

軸力線要素置換による任意境界形状最小曲面の形態解析

帯屋洋之^{1*}
井嶋克志^{2*}
村上卓志^{3*}
西田博之^{4*}
井口真一^{5*}

梗概

本論文では、任意の境界を有する石鹼膜等張力曲面形状 (= 最小曲面形状) を求めるための合理的な計算手法について述べる。線長比例軸力線要素を用いれば、剛性マトリックスが線形となるため反復計算を必要としない。また、どんなに複雑な境界形状を持つ場合であっても、定義された要素端力式に整合する完全な釣合解を得ることができる。よって、一旦、線長比例軸力線要素による釣合曲面を求めた後、石鹼膜要素に置換し解析を行えば、効率良く任意の境界形状を持つ最小曲面を求めることができる。

1. 緒言

空気膜構造やサスペンション膜構造は、膜材やケーブル材などの曲げに抵抗しない柔部材によって構成されるため、その設計にあたっては、予め初期の曲面形状を求めておく必要がある。この曲面形状 (原型曲面) を求める問題を含め、力学的合理性を持った釣合形状を求めるために行う数値解析を一般に形態解析⁽¹⁾という。

等張力曲面の形態解析には大別して二つの考え方が⁽²⁾ある。ひとつは内圧などの力学的条件を与えて面内応力一定条件に合う曲面形状を求める力学的な方法^{(3), (4), (5)}、もうひとつは内包体積などの幾何学的条件を入力することにより最小曲面を求める幾何学的な方法⁽⁶⁾である。それぞれ、収束性や求解過程の煩雑さなどの問題点があるものの、通常空気膜構造やサスペンション膜構造の原型曲面を求める問題に関しては、ある程度、信頼性できる解を得ることが可能になったといえる。

著者らは、これまで前者の力学的手法の立場から、要素端節点に離散化された要素座標系表示の要

素端力と基準座標系表示の節点力との間の釣合条件式より導かれる接線剛性方程式を反復使用する接線剛性法を用いて、等張力曲面の用いた形態解析を行ってきた^{(4), (5), (10)}など。また、一般的な有限要素法展開においては、たとえば文献⁽³⁾のように応力の釣合条件式によって定義される汎関数を基礎式として用いるのに対して、本手法では「力」のディメンジョンを持つ物理量間の非線形性を取り扱っているため、いわゆる変位法における三角形トラスブロックの幾何剛性と等価なものを用いて十分である。さらに、本手法は一般には収束性に問題があるとされている力学的手法の中にあっては、自由節点を1自由度系に低次元化処理することにより、非常に高い収束性を示すことが報告されている^{(4), (5)}。

しかしながら、三次元空間内の閉じた境界に対する最小曲面 (内圧が作用しない等張力曲面) を求める問題を考えるとき、平面ではなく三次元的な境界形状を与えた場合には隣接する要素の軌跡が交差するなどの数値計算上の問題により、収束解が得られないケースもある。これは、等張力石鹼膜要素

*1 佐賀大学 理工学部 都市工学科 助教授
*2 佐賀大学 理工学部 都市工学科 教授
*3 佐賀大学工学系研究科 大学院生 (博士前期課程)
*4 株式会社 九電工 北九州支店
*5 フォーラムエイト 福岡営業所

