

ケーブル補強膜構造設計のためのメッシュレス解析

川島 徹也^{*1} 野口 裕久^{*2} 横堀 一雄^{*3}

梗概

現在、一般に膜構造物の解析は有限要素法を用いて行われる。しかし、メッシュ切りの煩雑さ、設計の各段階における要素の再分割など、問題となる点も多い。また、補強ケーブルが膜面上を滑ることによる勾配不連続面の移動も、解析を困難にする原因の一つである。著者らはこれらの問題を解決するために、要素を必要としないメッシュレス法を用いた膜構造物の解析手法を提案した。最初に、代表的なメッシュレス法であるエレメントフリーガラーキン法を拡張して、膜構造の幾何学的非線形解析の定式化を行い、更に ALE 法を適用することで、ケーブルの滑りを表すことを可能とした。本文では、手法の概要について述べた後、ケーブルの剛性、滑りを考慮した膜構造物の解析結果を示す。

1. 緒言

近年、膜材料の開発に伴い、大規模で恒久的な建造物の一部として膜構造が用いられる機会が増えている。空間構造物である膜構造は、しばしば意匠を凝らした設計がなされ、そのしなやかな形態を実現するために一般の構造物とは大きく異なる設計技術を要する。初期張力による釣合形状の決定、風や雪などの荷重により生じる変形、応力分布の解析、平面に展開する際の裁断線の決定など、数値解析が必要となる場面が多い。

従来はこれらの解析を有限要素法 (Finite Element Method 以下、FEM) を用いて行ってきた。しかし、膜構造のような柔な構造の有限要素メッシュは、変形後に大きくゆがんでいることが多く¹⁾、そのまま次の解析のモデルとして用いることができない場合もある。そのような場合はメッシュの再分割を行うことでゆがみを軽減することになり、手間がかかり解析が困難になる。さらに、実際には滑らかな曲面となる膜面を有限要素メッシュで表現することは、要素境界において曲面の曲率が不連続になることを意味しており、特に任意曲面に対してよく用いられる三角形メッシュの場合は、その不連続性が顕著となる。

一方、著者らは前報²⁾において、裁断線としての測地線をメッシュレス法により探索する手法を提案した。メッシュレス法とは要素分割を必要としない解析手法であり、解析対象に節点を配置するだけで解析が可能となり、従来の有限要素解析において計算以上に労力を要したモデル作成の手間が軽減される。また、代表的なメッシュレス法では場の近似に移動最小自乗法が用いられており^{3,4)}、その結果、変位法 (構造解析の場合) に基づく有限要素法では不連続であった変位勾配が、連続に得られることが報告されている⁵⁾。また、

要素が存在しないため、変形による節点配置のゆがみが解の精度に与える影響が少ないことも示されている³⁾。

本研究では膜構造の形状解析に、代表的なメッシュレス法である Element Free Galerkin 法^{3,4)} (以下、EFGM) を適用する。EFGM は板/シェル⁶⁾、3次元問題⁷⁾などを対象とした解析により、その有効性が示されている。EFGM を膜構造に適用することで要素の再分割をする必要がなく、一連の設計解析を同一のモデルを用いてシームレスに行えるようになることが期待できる。

膜構造の EFGM による解析には、本研究と同様に埋め込み座標を用いて定式化を行った宮村らの研究⁸⁾や、Kim らの膜面にしわの生じる条件を考慮した研究⁹⁾などに先例があるが、本研究では補強のためのケーブルと膜面との滑りを考慮した解析を行う。なお、本研究の範囲では摩擦は考慮しないものとする。補強ケーブルを含む構造の解析を行う場合、膜を構成する要素の他に、ケーブルの剛性も考慮する必要がある。さらに、実際の膜構造の補強ケーブルは膜面に固定されていないことが多く、膜面の変形とともにケーブルが面上を滑ることになる。このような解析は、FEM では内部での折れ曲がり許容する要素を開発し行われた例¹⁰⁾があるが、メッシュレス法においては初めてのものである。

