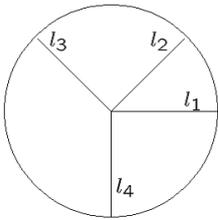


図 5 : 4 価単頂点

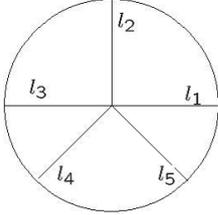


図 6 : 5 価単頂点

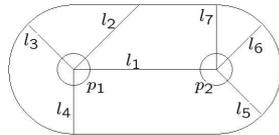


図 7 : 複頂点パターン

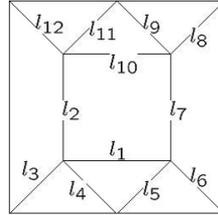


図 8 : 4 頂点パターン

表 1 : 図 5 の判定

| パターンNo. | 実際の可折性 | 入力 α | | | | 判定 | C1 使用 出力 ϵ | | | | 判定 | C2 使用 出力 ϵ | | | |
|---------|--------|-------------|----|----|----|----|---------------------|--------|--------|--------|----|---------------------|--------|--------|--------|
| | | l1 | l2 | l3 | l4 | | l1 | l2 | l3 | l4 | | l1 | l2 | l3 | l4 |
| 1 | X | -1 | -1 | -1 | -1 | X | -0.007 | -0.001 | 0.000 | -0.019 | X | 0.309 | -0.749 | -0.310 | -0.749 |
| 2 | O | 1 | -1 | -1 | -1 | O | 0.500 | -1.207 | -0.500 | -1.207 | O | 0.500 | -1.207 | -0.500 | -1.207 |
| 3 | O | -1 | 1 | -1 | -1 | O | -1.207 | 0.500 | -1.207 | -0.500 | O | -1.207 | 0.500 | -1.207 | -0.500 |
| 4 | X | 1 | 1 | -1 | -1 | X | -0.013 | 0.001 | 0.000 | -0.031 | X | 0.127 | -0.310 | -0.128 | -0.311 |
| 5 | X | -1 | -1 | 1 | -1 | X | 0.207 | -0.500 | -0.207 | -0.500 | X | 0.207 | -0.500 | -0.207 | -0.500 |
| 6 | X | 1 | -1 | 1 | -1 | X | 0.019 | 0.000 | 0.001 | -0.007 | X | 0.311 | -0.749 | -0.310 | -0.748 |
| 7 | X | -1 | 1 | 1 | -1 | X | -0.031 | 0.000 | 0.001 | 0.013 | X | -0.130 | 0.310 | 0.129 | 0.309 |
| 8 | X | 1 | 1 | 1 | -1 | X | 0.500 | -0.207 | 0.500 | 0.207 | X | 0.500 | -0.208 | 0.500 | 0.207 |
| 9 | X | -1 | -1 | -1 | 1 | X | -0.500 | 0.207 | -0.500 | -0.207 | X | -0.500 | 0.208 | -0.500 | -0.207 |
| 10 | X | 1 | -1 | -1 | 1 | X | 0.031 | 0.000 | -0.001 | -0.013 | X | 0.130 | -0.310 | -0.129 | -0.309 |
| 11 | X | -1 | 1 | -1 | 1 | X | -0.019 | 0.000 | -0.001 | 0.007 | X | -0.311 | 0.749 | 0.310 | 0.748 |
| 12 | X | 1 | 1 | -1 | 1 | X | -0.207 | 0.500 | 0.207 | 0.500 | X | -0.207 | 0.500 | 0.207 | 0.500 |
| 13 | X | -1 | -1 | 1 | 1 | X | 0.013 | -0.001 | 0.000 | 0.031 | X | -0.127 | 0.310 | 0.128 | 0.311 |
| 14 | O | 1 | -1 | 1 | 1 | O | 1.207 | -0.500 | 1.207 | 0.500 | O | 1.207 | -0.500 | 1.207 | 0.500 |
| 15 | O | -1 | 1 | 1 | 1 | O | -0.500 | 1.207 | 0.500 | 1.207 | O | -0.500 | 1.207 | 0.500 | 1.207 |
| 16 | X | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.019 | X | -0.309 | 0.749 | 0.310 | 0.749 |