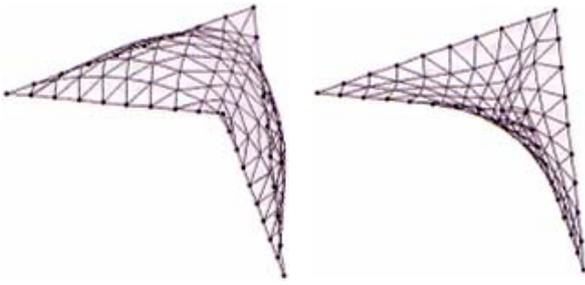


図-1 内圧のある状態(左)とこれを先行状態として得られるHP曲面(右) — 文献⁽⁴⁾より —

自体が面内方向に剛性を持たない、非常に不安定な挙動を示すことに起因すると考えられる。著者らの論文⁽⁴⁾においても、HP曲面を求める問題のような簡単な計算でさえ、前記のような軌跡の交差が発生するため、一旦内圧を与えて反復計算を行い、得られた解を先行状態として、さらに反復計算を重ねて行うことにより、最終解を得ている(図-1)。よって、たとえば螺旋境界のように非常に複雑な境界形状を与えた場合には、等張力曲面を得ることは容易ではないと考えられる。

一方で、このHP曲面に代表される最小曲面は、いわゆる膜構造や吊構造だけではなく、一般の商業施設や住宅の屋根形状に採用されるなど、意匠と力学的合理性を兼ね備えた新しいカタチとしての可能性を有している。デザイナーの感性により創造された、空間内の閉じた境界を、確かな力学的根拠を持った曲面で覆うことが可能であれば、構造物の設計の概念が大きく広がることになると考えられる。

本論文では、著者らが先に提案した線長比例軸力線要素⁽⁹⁾によって構成される釣合曲面が等張力曲面に近い形状となり、且つ線形解析で釣合形状を得ることができることに着目し、任意の境界形状を持つ最小曲面を求める問題に適用している。本論文における解析の手順は以下のとおりである。

- 1) 三角形メッシュあるいは四角形メッシュに分割した初期平面と固定境界を設定する。
- 2) メッシュ境界に線長比例軸力線要素を配し、境界節点のみを強制変位させて、空間内に自由に境界形状を描く。
- 3) 線形の軸力線解析により釣合形状が得られ、その後、線長比例軸力線要素を等張力石鹸膜要素に置換する。
- 4) 接線剛性法による幾何学的非線形解析により最小曲面(等張力曲面)を得る。

これにより、相当に複雑な境界形状を設定した場合でも、その境界に適合する最小曲面を得ることが可能となる。また、石鹸膜要素による幾何学的非線形解析に要する反復回数より1回多く連立一次方程式を解くだけで良いことになる。

2. 接線剛性法による形態解析

2.1 要素剛性分離

互いに独立な要素端力(線要素の場合は1つ、三角形膜要素の場合は3つ)の組を要素端力ベクトル \mathbf{S} とし、これと三次元空間に固定された基準座標系との間の平衡条件マトリックスを \mathbf{J} とすれば、基準座標系表示の外力としての節点力ベクトル \mathbf{U} は、

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

となり、この釣合条件式の変分をとると以下のように接線剛性方程式を得ることができる。

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{K}_0 は要素座標系内における要素挙動に起因する剛性であり、 \mathbf{K}_G は要素の剛体変位に起因する接線幾何剛性である。また、 $\delta\mathbf{u}$ は基準座標系表示された節点変位ベクトルである。

2.2 要素ポテンシャル関数

接線剛性法では、一般の有限要素法のように基準座標系から直接要素内のひずみを参照し、変位—ひずみ間の幾何学的非線形性を定式化するのではなく、要素端に離散化された互いに独立な要素端力と基準座標系表示の節点力との間の非線形性を線形の接線幾何剛性により収斂させる手法である。よって、要素内の有限ひずみについて煩雑な展開をする必要は無く、変形後の要素端節点座標から要素端力を厳密に計算することが出来れば、要素の挙動を任意に定めて用いることが可能である。たとえば、

- ・ 膜張力一定の三角形要素(石鹸膜要素)
- ・ 軸力一定の線材要素(定軸力線要素)
- ・ 軸力が要素長に比例する線材要素(線長比例軸力線要素)

などを同一のアルゴリズム内で用いることが出来、またこれらの要素を組み合わせることも可能である。

ここで、要素座標系内における要素挙動を規定するため、要素ポテンシャルを要素長、面積などの要素に関する幾何学量の関数として定義する。要素ポテンシャルを定義することは、要素に「仮想」の剛性を設定することと等価であり、任意の関数を定義しても、そこで規定された要素挙動に整合する釣合曲面が得られることになる。