著者らは文献 11) において、ケーブルの滑りを表すことを可能にするため、Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) 法¹²⁾を用いた EFGM の定式化を行った。ALE 法に基づく定式化を適用することで、ケーブルの移動を滑りによるものと、膜面とともに変形するものに分割する事が出来る。ALE 法は FEM における大きな変形による要素のゆがみ、移動境界による要素再分割などの問題を避けるために用いられ、構造-流体連成解析などに適用されることが多く、EFGM な

*1 慶應義塾大学 機械工学専攻 大学院生

*2 慶應義塾大学 システムデザイン工学科 助教授・工博

*3 太陽工業株式会社

どのメッシュレス法に ALE 法を適用する研究は、Belytschko らのクラック進展の研究¹³⁾を除いてほとんど例がない。

本研究の目的は、提案したメッシュレス解析手法を、補強ケーブルとその滑りを考慮した膜構造の幾何学的非線形解析に適用し、解析を通じて膜構造の設計における本手法の有用性、ならびに問題点について検討を行うことにある。

本論文の構成は、次章でまず EFGM を特徴付ける近似手法である移動最小自乗法について述べ、次に ALE 法による EFGM の定式化の概要を示す。基本的な解析により手法の妥当性を示した後、ケーブル補強膜の解析に適用し、最後に結論を述べる。

2. 移動最小自乗法³⁾

FEM では任意の位置における変位はその点が含まれる要素を構成する節点から内挿されるのに対して、EFGM では移動最小自乗法 (Moving Least Squares Approximation 以下、MLSA) を用いて場の近似を行う。有限要素メッシュを用いて膜曲面を表すと、要素境界で勾配が不連続になるのに対して、MLSA を用いることでその微分まで連続ななめらかな形状が得られる。

MLSA は、通常の最小自乗法に重みを付加したものであり、EFGM をはじめとする多くのメッシュレス法で近似手法として用いられている。節点の位置を \mathbf{x}_I ($I=1-N$, N は総節点数)、節点における離散化された値を u_I 、評価点における近似関数を $u^h(\mathbf{x})$ とすれば、次式の J の値が最小となるように変位場が決定される。

$$J = \sum_{I=1}^N w(r_I) (u^h(\mathbf{x}_I) - u_I)^2, \quad r_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I| \quad (1)$$

ここで $w(r)$ は評価点と各節点との距離 r に関する重み関数であり、影響半径 ρ の外では、 $w(r)=0$ となる。MLSA に使用する重み関数はいくつか提案されているが、本研究では、場およびその微分量が連続になるように定められた³⁾ 4 次の四次スプライン関数で表される重み関数を用いた。

$$w(r_I) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r_I}{\rho}\right)^2 + 8\left(\frac{r_I}{\rho}\right)^3 - 3\left(\frac{r_I}{\rho}\right)^4 & (0 \leq r_I \leq \rho) \\ 0 & (\rho \leq r_I) \end{cases} \quad (2)$$

次に、近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ が式 (3) のように表せるものとする。

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$u^h(\mathbf{x})$ を多項式で近似する場合、基底ベクトル $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ は適当に選ぶことが出来るが、本研究では次式に示す線形基底を用いた。

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\} \quad (4)$$

また、 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ は基底ベクトルの各項に対応する係数を並べたベクトルである。式 (1) から $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ が決定され、最終的に $u^h(\mathbf{x})$ は形状関数

$\phi_I(\mathbf{x})$ を用いて有限要素法と同様に、以下のように表される。

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (5)$$

MLSA による近似の概念を図 1 に示す。図に示すように得られる近似関数と、節点における離散値とは一致しない。このため、例えば MLSA を偏微分方程式の解法に用いた場合、その境界条件処理の際は節点における値ではなく、penalty 法などを用いて近似関数の値を拘束する必要がある。

