内包空気分子数制御による空気膜構造物のインフレート解析

川口 健一^{*1} 金子 雅彦^{*2}

梗概

空気膜構造物のインフレート過程においては、膜面や補強ケーブルに大変位が生じる。従って、膜や ケーブルに生じる歪みや応力状態を事前に数値解析によって把握することが望ましい。しかし、従来の 荷重制御による方法では膜面の自重と内圧の釣り合う状態で膜面の上昇が止まってしまう等の問題が報 告されている。本研究では、内包空気分子数を制御パラメータとして選ぶことで、安定したインフレー ト解析を行う手法を提案する。また、アイソパラメトリック膜要素で膜面の柔軟性を表現する可能性に ついても考察する。

1.はじめに

空気膜構造は、空気による内圧を導入することで初めて成り立 つ構造であり、内圧を失った場合には極端に柔軟な構造物となる。 台風時の大変形や、飛来物による膜面の損傷と内圧の減少が空気 膜構造に大きなダメージを与えた例はしばしば報告されている。 特に、空気膜構造の施工時のインフレーション過程における膜面 や補強ケーブル等の挙動に関しては、大規模空気膜構造が施工さ れるたびに問題にされているが、事前の構造解析の難しい問題と して、依然として残されている。近年は宇宙構造物の分野でも、イ ンフレータブル構造の可能性が再び脚光を浴びるようになってき ており、空気膜構造のインフレート時の膜面挙動を予め把握でき る数値解析法を開発しておくことの意義は大きい。

空気膜構造のインフレート解析が通常の汎用プログラムなどに よる数値解析では困難である大きな理由は、膜の自重と内圧が釣 り合った状態で、大変位過程が進行することに起因する。膜の懸 垂状態から徐々に内圧を上げていくインフレーション過程では、 内圧による荷重がほぼ一定のまま、膜面の大部分に無歪み変位が 生じ、体積のみが増加する大変位過程が進行するのである。さら に、多くの場合、膜面はその面積よりも小さいコンプレッション リングに囲まれた領域を通過するために、膜面や補強ケーブルに は大きな形状変化が生じ、膜材などにダメージを与える可能性も ある。無歪み大変位過程に対しては、一般逆行列を用いる手法等 が提案されている。しかし、この場合でも、内圧を一定に保った まま体積のみが徐々に増えていくという特殊な状態においては、 依然困難を生じることが報告されている。これは、同一の内圧値 に対して、多くの釣り合い状態形状が存在しているということで あり、荷重制御、あるいは内圧制御で解析を行った場合には、解 が不定になってしまうからである。このような場合には、解が得

*1 東京大学生産技術研究所助教授·工博

*2 東京大学大学院修士課程

られたとしても、初期形状から最も近い釣り合い形状に留まった ままになってしまう。

本研究では、トラス要素でモデル化したドームモデルを用い、内 包される空気の分子数に着目し、さらに一般逆行列を用いた解法 を応用することで安定的に空気膜構造のインフレート解析を行う 手法について報告する。さらには、今後トラス要素から膜要素へ 移行するにあたり、アイソパラメトリック膜要素の無歪み変位に 関する考察についても報告する。

2. 定式化

膜面をn個の節点とm個の要素の集まりとしてモデル化し、変 位法型有限要素法を幾何学的非線形を考慮して定式化すれば、荷 重増分法による増分形式は以下のようになる。

$$\int_{3n}^{3n} \mathbf{K}_{3n} \Delta d = \int_{3n}^{1} \Delta f \qquad (1)$$

ここに、接線剛性マトリックスをK、変位増分を Δd 、荷重増分を Δf とし、添え字は行数列数を表すが、膜面は伸び無し変位を生じ る時は、Kは特異なマトリックスとなる。一方、空気膜構造内の空 気の内包体積Vは変位dによるため、体積増分 ΔV と変位増分 Δd の 関係は、内包体積を変位dで微分して、

$$\Delta V = {}_{1} {}_{D} {}_{n} {}_{n} \Delta d$$
(2)

となる。(1)、(2) 式を連立すれば

$${}_{3n+1}\left[\frac{K}{b^{\mathrm{T}}}\right]\Delta d = {}_{3n+1}\left[\frac{\Delta f}{\Delta V}\right]$$
(3)

