

座標値を未知量とした有限要素法による 張力構造の解析と評価

本間 俊雄*
安宅 信行**

概 要

変位仮定に属する座標値を未知量とする有限要素法を用い、幾何学的非線形性を考慮したケーブル(トラス)要素と膜要素の離散化定式化を示す。得られた定式化の考察と幾つかの張力構造の数値解析例により、本離散化が張力構造特有の張力導入や裁断線決定などを含む張力構造の静的・動的な応力・変形解析を統一的に扱え、実現象に対応してイメージしやすい解析手段になり得ることを説明する。

1. はじめに

従来の構造解析における有限要素法の変位法は、初期状態が安定形態を維持した構造モデルの解析を想定したものである。つまり無荷重状態のとき無応力で剛性を有する形態が与えられ、変位が生じていない状態を出発点とする離散化解析法である。これに対し張力構造は、構造材の持つ特性から張力をあらかじめ導入しなければ、安定した構造剛性が確保できない特殊性を持つ。通常、このような構造は、初期状態が形状不確定な自然状態で存在する(自然状態とは無応力状態で、緩んだ不安定な状態あるいは折り重なった状態を意味する)。したがって、変位を未知量とした従来の変位法による有限要素法を張力構造解析に適用するには、種々工夫しなければならない。必ずしも実現象に対応した解析とはイメージが一致しない。

一般に張力構造の設計は次の手順による。膜構造の場合、まず等張力曲面などの応力状態を考慮した設計原型曲面を設定する[1-8]。次に、工場で製作された帯状の平面膜材を、設定した設計原型曲面に基づき、縮尺率を織り込みながら立体裁断する。裁断した膜材は、裁断線に沿って縫合し、構造条件を導入する。すなわち境界条件や初期張力を与えることで設計曲面を得る。しかし、得られた曲面は、膜材の織布特性や

立体裁断の内容等、種々の条件と近似化により、必ずしも想定した形状や応力状態にならない。ここに、より正確な裁断線決定に関する研究が重要になる[8-13]。また、得られた初期形態(設計曲面)に対し、静的、さらには必要に応じて動的な応力・変形解析へと進める。ただし、膜材に対して高い精度で裁断線が得られたとしても、実際には裁断や縫合時に不整が生じる。他にもいろいろな構造不整が存在する。このような不整に対する力学的評価も実施しなければならない。あるいは張力導入に関連した施工時解析もある。ケーブル構造や複合張力構造の場合も上述したような張力構造特有の解析を順次実施する必要がある[13-16]。

本論では、張力構造の種々ある解析において、統一的な考え方で数値解析ができる幾何学的非線形性を考慮した有限要素法による解法を提案し、定式化と評価及び簡単な数値例と考察を示す。これらの内容から、変位法に属するものの未知量を変形後の系全体の座標値とする本解法[17-19]は、張力構造の解析と構造形態の把握がしやすく、利便性があることを明らかにする。張力構造解析は、ケーブルや膜構造あるいは複合張力構造に対する設計原型形態の決定、部材配置や裁断線の決定、および接合や縫合不整に対する評価も含めた静的・動的な応力・変形解析まで考えている。

* 鹿児島大学 工学部 建築学科 助教授, 工博

** 昭和女子大学 生活機構研究科 生活機構学専攻 教授, 工博

2. 平衡方程式

仮想仕事の原理により、ひずみ γ を変位ベクトル \mathbf{u} で表現すると平衡方程式は次のように導かれる[16]。

$$\int_{\Omega} \delta\gamma(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) d\Omega - \delta\mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\tau}$: 応力、 \mathbf{f} : 外力モードベクトル、 $\boldsymbol{\lambda}$: 外力パラメータ、 Ω : 解析領域である。ひずみ γ と変位 \mathbf{u} の関係及びひずみ増分 $\delta\gamma$ と変位増分 $\delta\mathbf{u}$ の関係は以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^*(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} \quad (2a,b)$$

式(2a)のひずみ-変位関係は、通常、次の Green ひずみを用いる場合が多い。

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{\delta\beta}], \quad \gamma_{\delta\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\beta}} \right) \quad (3a,b)$$

これに対し、式(3b)と同等のひずみは次式で与えられる[20]。

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial X_j}{\partial x_{\beta}} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

ただし、 $x_i (= \mathbf{x})$, $X_i (= \mathbf{X})$ は各々変形前と変形後の直交直線座標系の座標成分(位置ベクトル)である。 u_i ($i = 1, 2, 3$) は \mathbf{u} の成分であり、 x_i 方向に対応する。 δ_{ij} は Kronecker's Delta である。

ひずみ式(4)は、よく知られている変形後の第一基本計量と変形前の第一基本計量の差の 1/2 表現であり、共に直交直線座標系であるときの成分表示となっている。

式(4)に次式を導入すると式(3b)を得ることができる。

$$u_i = X_i - x_i \quad (5)$$

すると、式(2a,b)は次式のように表現できる。

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{C}, \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{B}}^*(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} \quad (6a,b)$$