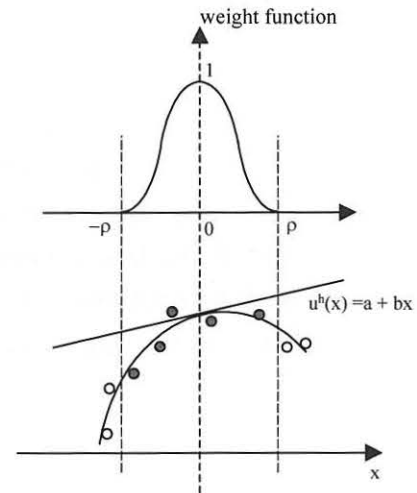


Fig.1 Approximation by MLSA

3. ケーブル補強膜のメッシュレス解析手法¹¹⁾

3.1 ALE 法による EFGM の幾何学的非線形解析定式化

本章では、potential energy 最小の原理より、幾何学的非線形性を考慮した速度形の平衡方程式を ALE 定式化¹²⁾を用いて求め、EFGM による解析の準備を行う。なお、詳細は文献に譲るものとして、ここでは概略を述べる。

ALE 法の概念図を図 2 に示す。ALE 法では全体の変位 \mathbf{u} を、初期配置における物質点の移動にあたる Euler 変位 $\bar{\mathbf{u}}$ と、初期配置から現配置への節点の移動量にあたる Lagrange 変位 $\hat{\mathbf{u}}$ とに分けて考える。本研究では、時刻 0 における配置から、 $-\bar{\mathbf{u}}$ だけ物質点が移動した配置を「物質配置」と呼び、節点が $\hat{\mathbf{u}}$ 動いた配置を「空間配置」と呼ぶものとする。図 2 に示すように、二つの配置をつなぐものとして「参照配置」を導入し、物質配置、空間配置を、参照配置の写像として表す¹⁴⁾⁻¹⁶⁾。

まず、potential energy を参照配置で表す。ここでは簡単のために表面力、摩擦力は無視するものとして、penalty 数 α による境界条件を付与する。物質配置、参照配置の解析領域をそれぞれ d^iV , d^rV として、

$$\int_{d^iV} d^iV = \int_{d^rV} \left| \frac{\partial^i \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}^r} \right| d^rV = \int_{d^rV} {}^iJ d^rV \quad (6)$$