と書ける。

ここで気体の状態方程式を考える。理想気体の状態方程式は

$$PV = nRT \tag{4}$$

である。ここに、Pは内圧、Vは内包体積、nは気体の分子数、Rは 気体定数(8.31Nm/deg*mol)、Tは絶対温度である。分子数増分区間 において、内圧を一定と仮定すると、空気の分子数の増分をΔn、内 包体積の増分をΔVとして、(4)式より体積変化は以下のように書 ける。

$$\Delta V = \frac{RT}{P} \Delta n \tag{5}$$

よって分子数で制御することにより体積変化を制御することが可能となる。ここで(3)式を改めて

$$\frac{3n}{3n+1} \frac{1}{A} \frac{1}{3n\Delta d} = \frac{1}{3n+1} c$$
(6)

とすると、Moor-Penrose型一般逆行列A+を用いて

$$\Delta d = {}^{3n+1}_{3n} {}^{k}_{3n+1} c + {}^{k}_{3n} {}^{1}_{n+1} c$$
(7)

と解ける。ここに右辺の第1項は特解、第2項は余解であり、特 解は与えられた体積増分を実現する弾性変位による最小二乗解、 余解は剛体変位を表している。また、Hは次式の解であり、kは独 立な不定解の数である。

$$A\Delta d = o \tag{8}$$

A*及びHを得るために、本研究では特異値分解法[1]を用いている。

3. 解析手順

本研究では非線形有限要素法を基に、特異値分解を用いてイン フレート挙動を無歪大変位過程と弾性変位過程とに分離し、さら に(2)、(5)式のような拘束条件より空気の分子数変化で制御して解 析を行っている。解析フローを図1に示す。

各ステップの始めに分子数増分を与え、弾性変位のノルム最小 解を求めた後は、空気分子の出入りはないものとし、内圧と自重 が釣り合うまで計算を行っている。この釣り合い計算のとき、以 下の式を付帯条件として使用している。

$$P\Delta V + V\Delta P = 0 \tag{9}$$

上式は(5)式を全微分することで得られ、一般にボイルの法則として知られている。解析は(3)、(9)式が収束したところで終了させている。

また、内包体積を求めるために、トラスでモデル化したドーム を各節点を含む三角形に分割し、図2のような三角柱の体積の総 和を内包体積としている。膜面の表面上に適当に選ばれた3節点 を $I(x_p, y_p, z_p), J(x_p, y_p, z_p), K(x_p, y_p, z_p) としたとき、この3点による三$



図1 解析フロー



角形に内包される体積 は、以下のような三角柱 の体積となる。この三角 柱は、底面が全体座標系 であるデカルト座標系 のx-y平面上にあるもの とすると、体積Vは次の ように表せる。

図2 体積算出で用いる三角柱

$$V = \frac{1}{6} \Big((x_j - x_i) \Big((y_k - y_i) - (x_k - x_i) \Big) \Big((y_j - y_i) \Big) \Big((z_i + z_j + z_k) \Big)$$
(10)

これを膜面に内包されるすべての三角柱に拡張することにより、 各変位ごとの内包体積を求めることができ、さらにこれを変位で 微分することで(2)式のマトリックスbを算出することができる。

4.解析例

解析例として、図3に示す(a)、(b)、(c)の3種類の不安定トラスモ デルを用いて解析を行った。(a)は節点数24、部材数24の一重膜モ デル、(b)は節点数40、部材数48の二重膜モデル、(c)は節点数117、 部材数132の一重膜モデルである。各モデルにおいて、内包体積

表1 解析諸元

ヤング率	2.1*10 ⁷ [N/cm ²]
ポアソン比	0.2
自重	138.18[N/m ²]
気体定数 R	8.31[Nm/deg*mol]
大気圧 Po	1.013*10 ⁵ [N/m ²]
絶対温度 T	298.15[K]
and the second se	and the second



-44-

や内圧ベクトルを求めるために、図4のようにトラス節点を含む 三角形に分割し、1 step ごとの分子数増分をモデル(a)、(b)、(c)に 対してそれぞれ0.1mol、0.1mol、10molとして解析を行った。ま た、解析を始める際には、図3の状態のモデルに自重のみをかけ て形状解析をし、自重により釣り合った形状を各モデルの初期形 状として解析を行っている。解析には幾何剛性も考慮しており、



図6 分子数増分 An に対する 内圧(左)と体積(右) Newton-Raphson法により非線形解析の収束計算を行った。解析結 果を図6、7に示す。

5.考察

各モデルにおいて、空気導入直後は自重の影響で膜面が上昇せ ず、内圧が一気に上昇するが、自重相当レベルを大きく超えるま で体積変化が起きていない。次のステップでは体積が一気に増加 して急激に内圧が減少している。また、モデル(b)がモデル(a)と比 べて内圧が大きいのは、与えた分子数増分はともに0.1molである が、モデル(b)は2重膜であり、初期の体積が小さいためにその分 内圧が大きく算出されたものと考えられる。途中段階での内圧変 化は、大気圧の0.1%程度とわずかであり、内圧はほぼ一定とみな せるため、(5)式より体積はほぼ分子数増分に比例して増加するこ とになるが、このことは図6における Δn と体積の関係がほぼ直線 的であることからも確認することができる。最終段階では、イン フレートの限界付近でも空気が一定量導入されるために空気が充 満し、内圧が一気に増加していることまで解析できていることが わかる。全体的には数値不安定を全く生じることなく、安定的に インフレート過程を追えている。