いま、要素ポテンシャル P に対して、要素の形状を規定する上で互いに独立となる要素寸法の組を \mathbf{s} とすれば、

$$\mathbf{S} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{s}} \quad (3)$$

のように要素端力が得られる。

2.3 軸力線要素

ケーブル材やトラス材などの 1 次元部材によって構成される構造系の形態解析に関しては、軸力密度を指定する方法⁽⁷⁾や滑車節点を用いる方法⁽⁸⁾などが提案されている。

本論文における要素ポテンシャルを用いた軸力線要素の考え方は以下のとおりである。いま、要素ポテンシャルが線長 l のべき乗に比例するとし、この比例定数を要素端力係数 C として定義すれば、要素ポテンシャルを要素端力方向の寸法である線長で 1 階微分すれば、軸方向の要素端力が得られることになる。たとえば、

$$P = Cl^n \quad (4)$$

となり、これに式 (3) を適用すれば、

$$N = nCl^{n-1} \quad (5)$$

のように軸力線要素の軸力 N が得られる。また、この軸力線要素の方向余弦ベクトルを α とすれば、式 (1) は次式のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} N \quad (6)$$

従って、これを式(2)に代入すれば、

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \end{bmatrix} = nCl^{n-2} \begin{bmatrix} \mathbf{e} + (n-2)\alpha\alpha^T & -\mathbf{e} - (n-2)\alpha\alpha^T \\ -\mathbf{e} - (n-2)\alpha\alpha^T & \mathbf{e} + (n-2)\alpha\alpha^T \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。ただし、 \mathbf{e} は 3×3 の単位マトリックスである。

式(5)において、 $n=1$ の場合は要素寸法の変化にかかわらず軸力が一定となる定軸力線要素となり、式(7)は、通常のトラス部材の接線幾何剛性と一致する。よって、式(2)に $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$ を代入したことと等価となり、軸力を指定した形態解析が可能となる。

また、式(5)において、 $n=2$ とした場合は、要素の長さに軸力が比例する線長比例軸力線要素となり、式(7)は完全に線形になる。これにより、非追従力 (形状によって大きさ向きが変化しない節点外力) が載荷される場合には繰り返し計算が不要となり、追従力に対しても荷重の変分に起因する剛性項を付与することなく確実な収束性のもとに釣合解としての曲面形状を得ることができる。

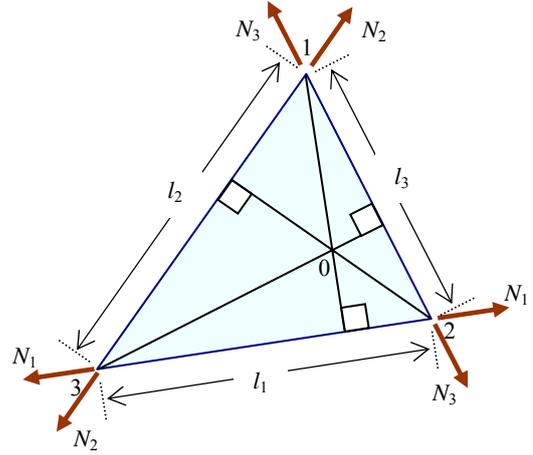


図-2 石鹸膜三角形要素

2.4 三角形石鹸膜要素

三角形要素の面積を A 、単位幅膜張力を σ (=一定) として、要素ポテンシャルが面積 A に比例するものと定義すれば、

$$P = \sigma t A \quad (8)$$

となる。これに対して、図-2 に示したように、独立な要素寸法の組を三角形要素の三つの辺長とした場合、独立な要素端力は、

$$N_i = \frac{\partial P}{\partial l_i} = \frac{1}{2} \sigma t r_i \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