表 2 : 図 6 の判定

| l1 | C1 使用 | | | | 出力 ϵ | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|----|----|----|----|
| | l2 | l3 | l4 | l5 | l1 | l2 | l3 | l4 | l5 |
| 0.530 | -1.132 | -0.200 | -0.284 | -1.317 | | | | | |
| -0.199 | -1.123 | 0.526 | -1.307 | -0.281 | | | | | |
| 0.275 | -1.099 | 0.275 | -0.778 | -0.777 | | | | | |
| -0.381 | -0.279 | -1.422 | 0.539 | -0.934 | | | | | |
| 0.279 | -0.693 | -0.849 | 0.307 | -1.287 | | | | | |
| 0.819 | 0.665 | -0.266 | 1.238 | -0.297 | | | | | |
| 1.447 | 0.283 | 0.389 | 0.949 | -0.548 | | | | | |
| -1.447 | -0.283 | -0.389 | -0.949 | 0.548 | | | | | |
| -0.819 | -0.665 | 0.266 | -1.238 | 0.297 | | | | | |
| -0.279 | 0.693 | 0.849 | -0.307 | 1.287 | | | | | |
| 0.381 | 0.279 | 1.422 | -0.539 | 0.934 | | | | | |
| -0.275 | 1.099 | -0.275 | 0.778 | 0.777 | | | | | |
| 0.199 | 1.123 | -0.526 | 1.307 | 0.281 | | | | | |
| -0.530 | 1.132 | 0.200 | 0.284 | 1.317 | | | | | |

表 3 : 図 7 の判定

| l1 | l2 | l3 | l4 | 入力 α | | | |
|----|----|----|----|-------------|----|----|----|
| | | | | l5 | l6 | l7 | l8 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

表 4 : 図 8 の判定

| l1 | l2 | l3 | l4 | l5 | l6 | l7 | l8 | l9 | l10 | l11 | l12 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | |
| 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | |
| -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | |
| -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | |
| -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | |
| -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | |
| -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | |

であり、また平坦可折なパターンでもある。
 まず表 1 からは C_1, C_2 どちらのマトリクスを使用した場合においても正しい剛体可折判定を行い、判定の正しく行われた場合に ϵ は C_1, C_2 ほぼ同じ値に収束している。ただし入力値として剛体可折でない組み合わせのものを入力した場合には収束値の挙動に違いが見られ、 C_1 では ϵ_i が 0 となるものが現れる場合が多いのに対し、 C_2 では剛体可折な山谷モードに収束する。また収束値は、平坦可折な 4 価単頂点の向かい合う折線での二面角間に成立する関係 $\|l_1\| = \|l_3\|, \|l_2\| = \|l_4\|$ が成立していることにも着目できる。表 2 に示すような 5 価単頂点の場合は 4 価単頂点のように二面角関係は一意に定まらず、 C_1 と C_2 で収束値も異なる値となった。しかし符号に着目した場合、どちらも正しい剛体可折判定を行っていた。表に示す剛体可折という判定が得られた山谷モードは実際にも剛体可折となっている。表 3 に示す 2 頂点の場合、全体マトリクスを使用した判定のみでは各頂点周りでは剛体可折でない山谷モードを選び出してしまふことが分かる。表 4 の上表の判定結果は直感的には全てのモードを尽くしていないような印象を与えるが、表下のような山谷モードは実際折ってみると

面の曲げ変形が生じることを確認することができ、仮定に反するモードであることが分かる。

4 畳み込み解析

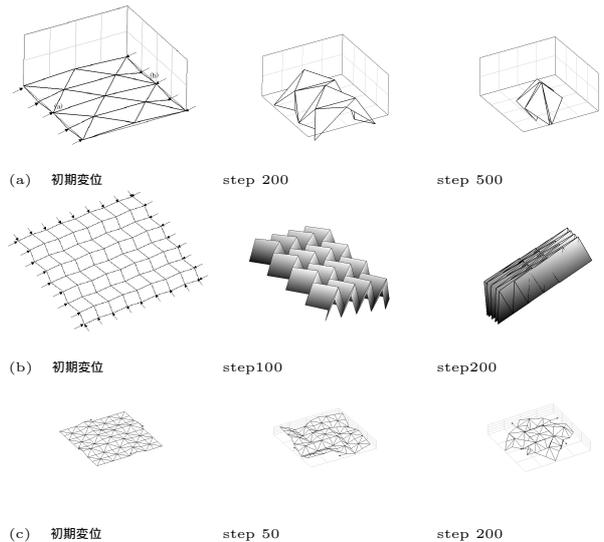


図 9 : 各種折線の畳み込み経路解析例

折面の畳み込み解析にあたって、折面をトラス要素でモデル化し、半谷・川口ら [18][19] によって提案された一般逆

行列を使用した部材不伸長畳み経路解析を行った．増分変位として重ねあわされる不伸長変位モードの各係数は，ポテンシャルエネルギーの最大勾配を得るものを採用し，また増分変位は線形項までを考慮したものとし，

