

膜構造物の簡易膜張力測定装置の開発

陳 商煜^{*}
大森博司^{**}

梗 概

大空間建築に多用される膜構造物では、構造物の竣工後において膜面に導入されている張力レベルを適切に維持する必要がある。しかしながら、これを正確に測定できる装置は無論、測定の方法も未だ確立されておらず、現場では熟練した技術者の勘に頼った作業が行われているのが現状である。本論文では、膜材の張力を精度よく測定するために、音波を用いた簡易膜張力測定法を提案し、実験的にその精度を検証する。また、膜材の張力を精度良く測定するためには、空気の付加質量の影響を正しく考慮する必要がある。この空気の付加質量が膜の振動に及ぼす影響についても理論的に評価する。

1 はじめに

近年、数多く設計されるようになった膜構造物の最大の弱点は張力の正確な維持管理が困難であることである。施工の初期張力導入の段階では、膜の巻き取り器具などの反力により、ある程度把握することができるが、竣工後はこれを定量的につかむことが非常に困難である。ところが強風によるばたつき（フラッター）や雨水の局部的滞留（ボンディング）は膜の破断につながる致命傷になることもあり、竣工後に膜構造物に生じている膜張力の大きさを知ることは、維持管理の観点から大変重要で、これを可能とする技術に大きな期待が寄せられている。

膜張力の測定に関する技術は、これまでにいくつか試みが成されてきており、実際に現場で利用されているものもある。しかし、膜張力を定量的に把握することからは程遠い精度であり、ほとんど役に立っていないのが現状である。さらに、膜材料の直交異方性の特徴により、膜面の縦糸と横糸には別々の張力が導入されることもあるが、それを別々に測定することは従来の技術では不可能である。

本研究では、図1のように、音波を用いた測定技術を提案する。その原理は図2のような長さ $a \times b$ の長方形の境界面を持つ膜面を可聴域の振動数を持つ音波で加振し、膜面の持つ固有振動数近傍で起こる共振振動数を測定することで、間接的に膜面に作用している張力を測定するものである。理論的には、直交二方向の張力を別々に測定するこ

とが可能で、これができれば膜構造物の設計施工の技術分野に対する貢献は非常に大きい。

本報では、上述の膜張力測定の理論および検証実験結果を報告する。膜張力を精度よく測定するためには空気の付加質量の影響を正しく考慮する必要があるが、ここでは最小二乗法により近似的に考慮する方法と、空気の付加質量を流体反力として扱って理論的に評価した場合について併せて記述する。

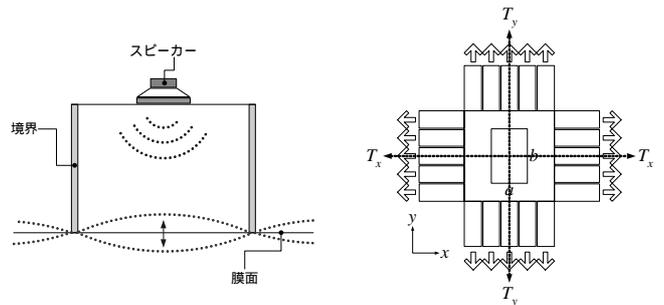


図1 測定装置の概略図

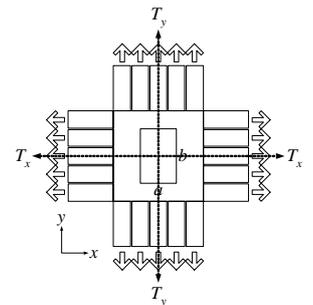


図2 膜面の境界部

2 基礎理論

x, y 方向の張力が異なる膜の運動方程式は次のように表される。

$$-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_y \right) = p \quad (1)$$

ここで、 $w = w(x, y, t)$ は膜面の面外のたわみ、 t は時間、 p

* 名古屋大学大学院環境学研究科 大学院生

** 名古屋大学大学院環境学研究科 教授 工学博士

は外圧、 ρ は膜の単位面積当たりの質量を表している。また、 T_x, T_y はそれぞれ x, y 方向の単位長さ当たりの張力を表している。

式 (1) を満足する w, p として次のような変数分離形の関数を考える。

$$w = W(x, y)e^{i\omega t}, \quad p = P(x, y)e^{i\omega t} \quad (2)$$

式 (2) を式 (1) に代入すると次式が得られる。

$$\rho\omega^2 W + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} T_x + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} T_y \right) = P \quad (3)$$