のように各辺に沿う方向の力となり、これは文献⁽⁵⁾における三角形石鹸膜要素の辺張力と同じものになる。ここで、 r_i は三角形要素の垂心 (0 点) から各頂点までの距離である。よって、式(2)における接線幾何剛性 \mathbf{K}_G は、三角形トラスブロックの場合と同じになり、

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{G2} + \mathbf{k}_{G3} & -\mathbf{k}_{G3} & -\mathbf{k}_{G2} \\ -\mathbf{k}_{G3} & \mathbf{k}_{G3} + \mathbf{k}_{G1} & -\mathbf{k}_{G1} \\ -\mathbf{k}_{G2} & -\mathbf{k}_{G1} & \mathbf{k}_{G1} + \mathbf{k}_{G2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{k}_{Gi} = \frac{N_i}{l_i} (\mathbf{e} - \alpha\alpha^T), \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

のように表示できる。また、本論文でも文献(5)および(6)における考察に倣い、石鹸膜要素の要素力剛性 \mathbf{K}_0 は接線幾何剛性 \mathbf{K}_G に比べて非常に小さいものと考え、式(2)に $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$ を代入して計算を行うことにする。

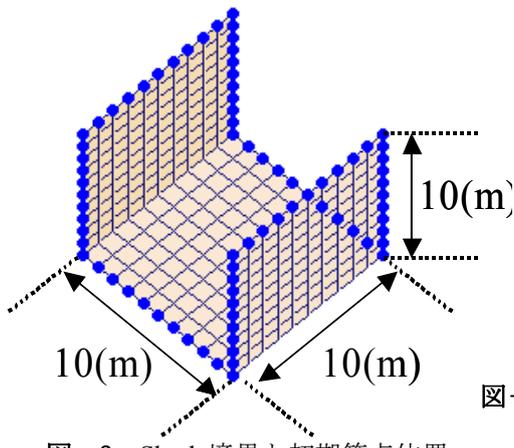


図-3 Shark境界と初期節点位置およびメッシュ分割、寸法

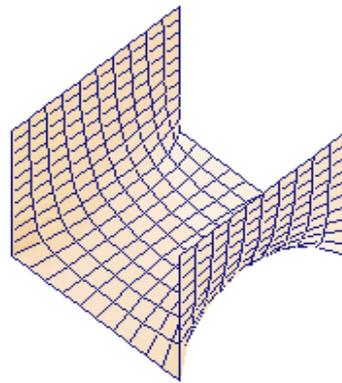


図-4 均一な要素端力係数により得られた釣合曲面

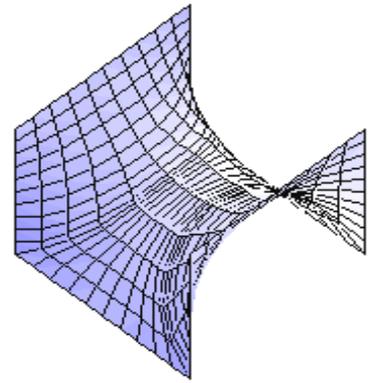


図-5 図-4を先行状態として得られた最小曲面

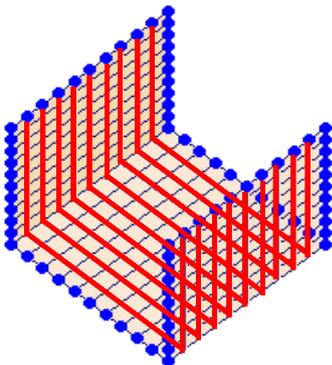


図-6 タテ軸力線（図中太線）とヨコ軸力線（図中細線）