$$\epsilon = Bu \quad (10)$$

$$H = [I - B^{-1}B] \quad (11)$$

$$\Delta x = HH^T f(\Delta t) \quad (12)$$

によって各ステップの Δx を得るものとする．折線はトラス部材で表現するが，その山谷属性を各頂点 z 座標の初期変位として表現した．その z 成分は，内部点は集中する山谷線の差によって初期面外変位方向成分を決定し，周縁部は折面の周縁部の折線情報と一致するようにと決定した．この方法により折線情報の与えられた平面の畳み経路が解析しうることを例として図9に示す．(a)(b)は面内荷重をかけたもの，(c)は図のようなねじり荷重をかけたものである．

5 一連の流れ

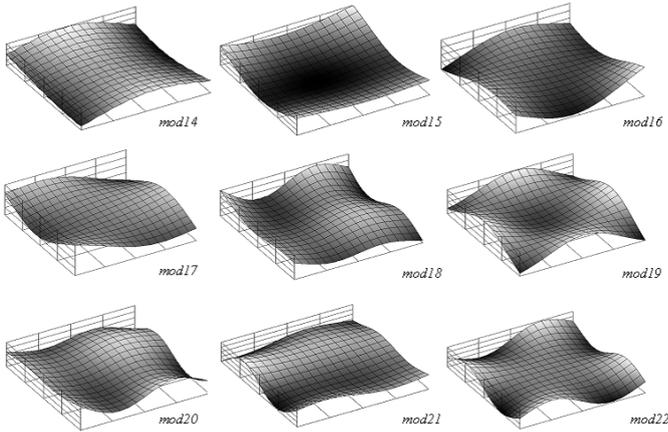


図 10:固有曲げモード

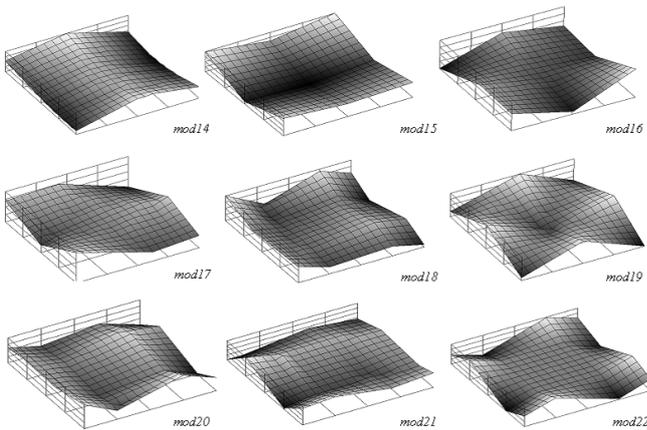


図 11:折面化されたモード

表 5 : 解析諸元

| | |
|---------------------|-----------------------------|
| 寸法 | 160.0 × 160.0 × 1.0 [mm] |
| Young's Modulus (E) | 200000 [N/mm ²] |
| Poisson Ratio (ν) | 0.3 |

表 6 : 8 × 8 板の固有値

| モード | 固有値 | モード | 固有値 |
|-----|-------|-----|-------|
| 1 | -0.48 | 13 | 0.23 |
| 2 | -0.34 | 14 | 0.76 |
| 3 | -0.32 | 15 | 1.23 |
| 4 | -0.19 | 16 | 2.05 |
| 5 | -0.12 | 17 | 2.39 |
| 6 | -0.09 | 18 | 7.06 |
| 7 | -0.06 | 19 | 7.49 |
| 8 | -0.03 | 20 | 7.63 |
| 9 | 0.03 | 21 | 7.95 |
| 10 | 0.08 | 22 | 8.71 |
| 11 | 0.14 | 23 | 11.10 |
| 12 | 0.16 | 24 | 20.42 |