より、

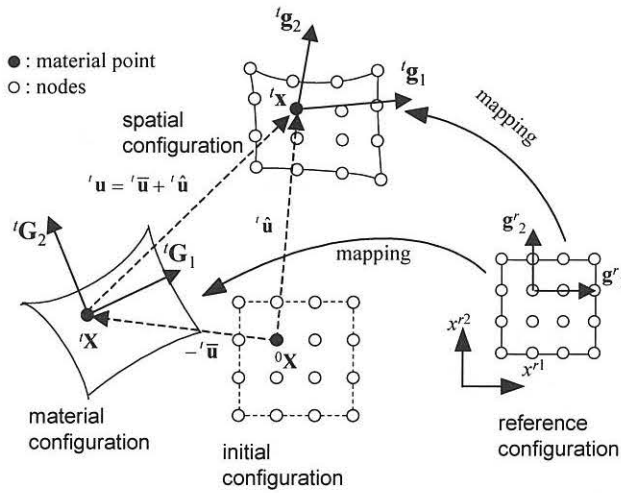


Fig.2 Concept of ALE formulation

時刻 0 の配置は大文字の \mathbf{X} で表されている。 \mathbf{X} 左肩の t は時刻を表しているわけではなく、 \mathbf{x} (物質点) の時刻 0 における配置であり、節点配置の ${}^0\mathbf{X}$ と区別している。以下において \mathbf{V} 、 \mathbf{J} も同様である。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V \mathbf{S} : \mathbf{E}' \mathbf{J} dv' - \int_V (\hat{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{b}' \mathbf{J} dv' \\ & + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma_L} (\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma_L + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma_E} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma_E \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここで、 \mathbf{J} は参照配置から物質配置への体積変化率であり、下線の付いた変位 $\hat{\mathbf{u}}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ は、それぞれ境界 Γ_L 、 Γ_E で規定された Lagrange 変位、Euler 変位を表す。 \mathbf{S} は物質配置を基準配置とした時刻 t における second Piola-Kirchhoff 応力テンソルであり、 \mathbf{E} は同様に Green-Lagrange ひずみテンソルである。 \mathbf{b} は初期配置に付加される体積力を表している。 \mathbf{S} と \mathbf{E} の間に Hooke の法則が成立する弾性材料の場合、上式の変分をとり、 $\delta\Pi=0$ として仮想仕事の原理に相当する次式を得る。なお、物質配置において参照する物質点の位置は、Euler 変位により時々刻々と変化するため、 \mathbf{J} の変分も考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}' \mathbf{J} + \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{E} \delta \mathbf{J} \right\} dv' \\ & - \int_V (\delta \hat{\mathbf{u}} + \delta \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{b}' \mathbf{J} + (\hat{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{b}' \mathbf{J} dv' \\ & + \alpha \int_{\Gamma_L} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_L + \alpha \int_{\Gamma_E} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_E = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

上式を時刻 $t' = t + \Delta t$ で増分分解する。以降の式では左上添字のない変数は増分を表している。

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ (\mathbf{S} + \mathbf{S}) : (\delta \mathbf{E}_L + \delta \mathbf{E}_{NL}) (\mathbf{J} + \mathbf{J}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}) : (\mathbf{E} + \mathbf{E}) (\delta \mathbf{J}_L + \delta \mathbf{J}_{NL}) \right\} dv' \\ & - \int_V (\delta \hat{\mathbf{u}} + \delta \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{b}' (\mathbf{J} + \mathbf{J}) + (\hat{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{b}' (\mathbf{J}_L + \delta \mathbf{J}_{NL}) dv' \\ & + \alpha \int_{\Gamma_L} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_L + \alpha \int_{\Gamma_E} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_E = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、

$$\delta^{t+\Delta t} \mathbf{E} = \delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}_L + \delta \mathbf{E}_{NL} \quad (10)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \mathbf{J} = \delta \mathbf{J} = \delta \mathbf{J}_L + \delta \mathbf{J}_{NL} \quad (11)$$

を用いた。式(10)、(11)において右下添字の L はそれぞれ \mathbf{u} に関して線形の項、 NL は \mathbf{u} に関して 2 次以上の項の変分を表している。また、 $\mathbf{J} = \det \bar{\mathbf{F}}$ ($\bar{\mathbf{F}}$ は参照配置から物質配置への変形勾配テンソル) より、

$$\mathbf{J} = \varepsilon_{ijk} \bar{F}_{i1} \bar{F}_{j2} \bar{F}_{k3} \quad (12)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial' \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}'}, \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial' \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}'} - \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}'} \quad (13)$$

である。

式(9)を変形し、線形化により変位に関する 2 次以上の項を無視することで、実際に解くべき式が得られる。

3.2 膜構造への適用

次に、膜構造における定式化について述べる。膜構造は十分に薄い曲面から構成され、曲げ剛性は無視できるほど小さく、面外方向のひずみ、応力は省略できる。また、面内は平面応力状態を仮定する。ここでは、曲面構造の定式化を容易にするため、埋め込み座標を用いる。膜構造は二変数で表される曲面から成るため、参照配置は二次元の自然座標系とする。

図 3 にケーブル補強膜構造の断面形状を図示する。はじめに、(a) の点線位置に張られていた補強ケーブルが、膜面の変形につれて滑りつつ、(b) まで変形したものとす。このとき、膜面とケーブルとの滑り量を Euler 変位、実際のケーブルの移動量を Lagrange 変位とすることで、ALE 法に基づくモデル化を行う。なお、本研究では簡単のため、ケーブルと膜面との間に生じる摩擦は考慮しない。