周辺固定の短形膜を考えると、振動形 $W_{mn}(x, y)$ は

$$W_{mn} = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

と表すことができ、これを式 (3) に代入すると次式を得る。

$$\left\{ \rho\omega^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} T_x + \frac{n^2}{b^2} T_y \right) \right\} C_{mn} W_{mn}(x, y) = P(x, y) \quad (5)$$

式 (5) は、外力 p により膜面を振動させたとき、左辺で示される振動形状になることを表している。今、膜面が自由振動する場合を考えると、左辺の係数がゼロとなるので、固有円振動数 ω_{mn} は次のようになる。

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} T_x + \frac{n^2}{b^2} T_y}} \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

膜面の固有円振動数から直交二方向の張力を推定することを考える。 $2\pi f = \omega$ の関係式を用いると、固有振動数 f_{mn} は次のようになる。

$$f_{mn} = \sqrt{\frac{1}{4\rho}} \cdot \sqrt{T_x \frac{m^2}{a^2} + T_y \frac{n^2}{b^2}} \quad (7)$$

いま 2 種類の異なった加振音源の振動数 f_1, f_2 に対して膜面が共振したとき、式 (7) より次式が成立する。

$$\begin{aligned} T_x \frac{m^2}{a_1^2} + T_y \frac{n^2}{b_1^2} &= 4\rho f_1^2 \\ T_x \frac{m^2}{a_2^2} + T_y \frac{n^2}{b_2^2} &= 4\rho f_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 T_x, T_y はそれぞれ互いに直交方向の膜張力、 a_1, b_1 は振動数 f_1 の、 a_2, b_2 は振動数 f_2 の、それぞれ加振音源境界面の各辺の長さを表し、 m, n は振動モードの波の数を示す。

(8) 式より、共振時における膜面の固有モードとそのときの固有振動数が測定できれば、 T_x, T_y の直交二方向の膜張力を別々に求めることができることが分かる。

3 検証実験

本研究で提案する張力測定装置は、膜張力を音波加振により非接触かつ高精度に測定するものである。

図 3 に示すように装置は、スピーカー、音源部、レーザー変位計測部、箱形境界部、並びに記録装置からなる。スピーカーは音源部からの電圧を受け、適量の大きさで振動数を持つ音波を発信し、レーザー変位計測部は音波を受けて共振する膜面の変位を非接触で計測する。境界部は、その端部を膜面に接触させることで膜面に振動境界を作る役割を持つ。境界部は 20cm × 30cm の平面形状としている。

二軸引張装置により、検証実験を行った。今回の実験において利用した膜材は膜材料 A 種で、概略の形状は図 2 に示されているとおりである。スリット部分以外の膜面の大きさは 40cm × 40cm、面密度は約 1.3kg/m² である。膜面に導入する直交二方向の張力パターンを表 1 に示す。

加振はファンクションジェネレータを用いて通常のスイープ加振を行った。図 4 は測定装置および膜面に試験装置を置いた状態での音波加振実験の様子を示している。

測定実験から求められた結果を図 5 に示す。横軸は設定した張力のパターンを表しており、縦軸は測定実験から求められた値をそれぞれの設定応力で割った値であり、1 に近いほど精度が良いことを示している。

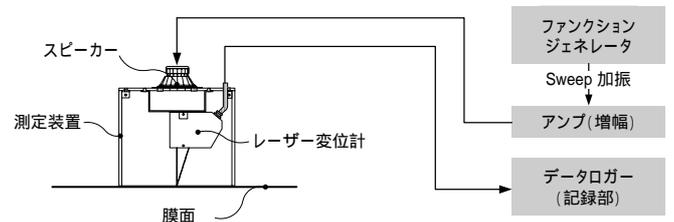


図 3 実験の概略図

表 1 張力パターン (単位: kgf/cm)

| | T_x | T_y |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 等張力 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 3.0 | 5.0 | 5.0 | 10.0 | 10.0 | 20.0 | 20.0 |
| 異張力 | 2.0 | 1.0 | 6.0 | 3.0 | 10.0 | 5.0 | 20.0 | 10.0 | | |
| | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 6.0 | 5.0 | 10.0 | 10.0 | 20.0 | | |