最終的に、平衡方程式は、式(1)と同形式の次式を得る。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X})^T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}) d\Omega - \delta\mathbf{X}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = 0 \quad (7)$$

式(7)は、従来の変位ではなく、変形後の座標値を未知量とする有限要素法による離散化のための基礎式となる。なお、離散化式を解くための接線剛性行列 \mathbf{K}_t は、 $\hat{\mathbf{X}}$ を節点の未知位置ベクトルとすると以下の通りである。

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{K}_t(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{K}_G(\hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{X}}) \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{K}_G , \mathbf{K}_S は各々幾何剛性行列と線形 + 大変位剛性行列であり、変位法と同形式の次式で与えられる。

$$\mathbf{K}_G(\hat{\mathbf{X}}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}^*}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \boldsymbol{\tau} d\Omega, \quad \mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{X}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^* \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \hat{\mathbf{X}}} d\Omega \quad (9a,b)$$

3. ケーブルと膜の代表要素における離散化

平衡方程式(7)の離散化と接線剛性行列式(9)をケーブル(トラス)要素と膜要素について以下に示す。ここでは変形前・後という変位の概念を持ち込まない。いま、未知量を安定形態

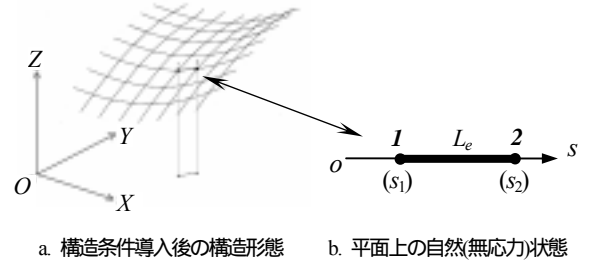


図1 ケーブル要素の全体座標系と局所座標系の関係

における系全体の座標値とし、自然状態の座標 $(x, y) = (x_1, x_2)$ (ベクトル表現: \mathbf{x}) が、安定形態の座標 $(X, Y, Z) = (X_1, X_2, X_3)$ (ベクトル表現: \mathbf{X}) に移動する。共に直交直線座標系である。つまり自然状態は平面に配置された無応力状態で与えられ、構造条件導入後に 3次元張力構造形態として安定化する。

3.1 ケーブル要素の場合 (トラス一次要素)

図1に示すように2節点で構成するケーブル要素を設定する。 s 軸はケーブル要素1-2上にとる($x=s, y=0$)。ここで、通常の有限要素法における定式化の通りに以下の仮定を与える。

$$X = \alpha_1 + \alpha_2 s, \quad Y = \alpha_3 + \alpha_4 s, \quad Z = \alpha_5 + \alpha_6 s \quad (10a-c)$$

α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) は一般化座標(未定定数)である。各要素節点の座標値を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 s_1, & Y_1 &= \alpha_3 + \alpha_4 s_1, & Z_1 &= \alpha_5 + \alpha_6 s_1 \\ X_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 s_2, & Y_2 &= \alpha_3 + \alpha_4 s_2, & Z_2 &= \alpha_5 + \alpha_6 s_2 \end{aligned} \quad (11a-c)$$

ケーブル要素1-2の部材長さ L_e は次式で与えられる。

$$L_e = s_2 - s_1 \quad (12)$$

したがって、 α_i は次のよう求めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} s_2 & -s_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} s_2 & -s_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} &= \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} s_2 & -s_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13a-c)$$

ケーブル要素のひずみ $\boldsymbol{\gamma}_e$ は式(4)より次式を得る。

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \frac{1}{2} (\alpha_2 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_4 + \alpha_6 \alpha_6 - 1) \quad (14)$$

ひずみ増分 $\delta\boldsymbol{\gamma}_e$ は次式のようになる。

$$\delta\boldsymbol{\gamma}_e = (\alpha_2^T \delta\alpha_2 + \alpha_4^T \delta\alpha_4 + \alpha_6^T \delta\alpha_6) \quad (15)$$

構成関係は次の通りである。

$$\boldsymbol{\tau}_e = E_e \boldsymbol{\gamma}_e \quad (16)$$

E_e は要素のヤング係数(縦弾性係数)とする。

以上の準備の下に、式(7)に対応するケーブル要素の離散化を行う。ひずみと座標の関係は式(6a)より、次式を得る。

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{B}_e(\mathbf{X}_e) \mathbf{X}_e + \mathbf{C}_e \quad (17)$$

したがって、 $\tilde{\mathbf{B}}_e^*$ が次のように求められる。

$$\delta\gamma_e = \delta\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}_e)\mathbf{X}_e + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{X}_e \equiv \tilde{\mathbf{B}}^*(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{X}_e \quad (18)$$