空間配置における共変基底ベクトルを \mathbf{g} 、物質配置における共変基底ベクトルを \mathbf{G}_i とする。それぞれ $\hat{\mathbf{u}}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ を用いて次式のように書ける。

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial' \mathbf{x}}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial({}^0\mathbf{x} + \hat{\mathbf{u}})}{\partial \alpha^i} = {}^0\mathbf{g}_i + \frac{\partial' \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha^i} \quad (14)$$

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial' \mathbf{X}}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial({}^0\mathbf{X} - \bar{\mathbf{u}})}{\partial \alpha^i} = {}^0\mathbf{G}_i - \frac{\partial' \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha^i} \quad (15)$$

ただし、埋め込み座標を用いている場合は ${}^0\mathbf{x} = {}^0\mathbf{X}$ より、 ${}^0\mathbf{g}_i = {}^0\mathbf{G}_i$ である。ここで式 (5) と同様に、それぞれの変位を MLSA から得られた形状関数を用いて各節点に離散化する。

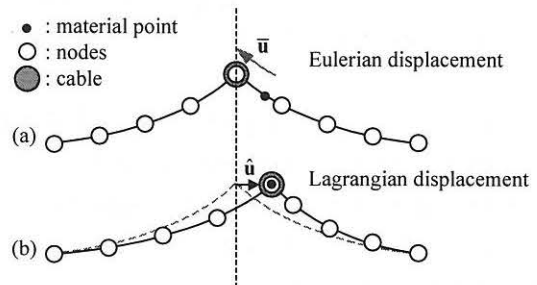


Fig.3 Concept of cable sliding by ALE method

$${}^i\hat{\mathbf{u}}(x^1, x^2) = \phi_i(x^1, x^2) {}^i\hat{\mathbf{u}}_1 \quad (16)$$

$${}^i\hat{\mathbf{u}}(x^1, x^2) = \phi_i(x^1, x^2) {}^i\hat{\mathbf{u}}_1 \quad (17)$$

式 (14), (15) における変位の微分は、形状関数の微分から得ることが出来る。なお、幾何形状は、関数として定義されることもあれば、変位と同様に離散値から MLSA により近似することも出来る。本研究では、節点位置を離散値として MLSA により近似している。

物質配置を基準とした空間配置における Green-Lagrange ひずみを、基底ベクトルを用いて表すと次式ようになる。

$${}^i\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^i\mathbf{g}_i \cdot {}^i\mathbf{g}_j - {}^i\mathbf{G}_i \cdot {}^i\mathbf{G}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (18)$$

ここで \mathbf{g}^i は参照配置における反変基底ベクトルを表す。時刻 t から $t+\Delta t$ の間のひずみ増分は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{E} - {}^t\mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ({}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_j - {}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j) \right. \\ &\quad \left. - ({}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_i \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_j - {}^t\mathbf{G}_i \cdot {}^t\mathbf{G}_j) \right\} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (19)$$

ここで各変位増分を用いて、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_i = {}^t\mathbf{G}_i - \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 \quad (20)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i = {}^t\mathbf{g}_i + \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 \quad (21)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left[({}^t\mathbf{g}_i \cdot \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 + {}^t\mathbf{g}_j \cdot \phi_{,j} \hat{\mathbf{u}}_1 + \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \phi_{,j} \hat{\mathbf{u}}_1) \right. \\ &\quad \left. - ({}^t\mathbf{G}_i \cdot \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 - {}^t\mathbf{G}_j \cdot \phi_{,j} \hat{\mathbf{u}}_1 + \phi_{,i} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \phi_{,j} \hat{\mathbf{u}}_1) \right] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ただし、 $\phi_{,i}$ は形状関数の x^i による偏微分を表す。