以下で平板の固有モード解析から折面化，条件を満たす折線の構成，畳み解析という一連の流れを示す．図 10,11 は2.で提案した方法によって得た固有曲げモードと折面モードである．要素は有限要素法による9節点 degenerated-shell 要素を使用し，負又は0近傍の固有値のものを除いて小さな固有値に対応する順に並べた．なお z 軸方向変位は拡大して表示している．

mod18,20,22を除くと折線が想起しやすい変形となっていることが分かる．ここで mod18,22 は比較的折線が想起しにくいのでこれらを選び，可折条件を満たすような折線への変換を行う．

mod22の折面から判断できる山谷線は図 12(a)に示す部分である．内部は山谷が判別できない．ここに平坦可折面化操作を行うと(b)のような谷線が決定される．これは平坦折可能な折線であるが，剛体可折ではないため図右のような補助的な折線を入れる．図 11の mod18の山谷は平坦可折条件もやはり剛体可折条件も満たしていないため剛体折りを満たすような斜折線を挿入する．以上のように mod18,22はともに剛体可折ではないが，ここでは例題として折線を追加して可折面化を行っている．以上のような可折面化によって決定された山谷をもとにトラスモデルの畳み解析を行った．

表 7 : 解析諸元

| | |
|-------------------|----------------------------|
| $x \times y$ 寸法 | 50.0 × 50.0 |
| 初期変位/辺長 (z/l) | ±1/50 |
| 荷重条件 (mod18) | 端4点と辺中点から $z=0$ 面内方向へ各 1.0 |
| 荷重条件 (mod22) | 周縁16点から $z=0$ 面内方向へ各 1.0 |
| 拘束条件 | 内部4点を固定 |
| ステップ幅 dt | 0.1 |

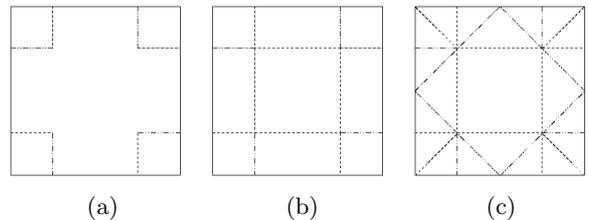


図 12 mod22の可折面化

図 13より，最終的な畳み形状にあつて折面化した周縁部での山谷情報は保存されていると分かる．しかし mod18では畳み進行中に明らかに面の交差が見られる．

なお mod22 を図 11 の折面化されたときの周縁部のみの情報から対称的な初期変位を作成し畳み込み解析を試みたとき、可折面でないため解析プロセスが停止してしまっていたが、可折面化操作によって面の内部の谷線を考慮した初期変位としたときに図のように解析が進行した、という点で可折性条件を考慮することの必要性がわかる。

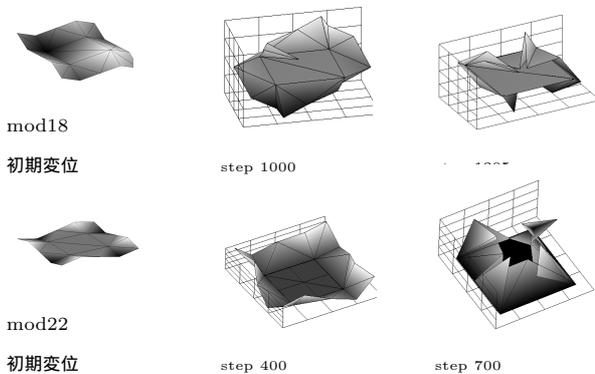


図 13 : mod18,22 の畳み込み経路

6 まとめと課題

膜構造の折線構造に対する折紙的なアプローチによる解析法を提案した。以下にそれぞれ提案した手法の妥当性について得られた知見をまとめる。

1. 弾性マトリクスを用いた曲げモードに基づく折線パターンの抽出法を提案した。
2. 平坦可折条件を整理した。
3. 剛体可折判定法を提案した。
4. 提案した平坦可折条件を満たす折線の構成法は幾つかの折りパターン例を可折面化するものの、まだ適用範囲が限定される。
5. 提案した剛体可折判定法は、導出では必要条件にすぎなかったが、多くの解析例から正しく剛体可折性が判定できることが分かった。