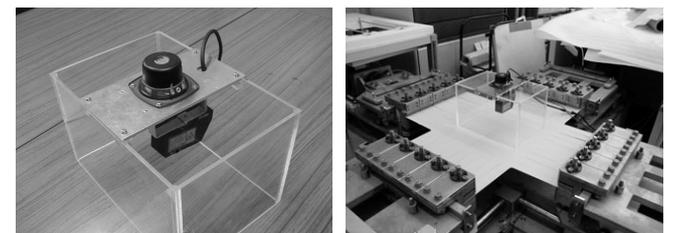


図 4 実験装置及び測定実験の様子

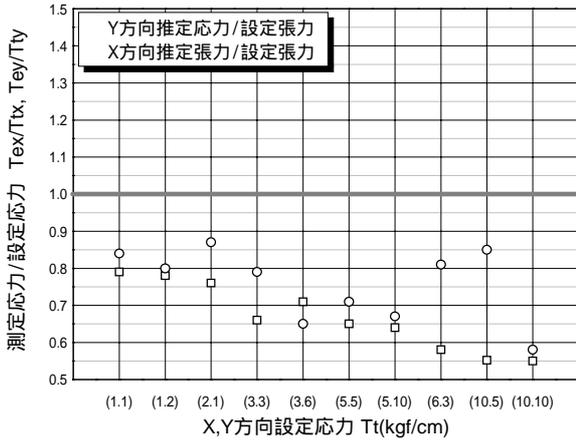


図5 測定結果

4 空気の付加質量の近似的評価

図5の実験結果では、高張力になるにつれて精度が落ちていくことが分かる。その原因の一つとして、膜面上の空気が膜面の共振時に空気バネの役割を果たして、膜面に何らかの影響を与えた可能性が考えられる。ここでは膜面の共振振動数が空気の付加質量に影響されると仮定して、最小二乗法により誤差最小化を考える。

周辺固定の矩形膜で、2種類の異なった加振音源の振動数 f_1, f_2 に対して膜面が1次共振したとき、式(8)で $m=n=1$ とすれば、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^2} T_x + \frac{1}{b_1^2} T_y &= 4\rho f_1^2 \\ \frac{1}{a_2^2} T_x + \frac{1}{b_2^2} T_y &= 4\rho f_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 T_x, T_y はそれぞれ互いに直交方向の膜張力、 a_i, b_i ($i=1, 2$) は振動数 f_i の加振音源境界面の長さ、また ρ は膜面密度を表す。(9)式を次式のように表す。

$$[A]\{T\} = \{f\} \quad (10)$$

$$\text{ここで、} [A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & \frac{1}{b_1^2} \\ \frac{1}{a_2^2} & \frac{1}{b_2^2} \end{bmatrix}, \quad \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = 4\rho \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

式(10)から膜張力 $\{T\}$ は次式によって求められる。

$$\{T\} = [A]^{-1}\{f\} \quad (11)$$

ここで、固有振動数 $\{f_i\}$ の異なる実験結果が n 回行われたと仮定すると、表(2)に示すように、 $\{T_0\}_i$ と $\{T\}_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) を得る。ここで、 $\{T\}_i = [A]^{-1}\{f\}_i$ を表す。したがって、誤差ベクトル $\{e\}_i$ は次式で構成される。

$$\{e\}_i = \{T\}_i - \{T_0\}_i = [A]^{-1}\{f\}_i - \{T_0\}_i \quad (12)$$

全体の誤差の尺度として次式を考える。

表2 n 回実験

| 実験番号 | 1 | 2 | 3 | ... | i | ... | n |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 設定応力 (真の膜張力) | $\{T_0\}_1$ | $\{T_0\}_2$ | $\{T_0\}_3$ | ... | $\{T_0\}_i$ | ... | $\{T_0\}_n$ |
| 式(11)から 推定された膜張力 | $\{T\}_1$ | $\{T\}_2$ | $\{T\}_3$ | ... | $\{T\}_i$ | ... | $\{T\}_n$ |

$$e = \sum_{i=1}^n \{e\}_i \{e\}_i \quad (13)$$

ここで、式(9)の ρ に、空気の付加質量の影響が混入していると考え、これが振動数の関数として次式のように表されるものと仮定する。

$$\rho = \rho(f) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}f + \rho^{(2)}f^2 \quad (14)$$