さて、本研究で用いたモデルでは、Euler 変位はケーブルの滑りを表しているため、膜面内の変形しか生じない。したがって 3 次元解析においては何らかの拘束が必要となるが、変形する膜面に伴う条件を変化させることは非常に困難である。そこで、Euler 変位を参照配置での 2 自由度のみを持つ変位 $\bar{\mathbf{u}}$ として扱うことで、面外変位の拘束を実現する。それを、次式を用いて物質配置に写像する事で、実空間での Euler 変位 $\bar{\mathbf{u}}$ を得ることができる。

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iG_{11} & {}^iG_{21} \\ {}^iG_{12} & {}^iG_{22} \\ {}^iG_{13} & {}^iG_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_E \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (23)$$

また、補強ケーブルの剛性を考える場合、幅を持たない膜として扱い、参照配置には 1 次元の自然座標系を用いることで、これまでと同様の手順で処理できる。注意すべき点は、Euler 変位は軸方向のみに生じることであり、実空間の Euler 変位に変換するためには、式 (23) の代わりに、次式を用いる。

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iG_{11} \\ {}^iG_{12} \\ {}^iG_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}'_E \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (24)$$

以上のような関係を用いて、解くべき方程式を節点に離散化してマトリクス表記することで、Newton-Raphson 法などの反復解法を用いて解析を行うことが出来る。

4. 数値解析

4.1 膜面の滑りの検証

本例題では、提案する手法による曲面とケーブルとの滑りのモデリングの妥当性について検討する。図 4 に示すような形状に張られた膜構造の滑り解析を実施する。節点数は 81、ヤング率は膜厚を h として $Eh=1.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ 、ポアソン比は 0 とした。膜面には $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 1000 \text{ Pa}$ の初期張力を与え、頂点に当たる 9 つの節点に x 方向に 0.1 の Lagrange 変位を強制変位として与える。この時、頂点で物質点の移動、すなわち滑りが生じるように Euler 変位については拘束しない。

解析結果を図 5 に示す。破線が初期形状を、実線が変形形状を表している。黒丸のプロットは、変形後に白丸の位置にある物質点が、変形前にあった位置を表している。求められた物質点は初期形状に乗っており、膜面に沿った物質点の滑りが得られていることが分かる。また、強制変位の移動量と、頂点の節点における膜面の滑り量との関係を図 6 に示す。図で理論解は、変形前後の膜の左端から頂点までの距離の差を幾何学的に求めたものを示している。解析結果は初期形状における物質点の位置と頂点の位置から求めているため、変形に伴う膜面の伸びが考慮されず理論解とは完全には一致しない。膜の長さに対して 5% 程度と変形が小さい間は、比較的良好な結果が得られている。それ以上の変形では最大で約 30% の差が生じているが、これは大変形状態における幾何学的非線形性の影響によるものと考えられる。