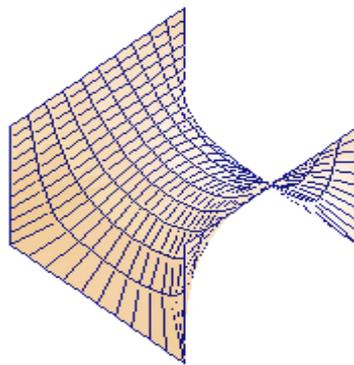


図-7 軸力線の密度を揃えて軸力線解析したときの解

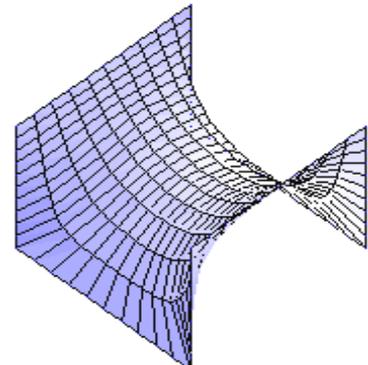


図-8 図-7を先行状態として得られた最小曲面

3. 数値計算例

3.1 線長比例軸力線置換による Shark 曲面解析

図-3のように一辺が10mで各辺10分割したシャーク境界に対して、式(5)の要素端力係数を $C=1.0\text{kN/m}$ 、 $n=2$ とした線長比例軸力線要素を配して解析を行うと、連立一次方程式を一度解いた時点で、全節点の不均衡力が0に収束し、図-4のような形状の解を得ることができた。その後、軸力線要素を、単位幅膜張力 $\sigma=2.0\text{kN/m}$ の四辺形石鹸膜要素（三角形石鹸膜要素を4枚張り合わせて単位幅膜張力を1/2に換算したもの）に置換して、接線剛性法のアルゴリズムに投入したところ、図-5のような最小曲面が得られた。

しかしながら、この解は最小曲面と等価な等張力曲面（面外方向の不均衡力が収束している）ではあるものの、メッシュの面積、形状に大きなばらつきがあり、最大不均衡力が3桁小さくなるまでの反復回数も24回と多くかかっている。これは、軸力線解析において要素端力係数を均一としているために、曲面を上を押し上げる作用をするタテ軸力線（図-6中の太線）の密度が、曲面を下を押し下げる作用をするヨコ軸力線（図-6中の細線）の密度に比べて小さくなり、実際の Shark 曲面よりも低い

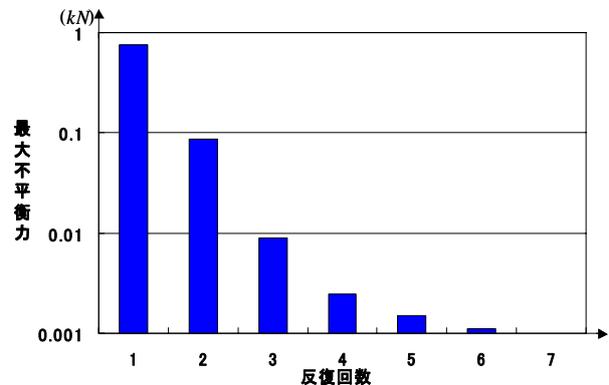


図-9 図-8の解から図-7の解を得るまでの最大不均衡力の推移

位置に偏った曲面となったことが原因と考えられる。（本稿における「上下」「タテ・ヨコ」の表現はあくまで、図のような配置を参照したものである。）

そこで、タテ軸力線の要素端力係数を 7.5kN/m 、ヨコ軸力線の要素端力係数をそのまま 1.0kN/m とし、軸力線解析を行ったところ、図-7のようにメッシュの揃った Shark 曲面に近い形状の解が得られた。さらに、これを先行状態として石鹸膜解析を行うと、節点の移動量も少なく、7回の反復計算の後に図-8の最小曲面を得ることができた。図-9はそのときの最大不均衡力の推移を示している。