式(14)の係数を式(13)で表される誤差を最小化するように決めることにする。振動数ベクトル $\{f\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{f\} &= 4 \begin{Bmatrix} \rho(f_1)f_1^2 \\ \rho(f_2)f_2^2 \end{Bmatrix} = 4 \begin{Bmatrix} (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}f_1 + \rho^{(2)}f_1^2)f_1^2 \\ (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}f_2 + \rho^{(2)}f_2^2)f_2^2 \end{Bmatrix} \\ &= \rho^{(0)}\{f^2\} + \rho^{(1)}\{f^3\} + \rho^{(2)}\{f^4\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{ここで、} \{f^2\} = 4 \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}, \quad \{f^3\} = 4 \begin{Bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix}, \quad \{f^4\} = 4 \begin{Bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \end{Bmatrix}$$

式(13)で表された誤差を式(14)の係数 $\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ により最小化するための条件式は次のようになる。

$$\frac{\partial e}{\partial \rho^{(k)}} = 0, \quad k=0, 1, 2 \quad (16)$$

結局、式(16)を解くことによって近似式(14)の各係数は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= 1.310546 \\ \rho^{(1)} &= 3.059431 \times 10^{-3} \\ \rho^{(2)} &= 7.653458 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (17)$$

したがって、空気の付加質量の影響は式(9)の面密度 ρ

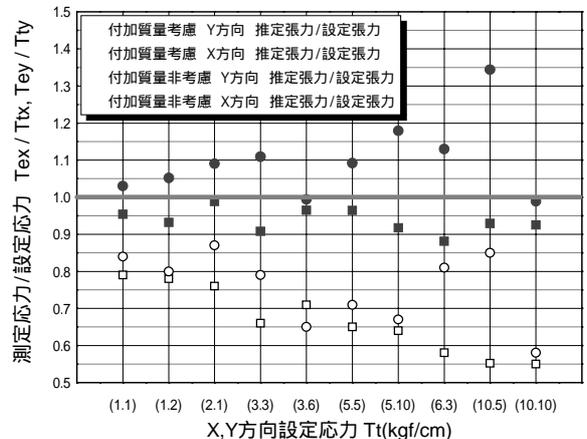


図6 誤差最小化による結果

を次式で評価することによって考慮できることになる。

$$\rho = \rho(f) = 1.310546 + 3.059341 \times 10^{-3} f + 7.653458 \times 10^{-6} f^2 \quad (18)$$

図6の中で ρ の記号は、式(18)で求められた膜面密度を、膜張力算定式である(9)式に用いることによって得られる付加質量の影響を考慮した結果を示している。

5 空気の付加質量の理論的考察

ここで、空気の付加質量を流体反力として扱い、膜の振動に及ぼす付加質量の影響を理論的に評価する。

5.1 無限平面境界板を有する円形板の放射インピーダンス

板の振動による媒質の影響は、振動板に無数の点音源が媒質中で音を放射するとき、それらが振動板に及ぼす影響に置き換えることができる。板の振動によって媒質中に音を放射すると、振動面にも音圧が生じ、板の振動を抑えるように働く。したがって、板を媒質中で真空中と同じ速度で振動させるためには余分な力が必要となる。よって、音の放射を考えると、音圧の反作用による余分なインピーダンスを考えなければならない。この余分のインピーダンスを放射インピーダンス(Radiation Impedance)といい、振動板の振動に影響を及ぼす。

図7のように円形平面音源が、角振動数を ω (rad/s) としたとき、複素速度 $\bar{U}_0 = U_0 e^{j\omega t}$ で運動しているものとする。円形平面音源上の微小面積 dA の振動によって、距離 r_1 離れた同じ平面上の任意の dA' に生じる速度ポテンシャル $d\bar{\phi}$ は次式で与えられる。

$$d\bar{\phi} = \frac{\bar{U}_0}{2\pi r_1} e^{-jk r_1} dA \quad (19)$$

ここで、 $k = \omega/c$ (波数) である。

したがって、振動面全体によって dA' に生じる速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ は、(19)式を振動面全体の面積 S で積分することによって得られる。

$$\bar{\phi} = \frac{\bar{U}_0}{2\pi} \int_s \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} dA \quad (20)$$