式(7)にひずみ-座標とひずみ増分-座標増分関係式(17), (18) 及び構成関係式(16)を代入し、整理すると次式が得られる。

$$\delta\mathbf{X}_e^T \left[\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_e^{*T} E (\tilde{\mathbf{B}}_e \mathbf{X}_e + \mathbf{C}_e) d\Omega - \lambda \mathbf{f}_e \right] = \mathbf{0} \quad (19)$$

ひずみ-座標とひずみ増分-座標増分関係行列 $\tilde{\mathbf{B}}_e$, $\tilde{\mathbf{B}}_e^*$ 及びひずみ γ_e の具体的な成分は $\mathbf{X}_e = [X_1 \ X_2 \ Y_1 \ Y_2 \ Z_1 \ Z_2]^T$ とおくことで、次の通り与えられる。

自然状態の座標 \mathbf{x}_e (平面内の全体座標系) を基準にすると、

$$\tilde{\mathbf{B}}_e(\mathbf{x}_e, \mathbf{X}_e) = \frac{1}{2L_e^2} \mathbf{X}_e^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_e) \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_e^*(\mathbf{x}_e, \mathbf{X}_e) = \frac{1}{L_e^2} \mathbf{X}_e^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_e) \quad (21)$$

$$\gamma_e = \frac{1}{2L_e^2} \left(\mathbf{X}_e^T \mathbf{G} \mathbf{X}_e \right) + \mathbf{C}_e \quad (22)$$

ここで、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = -\frac{1}{2} \quad (23a-c)$$

したがって、ケーブルの一要素における離散化平衡方程式は次式を得る。

$$\frac{E_e A_e}{L_e} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{X}_e \right) \left[\frac{1}{2L_e^2} \left(\mathbf{X}_e^T \mathbf{G} \mathbf{X}_e \right) + \mathbf{C}_e \right] - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (24)$$

A_e はケーブル要素 e の断面積である。式(24)の成分内容を調べると自然状態の全体座標 \mathbf{x}_e に対応する情報は、部材長さ L_e のみである。

ケーブル要素の接線剛性行列 \mathbf{K}_{te} は、式(8), (9)より、以下の通りである。

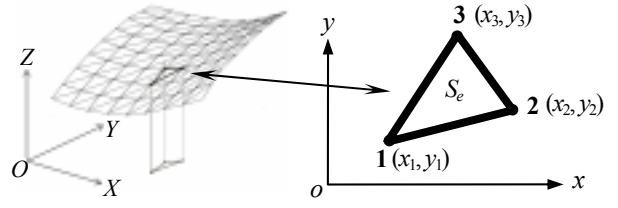
$$\mathbf{K}_{te} = \mathbf{K}_{Ge} + \mathbf{K}_{Se} = \frac{A_e}{L_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\tau}_e + \frac{A_e E_e}{L_e^3} \mathbf{G}^T \mathbf{X}_e \mathbf{X}_e^T \mathbf{G} \quad (25)$$

3.2 膜要素の場合 (三角形一次要素)

図2に示すように三角形膜要素を採用する。安定形態の座標 (X, Y, Z) は以下の一次仮定を与える。

$$\begin{aligned} X &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ Y &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \\ Z &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y \end{aligned} \quad (26a-c)$$

β_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) は一般化座標(未定定数)である。各要素節点の座標値を式(26)に代入し、次のように β_i を得る。



a. 構造条件導入後の構造形 b. 平面上の自然(無応力)状態

図2 膜要素の全体座標系と局所座標系の関係

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2S_e} \begin{bmatrix} 2W_1 & 2W_2 & 2W_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2S_e} \begin{bmatrix} 2W_1 & 2W_2 & 2W_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2S_e} \begin{bmatrix} 2W_1 & 2W_2 & 2W_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27a-c)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_i &= x_k - x_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad 2W_i = x_j y_k - x_k y_j \\ 2S_e &= b_1 a_2 - b_2 a_1, \quad (i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2) \end{aligned} \quad (28a-d)$$

膜要素のひずみ γ_e は式(4)より次式で与えられる。

$$\gamma_e = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_2^T \beta_2 + \beta_5^T \beta_5 + \beta_8^T \beta_8 - 1 \\ \beta_3^T \beta_3 + \beta_6^T \beta_6 + \beta_9^T \beta_9 - 1 \\ \beta_2^T \beta_3 + \beta_3^T \beta_2 + \beta_5^T \beta_6 + \beta_6^T \beta_5 + \beta_8^T \beta_9 + \beta_9^T \beta_8 \end{bmatrix} \quad (29)$$

ひずみ増分 $\delta\gamma_e$ は次式のようにになる。

$$\delta\gamma_e = \delta \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2^T \delta\beta_2 + \beta_5^T \delta\beta_5 + \beta_8^T \delta\beta_8 \\ \beta_3^T \delta\beta_3 + \beta_6^T \delta\beta_6 + \beta_9^T \delta\beta_9 \\ \beta_3^T \delta\beta_2 + \beta_2^T \delta\beta_3 + \beta_6^T \delta\beta_5 + \beta_5^T \delta\beta_6 + \beta_9^T \delta\beta_8 + \beta_8^T \delta\beta_9 \end{bmatrix} \quad (30)$$