6. アイソパラメトリック膜要素による無歪変位の考察

4章ではトラス要素を用いたインフレート解析の解析例について 述べたが、膜材の非圧縮性、それに伴う面外方向のしわの発生と



図7 インフレート挙動

いった特性を考えたとき、トラス要素は隣り合った要素による拘 束が少なく、膜材の特性を比較的よく捉えることができ、挙動を 把握するという観点では非常に有効である。しかし、膜面内に発 生する歪や応力を把握することができない。従って、膜要素を用 いた解析について考えることとなる。ここでは膜要素への移行に 先駆けて、アイソパラメトリック8節点膜要素による無歪み変位 に関する考察を、簡単なモデルによる数値解析をもとに行った。



図8のような単位膜要素を一列に4つな らべて、図9のようなモデルを考える。こ のとき、節点A、B、Cが隣り合った要素 と共有している場合を(a)、共有せず、別々 の節点と見なした場合を(b)として自重下 での懸垂状態を求める大変位解析を行っ た。これは、要素間を連結させることによ り拘束が強まることが予想されるため、







そのような状況を回避するために(b)では要素間を切り離している。 その結果を図10に示す。

要素同士を連結した(a)と、一部を切り離した(b)を比較すると、 (a)は隣り合う要素の変位がそれぞれ影響し合うため、安定形状に 移行するまでにしわのような要素の変形が確認できた。(b)では切り 離した節点間の適合操作は行っておらず、単純に別の節点と仮定 して解析を行ったため、要素間に大きな隙間ができて解析が発散 してしまった。

7.まとめ

本研究では、空気の分子数で制御する空気膜構造物のインフ レート解析手法を提案した。トラス要素による解析例により、本 手法の有効性を確認できた。自重下での釣り合い形状が内圧に抵 抗しやすい形状となり、空気導入直後に内圧が上昇する現象を確 認したが、これは要素の柔軟性により回避できるものと思われる。

また、アイソパラメトリック膜要素を用いて、膜の懸垂形状を 求める簡単な解析を行った。膜面の柔軟さをこの要素でも表すこ とができることを確認したが、要素間の変位の拘束の仕方に工夫 を要すると思われる点があることが判った。

【参考文献】

- [1] 川口健一、他:特異値分解を用いた不安定架構大変位解析法の応用 例,計算工学講演会論文集 Vol.3,pp.23-26,1998
- [2] 川口健一: 膜構造の畳み込みに関する研究, 能村膜構造技術振興財団 研究助成報告書, 1997
- [3] 石井一夫: 膜構造の応力・変形解析概説, 膜構造研究論文集 No.4, pp.69-105, 1990
- [4] 川口健一、小澤雄樹: 膜の捩りを利用した開閉式膜屋根構造,日本建築学会学術講演梗概集,構造 I, pp.1073-1074, 2000.9
- [5] 久田俊明、野口裕久:非線形有限要素法の基礎と応用,丸善
- [6] Bathe : Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996
- [7] Haug E.: Finite Element Analysis for Pneumatic Structures, Proc. IASS Delft, 1972
- [8] Hangai Y. et al : Shape Finding Analysis of Air–Supported Mem brane Structures in the Process of Inflation, Proc. IASS Bangalore, pp.657–666, 1988

Inflation Analysis for Pneumatic Membrane Structures with Air-Mole-Constraint

Ken'ichi Kawaguchi^{*1} Masahiko Kaneko ^{*2}

SYNOPSIS

Pneumatic membrane structures are usually assembled before the inflation. Then the air is blown into the inner space to give tension stress to their thin surface skins, which keeps the air pressure inside. Before this inflation process numerical simulation is usually required because the membrane and cable reinforcements experience large shape transformation during the inflation. However, because of indeterminacy of the solving process, conventional load -control analysis can not be performed properly. Especially when the inner pressure balances with the dead load this problem is very crucial. In the inflation process air-molecular-weight increases certainly. In the paper, for pneumatic membrane structures, new analytical procedure with mole-control is proposed. And, numerical analysis for inextensional displacement using isoparametric membrane elements is reported.

*1 Assoc. Prof., Institute of Industrial Science, University of Tokyo

*2 Graduate Student, University of Tokyo