微小面積 dA' の音圧を \bar{p} 、媒質の密度を ρ_0 としたとき式(20)から次式を得る

$$\bar{p} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = j\omega \rho_0 \bar{\phi} \Big|_{dA'} = \frac{j\omega \rho_0 \bar{U}_0}{2\pi} \int_s \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} dA \quad (21)$$

dA' 上に働く力は $\bar{p} dA'$ であるから、振動面全体に働く力 \bar{F}_r は次のようになる。

$$\bar{F}_r = \int_s \bar{p} dA' = \frac{j\omega \rho_0 \bar{U}_0}{2\pi} \int_s \left(\int_s \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} dA \right) dA' \quad (22)$$

$$= \rho_0 c \pi a^2 (R_1(2ka) + jX_1(2ka)) \cdot \bar{U}_0 \quad (23)$$

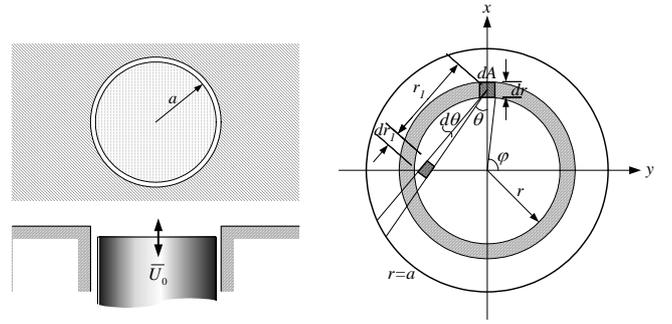


図7 境界を持つ円形板の放射面

ただし、 k は波数、 a は振動板の半径、 c は音速で、 J_1 を第1種のベッセル関数、 K_1 を第1種変形ベッセル関数とすれば、 $R_1(2ka)$ 、 $X_1(2ka)$ はそれぞれ次のような級数で表される。

$$R_1(2ka) = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} = \left(\frac{(2ka)^2}{2 \cdot 4} - \frac{(2ka)^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{(2ka)^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \right) \quad (24)$$

$$X_1(2ka) = \frac{2K_1(2ka)}{(2ka)^2} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2ka}{3} - \frac{(2ka)^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{(2ka)^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right) \quad (25)$$

放射インピーダンス \bar{Z}_r は駆動力 \bar{F}_r と速度 \bar{U}_0 の比で定義されるので、次式のように書ける。

$$\bar{Z}_r = \frac{\bar{F}_r}{\bar{U}_0} = \rho_0 c \pi a^2 (R_1(2ka) + jX_1(2ka)) \quad (26)$$

$$\bar{F}_r = \bar{Z}_r \cdot \bar{U}_0 e^{j\omega t} \quad (27)$$

したがって、媒質中の振動方程式は次のようになる。

$$m \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} + R_m \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + s \bar{\xi} = \bar{F} e^{j\omega t} - \bar{Z}_r \bar{U}_0 e^{j\omega t} = (\bar{F} - \bar{Z}_r \bar{U}_0) e^{j\omega t} \quad (28)$$

ここで、 m は質量、 R_m は減衰定数、 s は円形板の剛性係数を表す。

式(28)を解くと円形板の速度は次式で与えられる。

$$\bar{u}_p = \frac{(\bar{F} - \bar{Z}_r \bar{U}_0) e^{j\omega t}}{R_m + j(\omega m - s/\omega)} \quad (29)$$