要素の構成関係式は次の通りである。

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\gamma}_e \quad (31)$$

$\boldsymbol{\tau}_e = (\tau_x, \tau_y, \tau_{xy})^T$ は膜応力である。膜材は織布を想定し、直交異方性であると仮定するならば次のように構成関係行列 \mathbf{D}_e が与えられる。

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{R}_e^T \mathbf{D}_e^+ \mathbf{R}_e \quad (32)$$

ここに、

$$\mathbf{D}_e^+ = [d_{ij}], \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (33a,b)$$

θ は繊維 1-方向と平面座標 x とのなす角度とする。通常、平板の直交異方性材の関係を用いるならば、成分 d_{ij} は次式を与える。

$$d_{11} = \frac{E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2}, d_{12} = \frac{\nu_1 E_2 t}{1 - \nu_1 \nu_2}, d_{21} = \frac{\nu_2 E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2}, d_{22} = \frac{E_2 t}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$d_{33} = G_{12} t, d_{13} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = 0 \quad (34a-e)$$

E_1, E_2 : 各々繊維方向 1, 2 の縦弾性係数、 ν_1, ν_2 : 各々繊維方向 1, 2 に対するポアソン比、 G_{12} : 横弾性係数(せん断剛性)、 t : 膜厚。

以上の準備の下に、式(7)に対応する膜要素の離散化を行う。まず、ひずみと座標の関係は式(6a)より、次式が得られる。

$$\gamma_e = \tilde{\mathbf{B}}_e^T(\mathbf{X}_e) \mathbf{X}_e + \mathbf{C}_e \quad (35)$$

したがって、次のひずみ増分-座標増分関係が求められる。

$$\delta \gamma_e = \delta \tilde{\mathbf{B}}_e^T(\mathbf{X}_e) \mathbf{X}_e + \tilde{\mathbf{B}}_e^T(\mathbf{X}_e) \delta \mathbf{X}_e \equiv \tilde{\mathbf{B}}_e^*(\mathbf{X}_e) \delta \mathbf{X}_e \quad (36)$$

式(7)にひずみ-座標とひずみ増分-座標増分関係式(35),(36)及び構成関係式(31)を代入するとケーブル要素と同形式の次式が得られる。

$$\delta \mathbf{X}_e^T \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_e^{*T} \mathbf{D}_e (\tilde{\mathbf{B}}_e \mathbf{X}_e + \mathbf{C}_e) d\Omega - \lambda \mathbf{f}_e \right] = 0 \quad (37)$$

ここで、 $\mathbf{X}_e = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Z_1 \ Z_2 \ Z_3]^T$ とおく。自然状態の座標 \mathbf{x}_e (ケーブル要素と同様に平面上の一つの直交直線座標)を基準にすると、ひずみ-座標とひずみ増分-座標増分関係行列 $\tilde{\mathbf{B}}_e$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}_e^*$ 及びひずみ γ_e の具体的な成分は以下の通りとなる。

$$\tilde{\mathbf{B}}_e(\mathbf{x}_e, \mathbf{X}_e) = \frac{1}{8S_e^2} \mathbf{X}_e^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}_e) \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_e^*(\mathbf{x}_e, \mathbf{X}_e) = \frac{1}{4S_e^2} \mathbf{X}_e^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}_e) \quad (39)$$

$$\gamma_e = \frac{1}{8S_e^2} \left(\mathbf{X}_e^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_e \right) + \mathbf{C}_e \quad (40)$$

各行列成分は以下のように与えられる。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} & \hat{\mathbf{a}} & \hat{\mathbf{c}} \end{bmatrix}^T, \mathbf{C}_e = \frac{1}{2} [-1 \ -1 \ 0]^T \quad (41a,b)$$

$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}$ は次の通りとする。

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad (42a-c)$$

ただし、 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ とおくと、 $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ で与えられる。

最終的な一要素の離散化式は次式を得る。

$$\frac{1}{4S_e} \left(\begin{matrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{matrix} \right)_{3 \times 3} \mathbf{D}_e \left[\frac{1}{8S_e^2} \left(\begin{matrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) & 9 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} & \mathbf{X}_e \end{matrix} \right)_{3 \times 3} + \mathbf{C}_e \right]_{3 \times 1} - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (43)$$

式(43)から、ケーブル要素式(24)と同様に自然状態の座標 \mathbf{x}_e に対応する情報は、要素面積 S_e と要素節点の相対的な位置関係だけである。