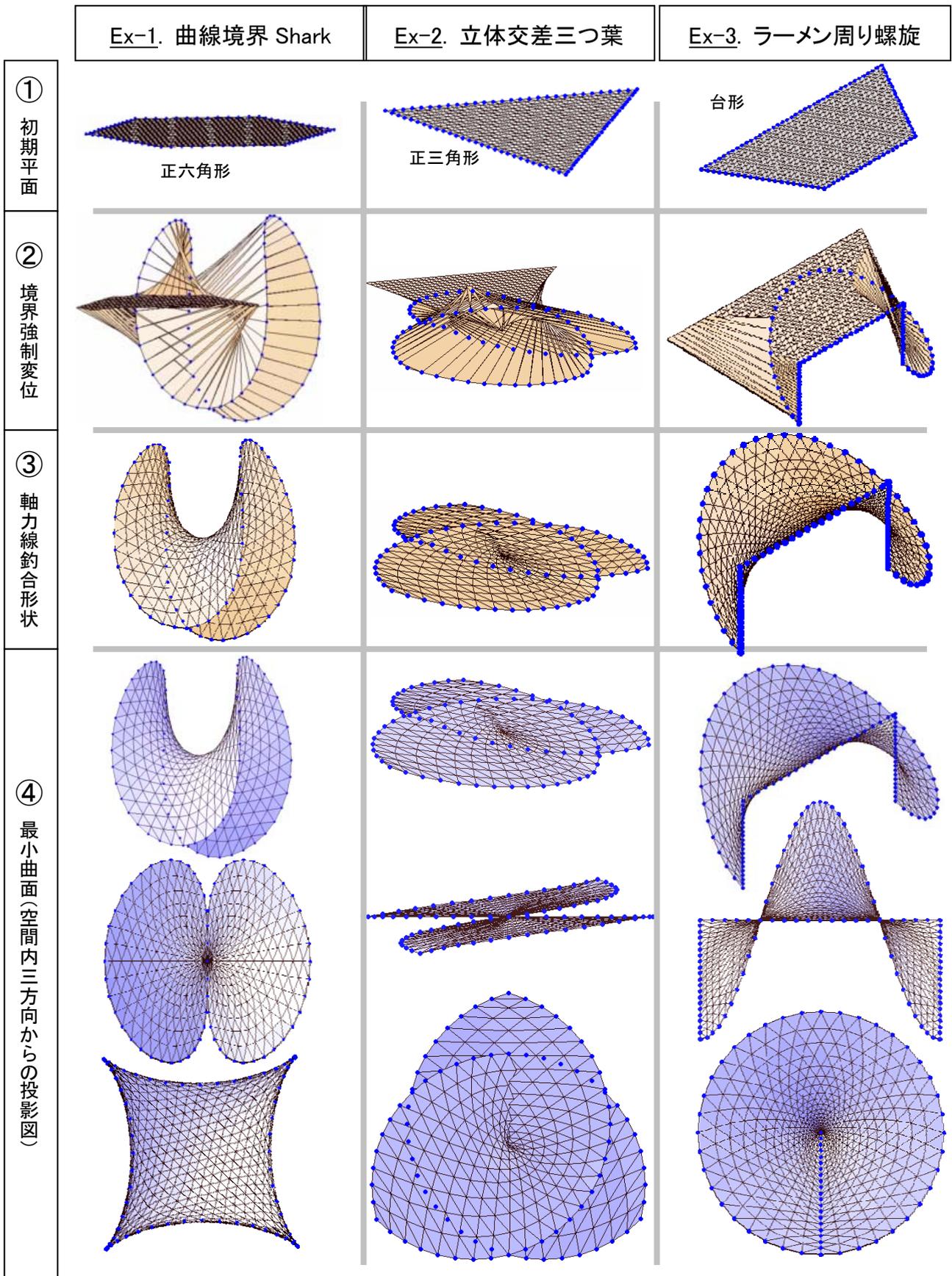


図-10 境界強制変位による最小曲面解析の数値計算例
 (いずれも、要素端力係数 $C=1.0\text{kN/m}$, $n=2$, 単位幅膜張力 $\sigma=2.0\text{kN/m}$)