円形板の動きを、 $\bar{u}_p = U_0 e^{j\omega t}$ と仮定すれば、式(29)から次式が得られる。

$$U_0 = \frac{\bar{F}}{R_m + j(\omega m - s/\omega) + \bar{Z}_r} \quad (30)$$

$$U_0 = \frac{\bar{F}}{\bar{Z}_m + \bar{Z}_r} \quad (31)$$

ここで、 $\bar{Z}_m = R_m + j(\omega m - s/\omega)$ は機械的インピーダンス、 \bar{Z}_r は放射インピーダンスであって、実部の放射抵抗 R_r 、虚部の放射リアクタンス X_r の和で定義されており、次のように書ける。

$$\bar{Z}_r = R_r + jX_r \quad (32)$$

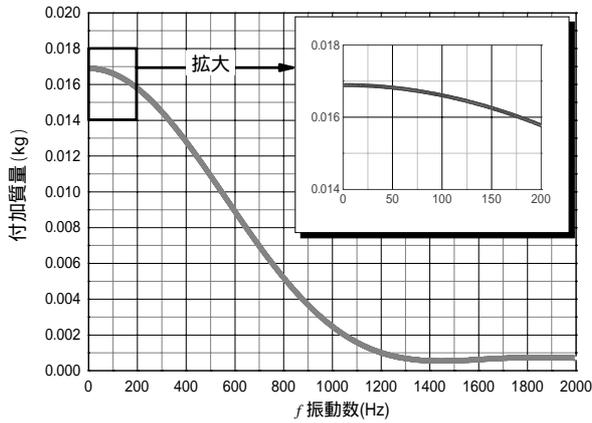


図8 円形板に等価な長方形平板の付加質量

すなわち、円形板を速度が U_0 になるように駆動するには U_0 方向に \bar{F}_r に等しい力を加えなければならないことが分かる。

式(23)の実部、放射抵抗は \bar{U}_0 と同位相の力であってエネルギーを消費するが、放射リアクタンスである虚部は \bar{U}_0 より位相が 90° 進み、ただ空気を前後に動かすだけで、エネルギーを消費しない成分である。これらを角振動数で割れば、加速度に関係する質量の次元を持つ量を得る。これは、常に正であって、円形板の質量 m に付加的な質量を加える役割をする。これが放射による付加質量で次式で表される。

$$\Delta m = \frac{X_r}{\omega} = \frac{X_r}{kc} = \rho \pi a^2 \frac{X_1(2ka)}{k} \quad (33)$$

5.2 円形板面積に等価な長方形板の放射インピーダンス

各辺の長さが $a=0.3m$ 、 $b=0.2m$ である長方形平面の振動による放射インピーダンスを同じ面積を持つ等価円板に置換して求める。すなわち、 $a \times b (=0.2m \times 0.3m) = \pi r^2$ を満足する、半径 $r=0.1382m$ を考える。ただし、長方形平面は円形板に近似されたものとする。その結果を図8に表す。

図8を見ると付加質量は、振動数の関数であって、振動数の増加につれてその影響は少なくなる。しかし、低振動数領域では、振動体の密度が媒質に比べて高くないときは無視できないものであり、その値は一定値となることが分かる。

5.3 空気の付加質量の影響の考察

誤差最小化で仮定した、付加質量加味の全膜面密度式は次式で与えられている。

$$\rho = \rho(f) = 1.31056 + 3.059341 \times 10^{-3} f + 7.653458 \times 10^{-6} f^2 \quad (34)$$

式(34)は膜面の振動に関わる全密度であるから次のように書ける。

$$\rho = \rho(f) = \rho_{\text{membrane}} + \Delta \rho \quad (35)$$

ここで、 ρ_{membrane} は膜材の面密度、 $\Delta \rho$ は付加された面密度を表す。

膜材の面密度に対して付加される面密度の割合を次式で評価する。

$$\rho = \rho(f) = \rho_{\text{membrane}} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_{\text{membrane}}} \right) \quad (36)$$

また、理論的に評価した長方形平面の付加膜面密度も同様にして得られる。ただし、 $\Delta \rho = \Delta m / ab$ で求められる。この2つの付加面密度の割合を図9に示す。

誤差最小化では、付加質量の影響が振動数に依存して高くなり、振動数200Hz付近では割合が80%までに近づくことが分かる。

しかし、理論的評価では、低振動数領域で付加質量の影響はほぼ一定であって、膜の振動に及ぼす空気の影響は、面密度が20%増加した膜が真空中で振動するのと同じであることが分かる。空気の付加質量の理論的考察による結果を図10に示す。