膜要素の接線剛性行列 \mathbf{K}_{te} は、式(8),(9)より、以下の通りに求めることができる。

$$\mathbf{K}_{te} = \mathbf{K}_{Ge} + \mathbf{K}_{Se}$$

$$= \frac{1}{4S_e} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\tau}_e + \frac{1}{16S_e^3} \left(\begin{matrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{matrix} \right)_{3 \times 3} \mathbf{D}_e \left(\begin{matrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} \end{matrix} \right) \quad (44)$$

4. 離散化平衡方程式と接線剛性行列の評価

式(7)に対する代表要素の具体的なケーブルと膜の離散化平衡方程式(24),(43)は、同形式で得られ、安定形態の全体座標値を未知量とする。この非線形方程式を解くために必要な接線剛性行列(25),(44)も同様に求められる。これらの式は、共に自然状態の平面座標値 \mathbf{x}_e を一つの直交直線座標系で設定した。しかし、得られた行列の成分を調べると未知量以外は、結果的に長さや面積など要素節点間の相対的な局所情報のみで構成される。つまりケーブルや膜を必要に応じたグループに分け、グループ間の節点接合情報が与えられれば、別々の直交直線座標(局所座標)系を利用してよい。また、両要素共、系全体の離散化平衡方程式や接線剛性行列は、代表要素の未知量と系全体の未知量が同じ全体座標系で与えられるため、座標変換なしに系全体の関係式を構成することができる。

この系全体の離散化式は、次のように表現が可能である。

$$\mathbf{F} \left(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{X}}_B, \sum_{e=1}^n \hat{\mathbf{x}}_{0e}, \mathbf{f}, \lambda \right) = \mathbf{0} \quad (45)$$

ここに、 n : 要素総数(ケーブル要素数+膜要素数)、 $\hat{\mathbf{X}}$: 未知量(全体座標値)、 $\hat{\mathbf{X}}_B$: 境界条件、 $\hat{\mathbf{x}}_{0e}$: 自然状態の代表要素 e の形状情報(ケーブルの場合: 要素長さ、膜の場合: 要素面積と各節点の相対位置関係)である。

連立非線形方程式(45)により、要素の局所形状情報 $\hat{\mathbf{x}}_{0e}$ と想定構造の境界座標値 $\hat{\mathbf{X}}_B$ および外力モードベクトル \mathbf{f} 、外力パラメータ λ を与えることで、未知量 $\hat{\mathbf{X}}$ が得られる。これは平面上の自然状態にある張力材に境界条件を設定する必要がないことを意味する。したがって、緩んだ状態で局部的に曲がっていたりするケーブルや寄り皺になっているあるいは折り重なった膜材も要素毎に平面状に展開し、局所形状情報を入力データとして持たせるだけで、境界条件や張力導入のための外力設定により一般化形状解析が可能である。あるいは、ケーブルと膜をグループ毎に分け、グループ間の節点接合情報が与えられれば、1つのグループ、つまり系全体の構造解

析が可能となる。例えば、裁断線を決めた幾つかの膜ピースに縫合情報を与えて構造条件を導入すると、縫合後の構造形態が得られる。逆に、何らかの最適化手法を利用すれば、指定応力状態に対応した自然状態における裁断線座標が直接決定できる。また、連続して静的あるいは動的に対する応力・変形解析へと進められる。もちろん幾何剛性項のみの利用により、通常の形状解析もできる式になっている。

これらの定式化の内容から、自然状態で平面に置かれたケーブルと膜材を基準に、以下の解析が可能と考える。

通常の形状解析は上述したように可能である。膜材に対しては、等張力状態だけでなく異方張力の設定も可能である。ケーブルの配置データや立体裁断された膜帯データから、接合および縫合情報を入力し、一般形態解析が行える。その際、軸力や膜張力を既定したケーブル配置・接合の最適化あるいは膜材の立体裁断線の最適化にも応用できる。また、そのまま静的・動的な応力・変形解析にも進め、部材の配置・接合や縫合不整に伴う、評価計算も可能になる。膜材の直交異方性の設定は、自然状態の膜ピース毎に行える。ただし、材料非線形性を考慮するときは、平衡方程式を total Lagrange ではなく update Lagrange 表記で導く必要がある。

接線剛性行列(25), (44)の内容から判るように、線形項と大変位項が分離できない形式となっている。しかし、初期形態の全体座標値を用い、そのときの接線剛性行列(25), (44)を一定値とすると、線形剛性と一致する。さらには、断面の長軸方向が設定できるため、梁材の定式化も可能となり、一般の構造解析にも適用できる。つまり、一般構造材と張力構造材を併用した構造物の解析へと展開が可能である。