3.2 周辺境界強制変位による最小曲面解析

図-10 に計算例を三つ示している。ここでは①のように初期平面とメッシュ分割を施し、②のように周辺境界節点を任意の形状に強制変位させて、線長比例軸力線解析によって石鹸膜形状解析のための初期形状③を定めた。Ex-1 はアステロイド曲線を基準に作成した曲線境界を持つ Shark 曲面、Ex-2 は境界線が立体交差するような三つ葉形曲線境界、Ex-3 は中央のラーメン型の枠の周りを曲線境界がちょうど一周するような螺旋形の境界である。いずれも、①の初期状態から一気に②のように境界節点を強制変位させ、連立一次方程式を一回解くことにより③の軸力線釣合形状を得ている。また、これを先行状態として石鹸膜形状解析を行うと、いずれの計算例の場合も要素端力係数 C を均一に設定しているにもかかわらず、10 回以内の反復計算で④のような最小曲面を得ることができた。

4. 結言

要素端力（軸力）が線長に比例すると定義した軸力線要素を用いて石鹸膜形状解析のための先行（初期）形状を効率的に求める形態解析方法の提案を行った。本手法によれば、軸力線の面内方向密度に偏りがあるようなケースを除き、複雑な境界形状であってもこれに整合し、かつ等張力条件を満たす最小曲面を得ることができる。よって、設計者にとっては、自由な発想で境界形状をデザインすることが可能となり、また、その境界形状を覆う合理的な曲面が得られるため、大空間構造その他の建築物の設計の自由度が大きく広がることが期待できる。

参考文献

- (1) 半谷裕彦,川口健一：形態解析,培風館,1991.
- (2) 石井一夫,膜構造の形状解析（形状決定の問題）概説：膜構造論文集, No.3, pp.83-108, 1989.
- (3) 鈴木敏男,半谷裕彦：等張力曲面形状の数値解析,膜構造論文集,膜構造研究論文集'89, pp.1-12, 1989.
- (4) 後藤茂夫,荒牧軍治,井嶋克志,深江葉子：要素剛性分離の手法による等張力曲面の形状解析と膜構造解析,構造工学論文集, Vol.37A, pp.307-314,1991.
- (5) 帯屋洋之,劉磊,井嶋克志,後藤茂夫：等張力曲面解析における接線幾何剛性,膜構造研究論文集'94,pp.77-85,1994.
- (6) 八木孝憲,大森博司,石原競：極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究,日本建築学会構造系論文集, No.502, pp. 99-104,1997.
- (7) Schek, H.J. : The force density method for form finding and computation of general networks. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 3, pp.115-134. , 1974.
- (8) 岩崎英治,長井正嗣：滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.
- (9) Ijima K., Obiya H. : Formfinding of single layer structure by measure potential function of element, *Structural morphology*, pp.249-256, 1997.
- (10) 帯屋洋之,井嶋克志,後藤茂夫,荒牧軍治,川崎徳明：サイマルコントロール法による膨張曲面の形態解析, 日本計算工学会論文集, Vol.4, pp.37-77,2002.

FORM-FINDING FOR MINIMUM CURVED SURFACE HAVING ARBITRARY BOUNDARY SHAPE BY SUBSTITUTING AXIAL-FORCE LINE ELEMENTS FOR SOAP FILM ELEMENTS

Hiroyuki Obiya*1
Katsushi Ijima*2
Takashi Murakami*3
Hiroyuki Nishida*4
Shin-ichi Iguchi*5

SYNOPSIS

This study describes rational calculation technique to determine soap film isotonic surface (= minimum shape) having arbitrary boundary shape. Axial-force line element whose element force is proportionate to its own length can find a complete balanced shape without iterations. Therefore, the shape can be primary shape for isotonic surface analysis, and we can obtain minimum surface even when it has so much complex boundary shape in the space.

-
- *1 Associate Professor, Saga University
 - *2 Professor, Saga University
 - *3 Graduated Student, Saga University
 - *4 Kyudenko
 - *5 Forum8