今後の課題として

1. 固有値が畳み込み特性に持つ意味を明確化すること
 2. 剛体可折判定法は完全な剛面を想定しているため実際の膜材より硬いという点の緩和
 3. 面の接触を考慮に入れた畳み込み経路解析モデルの確立すること
- などが挙げられる。

参考文献

[1] F.Otto, "IL 5 Wandelbare Dacher (Convertible Roofs)," Wittenborn and Company, 1972

[2] Osamu Mori, Yuichi Tsuda, Maki Shida, Jun'ichiro Kawaguchi, "Dynamic and Static Deployment Motions of Spin Type Solar Sail," 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, 2004

[3] 野島 "折紙・針金構造," 矢川編, 構造工学ハンドブック, 丸善, pp.819-822, 948-958, 2004

[4] 渡辺, 名取, "大型太陽電池セルの折り畳みと展開," 第 48 回宇宙科学技術連合講演会, pp.796-800, 2004

[5] 升岡, 古谷 "スピン展開ソーラーセイル膜面のための回転二重波折りパターンの提案とその展開実験," 第 46 回構造強度に関する講演会, 日本航空宇宙学会, 2004

[6] 三浦, 山本, 田畑, 谷沢, "テンショントラスアンテナの鏡面構成と機械特性," 第 31 回構造強度に関する講演会講演集, 日本航空宇宙学会・日本機械学会, 1989

[7] Miura, "Proposition of Pseudo-Cylindrical Concave Polyhedral Shells," Proceedings of the IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structure, 1970

[8] K.Tanizawa, K.Miura, "Large Displacement Configurations of Bi-Axially Compressed Infinite Plate," Transactions of the Japan Society for Aeronautical Sciences, Vol.20, No.50, pp.177-187, 1978

[9] Miura, "A Note on Intrinsic Geometry of Origami" Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Ferrara, Italy, pp.239-249, 1989

[10] Miura, "Fold-Its Physical and Mathematical Principle" Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, Otsu, Japan, pp.41-50, 1994

[11] S.D.Guest, S.Pellegrino, "The folding of triangulated cylinders, Part I, II: ," ASME Journal of Applied Mechanics, 61, pp.773-783, 1994

[12] Kawsasaki, "On High Dimensional Flat Origamis," Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Ferrara, Italy, pp.131-141, 1989

[13] Kawasaki, "R(γ)=I," Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, Otsu, Japan, pp.31-40, 1994

[14] T.C.Hull, "The Combinatorics of Flat Folds: A Survey," Proceedings of 3rd International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (T.Hull(ed), "Origami3", AKPeters, 2002)

[15] S-M.Belcastro, T.C.Hull: A Mathematical Model for Non-Flat Origami, Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education (T.Hull(Ed), "Origami3", AKPeters, 2002)

[16] D.Huffman, "Curvature and crease: a primer on paper," IEEE Transactions on Computers, vol.C-25, No.10, pp.1010-1019, 1976

[17] 島貫, 加藤, 渡辺, "展開図を用いた折り紙操作過程における手順毎の折り方構成," 電子情報通信学会研究報告 [パターン認識・メディア理解], PRMU2002-19, p.71-78, 2002

[18] 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析 - 一般逆行列とその応用, 培風館, 1991.

[19] 川口, 那花, 半谷, "骨組み構造の畳み込み解析," 日本建築学会構造系論文集, No.498, pp.99-104, 1997

[20] 宮崎, 川口, 半谷, "矩形板要素による膜構造の安定化移行解析," 膜構造研究論文集'95, 日本膜構造協会, pp.13-17, 1992

SYNOPSIS

The “Origamic” approach gives us useful information and suggestion in the design of folding pattern of membrane, which can be applied to retractable membrane roof or foldable membrane structures. In the Origamic approach, membrane is assumed that it has perfect shear rigidity and its flexural deformation occurs only along the crease line. In the paper extraction of basic folding pattern from eigen modes of bending deformation is firstly proposed. Then the condition of foldability and its applications to the generation of foldable pattern in the finite displacement range are also proposed. Finally the patterns and conditions are examined by folding analysis.

*1 Graduate Student, Department of Engineering, University of Tokyo

*2 Associate Professor, Institute of Industrial Science, University of Tokyo