5. 数値解析例

簡単なケーブル構造と膜構造モデルを用い、上述の定式化による静的解析を行う。解析モデルは、図 3a, 4a に示す HP (hyperbolic paraboloid) 形態を構成する張力構造を想定する。Model-A はケーブル構造である。Model-B は膜構造である。Model-A のケーブル接続情報は図 3b に示すと通りである。境界に固定し、境界間に配置する 10 本のケーブル上に節点を設ける。材料定数等は表 1 にまとめた。Model-B の膜帯と接続情報と要素分割図は、図 4b,c に示す。膜帯は 6 つのピースに分ける。要素分割図は、対称性を考慮して 1/4 領域のみ示した。材料定数等は表 2 にまとめる。ここでは各膜帯の直交異方性方向を局所座標の x, y 方向に一致させている。

5.1 ケーブル構造の解析(Model-A)

図 3, 表 1 で示した自然状態の長さ情報とケーブルピース毎に接続情報を与え、構造条件を導入した全体領域での計算を行った。結果は、図 5 に示す通りである(Case-1)。部材太さは軸力値に対応させている。図 6 は 印の部材長さを Case-1 の計算より 80%小さく設定した解析結果である(Case-2)。

5.2 膜構造の解析(Model-B)

このモデルも全体領域を用いて計算した。結果は図 7 のよ

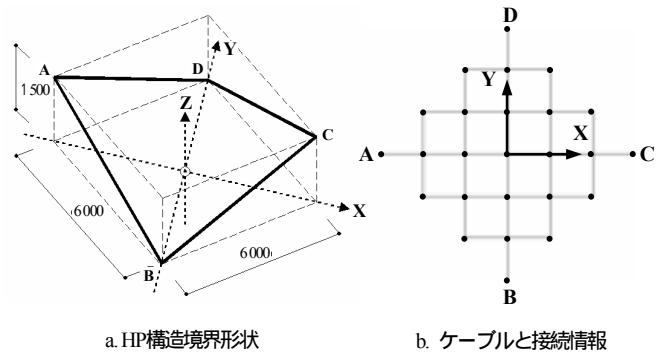


図3. Model-A (ケーブル構造解析モデル) unit: cm

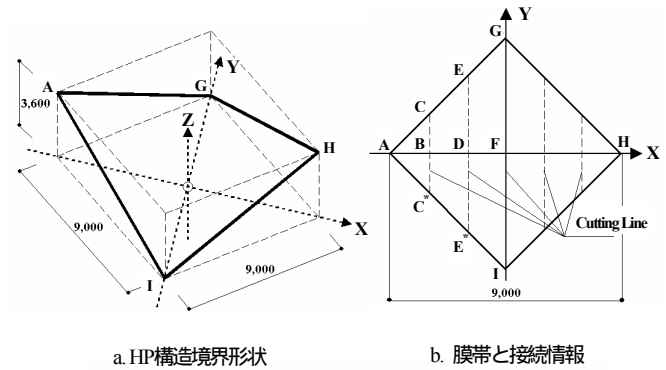


図4. Model-B (膜構造解析モデル) unit: cm

表 1 ケーブル材料定数(Model-A)

一要素長さ	1 000 cm
弾性係数	$E=1.373 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$
ケーブル断面積	$A=0.7 \text{ cm}^2$
自重	$5.688 \times 10^{-2} \text{ N/cm}$

表2 膜材料定数(Model-B)

膜厚	$t=0.08 \text{ cm}$
縦弾性係数 (x -方向 E_x, y -方向 E_y)	$E_x \cdot t=2 138.0 \text{ N/cm}$ $E_y \cdot t=6 453.0 \text{ N/cm}$
ポアソン比	$\nu_{xy}=0.29$ $\nu_{yx}=0.87$
横断性係数	$G_{xy} \cdot t=559.0 \text{ N/cm}$
自重	$12.75 \times 10^{-4} \text{ N/cm}^2$

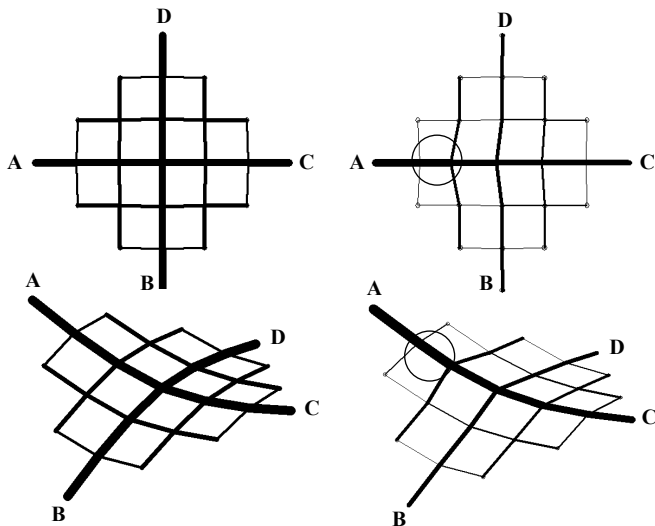


図5 計算結果 Model-A (Case-1)

図6 計算結果 Model-A (Case-2)