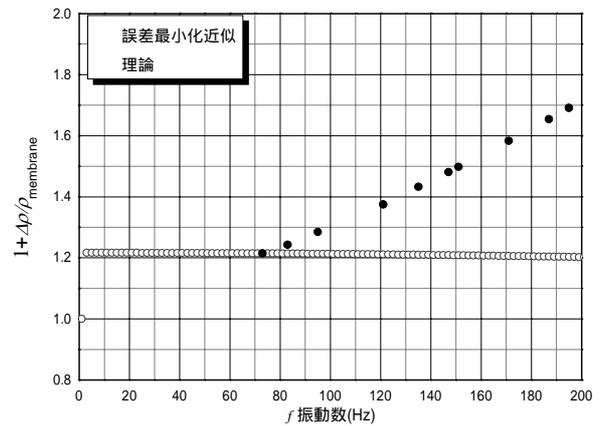


図9 付加面密度の割合

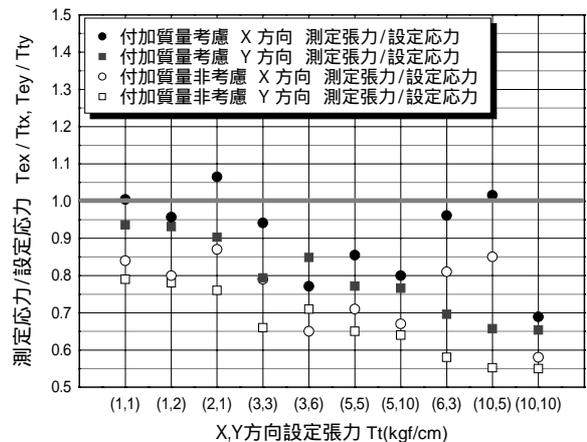


図10 付加質量の影響の検討

6 まとめ

本研究では、膜張力を定量的に、二方向別々に、高い精度で測定でき、かつ現場で実用化できる膜張力の測定方法として音波を用いた方法を提案し、実験により精度の検討を行った。また、誤差の原因の一つと考えられる空気の付加質量の影響を経験則により近似的に考慮した場合と、等価な円形板を用いて理論的に評価した場合について検討を行った。

誤差最小化近似では、付加質量が振動数とともに変化すると仮定したが、理論的評価により、付加質量が振動数の関数でありながらも低振動数ではほぼ一定の値を持ち、高振動数になるに従って消失することが明らかになった。実験では膜の固有振動数が最大 200Hz を超えないので、付加質量の影響はここで問題としている振動数域では振動数に関係なく一定であるといえる。

以上の成果に基づいて、今後は膜張力の簡易測定装置の試作を進める予定である。

参考文献

- [1] 大森博司, 呉 明児: 膜張力の非接触測定法の開発に関する実験的研究, 日本建築大会学術講演梗概集(北陸) B-1, pp.847-848, 2002
- [2] 陳 商煜, 候 興国, 呉 明児, 大森博司: 空気の付加質量を考慮した簡易膜張力測定法に関する研究, 日本建築大会学術講演梗概集(北海道), B-1, pp.917-918, 2004
- [3] Stephens & A.E.Bate: Acoustics and Vibrational Physics, Edward Arnold Ltd., pp.687-715, 1966
- [4] 早坂寿雄: 音響工学概論, 日刊工業新聞社, pp.121-142, 1977
- [5] 太田光雄編: 基礎物理音響学, 朝倉書店, pp.81-113, 1990

Development of Measurement Equipment of Membrane Stress for Membrane Structures

Sang Wook JIN^{*}, Hiroshi OHMORI^{**}

SYNOPSIS

This paper presents a basic concept of a new method for measuring the tension stresses of the membrane materials, which is based on resonance phenomenon induced by the sound waves. Evaluation scheme for the added mass effect on vibration of the membrane is discussed, where two different approaches are adopted. It is shown that the proposed measurement scheme can be used for the prediction apparatus of the membrane tension stresses, where the accuracy of the measurement can be achieved by proper consideration of the added mass effect of the surrounding air. More precise scheme for evaluation of the added mass effect as well as production of the measurement device of membrane stresses are next subjects for the future work.

* Graduate Student, Department of Environmental Engineering and Architecture, Graduate School of Environmental Studies, Nagoya University

** Dr.-Eng. Prof., Department of Environmental Engineering and Architecture, Graduate School of Environmental Studies, Nagoya University