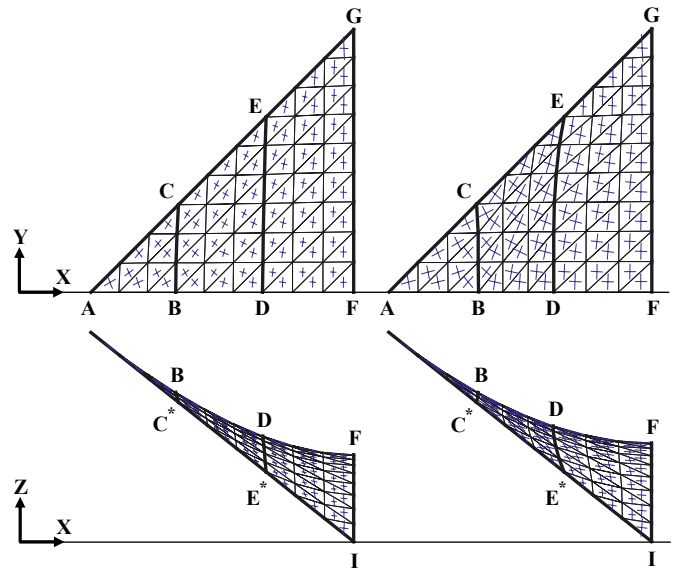


図7 計算結果 Model-B (Case-1)

図8 計算結果 Model-B (Case-2)

うに対称性を考慮した 1/4 領域で示す (Case-1)。要素重心に表示した線は要素の主応力の方向と大きさを指している。次に、図 4b の左から 2 枚目と 5 枚目の膜帯に対し、 x 軸方向の膜幅を縮小率 80% に設定して計算した。結果は、対称性が得られたため、1/4 曲面について図 8 に示す (Case-2)。

6. 近似解の評価と考察

本定式化による形状解析は、文献[3]の解と比較し、一致した近似解が得られることを確認している。ケーブル構造や膜構造の解析も文献[16]の簡単なモデルの解と比較し、同一解を得た。また、ケーブル要素は圧縮力に抵抗すると仮定すればトラス要素である。著者らは、このトラス要素に対し、一要素で構成された構造モデルが従来の変位仮定と同じ離散化式になることを示している。さらには非線形性が強く表れる正六角形立体トラス構造モデル[21]の解析を行い、基本パスと分岐パス両方において従来の変位仮定とまったく同じ数値解が得られたことも確認した[19]。つまり座標仮定による解と従来の変位仮定による解とは完全に一致する。

ここで示した解析例では、ケーブル構造と膜構造を分けて示した。

HP 形態のケーブル構造では、10 本のケーブルピースに分け、接合情報を設定して計算した。HP 曲面形態の膜構造では、立体裁断した 6 つの膜ピースに分けた平面状の膜帯に、縫合情報を設定して解析した。非線形方程式の解法は、接線剛性行列利用による Newton-Raphson 法を採用する。両モデル共に、境界座標以外の初期値を全て零としても、安定的に収束解が得られる。もちろん、形状解析で得られた座標値を初期値に採れば、より速く収束する。しかし、初期値による収束回数に大きな違いは生じない。また、要素数が多くなったとしても解析上安定的に収束解が得られている。

ケーブルや膜材に縮小率を与えた解析では、各部分材の寸法不整の影響により形状と軸力や応力に乱れが確認できる。

なお、これらの解析モデルでは、初期張力の設定をしていない。初期張力を設定する場合は、応力値を与えるのではなく、初期ひずみを設定する方法をとる。

7. まとめ

座標仮定の有限要素法による定式化とその評価及び簡単な数値解析例を通し、次のことがまとめられる。

1. ケーブル要素と膜要素を座標仮定の有限要素法による離散化定式化を示した。離散化式はシンプルな形式で与えられる。
2. 離散化式の幾何剛性項を利用して等張力や異方張力による形状解析ができる。
3. 定式化と解析結果から、局所部分材情報と想定構造の境界座標により一般形状解析ができる。
4. 膜構造において、裁断線の決定の最適化解析にも応用できる。
5. ケーブルの設置や膜の縫合による初期不整による評価が可能である。
6. 得られた張力構造形態から連続的に応力・変形解析へと進められる。
7. 一般の構造解析も可能であり、張力材と一般構造材を併用した構造解析にも適用できる。

以上の幾何学的非線形解析の範囲において、要素関係式から系全体の関係式に組み込む際、座標変換が一切必要ない。

これらの内容は、解析イメージがシンプルに実現現象(施工)と対応し、張力構造全ての構造評価を統一的行うことが可能であり、複合ケーブル構造や複合張力構造にも展開ができる。今後は解析結果の蓄積を踏まえ、具体的な最適化や初期不整による評価方法などを検討する。

8. おわりに

著者らは、次のような解析をイメージし、本論で説明した系全体の座標における節点座標値を未知量とする方法の採用に至っている

折りたたまれた紙風船を想定する。この紙風船を膨らませたときにどのような形状が得られるのか調べる。紙風船の折り目に沿った各部材寸法は計測できる。折り目毎の部材寸法に基づき、有限要素分割を作成する。次に、接合情報を与えて膨らませる。すなわち3次元上で膨らませる口の位置を与え、内圧を作用させる。この最終形状を計算により確認する。

このとき、従来の変位仮定による有限要素法による定式化では、解析イメージが掴み難い。ここに座標値を直接未知量にすることの必然性が生まれる。結果的にこの方法が、張力構造解析全般に有用であると考えられる。

謝辞

本研究の一部は、(財)能村膜構造技術振興財団の平成14年度研究助成金によるものである。また、数値計算のデータ整理には、鹿児島大学理工学研究科建築学専攻 合田雄策君の協力を得ている。ここに記して深謝します。

参考文献

- [1] 安宅信行：膜構造の形状解析の線形理論について、膜構造研究論文集、日本膜構造協会、1、19-30、1987。
- [2] 石井一夫：膜構造の形状解析(形状決定の問題)が概説、膜構造研究論文集、日本膜構造協会、3、83-107、1989。
- [3] 本間俊雄、西村敏雄：膜構造の形状決定問題、応用力学シリーズ2、建築構造物の設計力学と制御力学、4章、89-123、日本建築学会、1994
- [4] 鈴木俊男、半谷裕彦：変位低減による極小曲面の有限要素解析、日本建築学会構造系論文報告集、425、111-120、1991
- [5] 鈴木俊男、半谷裕彦：異方張力曲面の有限要素法による形状解析、日本建築学会構造系論文報告集、431、47-55、1992
- [6] 石原競、八木孝憲、萩原伸幸、大森博司：極小曲面解析による膜

造の形状解析、日本建築学会構造系論文集、469、61-70、1995

- [7] 八木孝憲、大森博司、石原競：極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究、日本建築学会構造系論文集、502、99-106、1997
- [8] 坪田引二：膜構造の膜面形成法の力学、応用力学シリーズ2、建築構造物の設計力学と制御力学、5章、153-186、日本建築学会、1994。
- [9] 大崎純、上谷宏二、高谷真次：逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応カトレードオフ設計法、日本建築学会構造系論文集、395、107-115、1996。
- [10] 八木孝憲、萩原伸幸、大森博司、松井徹哉：膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究、日本建築学会構造系論文集、508、71-78、1998。
- [11] 上谷宏二、満田衛資、大崎純：境界形状と応力比を設計パラメータとした骨組膜構造物の裁断図形状最適化、日本建築学会構造系論文集、540、73-78、2001
- [12] Kim, J-Y. and Lee, J-B. : A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures, Engineering Structures, 24(6), 745-756, 2002
- [13] 藤原淳、大崎純、上谷宏二：材料の粘弾性特性を考慮した膜構造の裁断図設計法、日本建築学会構造系論文集、545、103-109、2001
- [14] 石井一夫：膜構造の応力・変形解析概説、膜構造研究論文集、日本膜構造協会、4、69-105、1990。
- [15] 日本膜構造協会編：膜構造研究レビュー2000、日本膜構造協会、2000
- [16] 日本建築学会編：空間構造の数値解析ガイドライン、日本建築学会、2001。
- [17] 安宅信行：要素特性寸法を入力データとした膜構造の形状解析について、日本建築学会大会学術講演会梗概集、構造、2601-2602、1984
- [18] 安宅信行：空気膜構造の自然状態(非釣合系)から規準形状(釣合系)の決定法について、日本建築学会大会学術講演会梗概集、構造、1169-1170、1985
- [19] Honma, T. and Ataka, N. : Geometrically Nonlinear Structural Analysis by FEM Using the Coordinate Value on a Deformed Body, INFORMATION, 7(5), 569-583, 2004
- [20] Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [21] Ikeda, K., Murota, K. : Imperfect Bifurcation in Structures and Materials, Applied Mathematical Sciences 149, Springer-Verlag, 2002

Tension Structure Analysis by Finite Element Method Using the Coordinate Value on a Deformed Body and Its Evaluation

Toshio Honma *

Nobuyuki Ataka **

SYNOPSIS

In this paper, FEM, of which an unknown quantity is the coordinate value on a deformed body, is applied to geometrically nonlinear tension structure analysis. This method belongs to the displacement method, though an unknown quantity is not set as the displacement. The unknown quantity is a coordinates value on a deformed body. In this discretization formulation, a cable element and a membrane element are described. The computation examples are general shape analysis of cable structure and membrane structure of the HP type. It is shown that our method is a powerful means of tension structure analysis through the evaluation for the discretization formulation and the numerical result.

* Assoc. Prof., Dept. of Architecture & Architectural Eng., Faculty of Engineering, Kagoshima University, Dr. Eng.

** Prof. Showa Women's University, Dr. Eng.