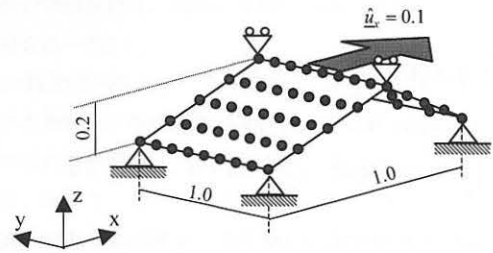


Fig.4 Analysis model of one-dimensional slip

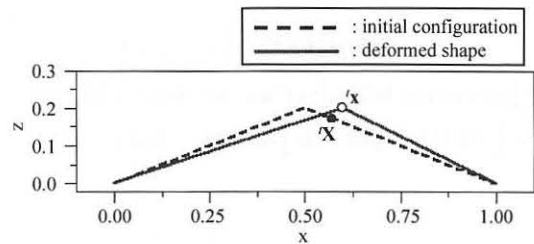


Fig.5 Analysis result

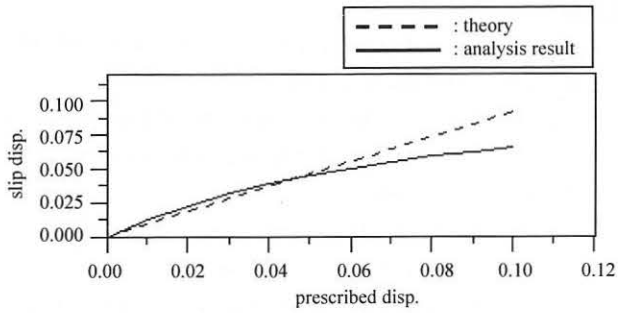


Fig.6 Slip displacement

4.2 ケーブル補強膜構造（ケーブルを剛体とした場合）

本例題では、正方形の境界内に張られた膜構造⁸⁾に補強ケーブルを想定した境界条件を課し、圧力を負荷した状態で滑りを生じる解析を行う。次式で表される初期形状の膜面に、 $x=0$ に沿って補強ケーブルが張られており、ケーブルは変形、移動しないものとする（ケーブル位置の Lagrange 変位 \hat{u} を拘束する）。

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5x^{r1} \\ 0.5x^{r2} \\ 0.1\{(x^{r1})^2 - 1\}\{(x^{r2})^2 - 1\} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

節点は等間隔に 11×11 点配置し、影響半径の大きさは $1.5c$ (c : 最小節点間隔) とする。ヤング率は、 $Eh=6.0 \times 10^6 \text{ N/m}$ 、ポアソン比は 0.267 とした。また領域積分は、図 7 に示すバックグラウンドセル毎に、 2×2 のガウス積分を行った。

初期形状の $x > 0$ の側に $5.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ の分布荷重を z 方向に与える。膜面がケーブルと固着している場合 ($\bar{u}:\text{fix}$) と滑りを許す場合 ($\bar{u}:\text{free}$) とで、変形の様子を比較する。解析条件を図 8 に示す。なお、滑りはケーブル位置のみで生じるため、それ以外の節点での Euler 変位は 0 とした。

図 9 に変形形状を、図 10 に $y=0$ に沿った断面形状を示す。滑りが生じない場合、 $x < 0$ の側は変形せず、初期形状を保っている。膜面に滑りが生じることで、 $x > 0$ の側の膜面はより大きく膨らみ、荷重が付加されていない側は引っ張られて直線状に変形している。ケーブルを表す節点の位置はそれぞれの解析で一致しており、膜面（物質点）のみの移動、すなわち滑りが表現できていることがわかる。

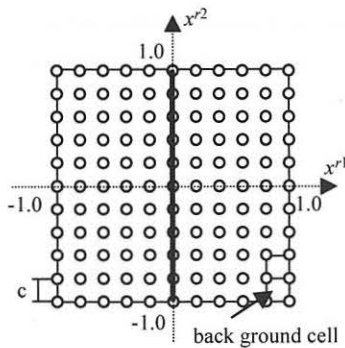


Fig.7 Nodal distribution

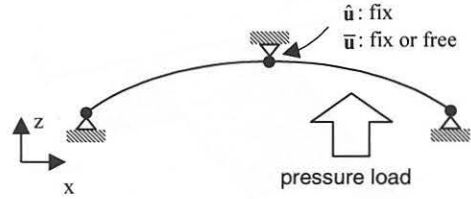


Fig.8 Analysis condition

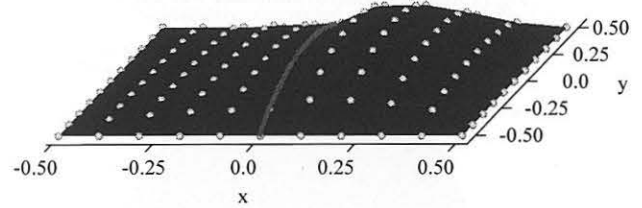


Fig.9 Deformed shape

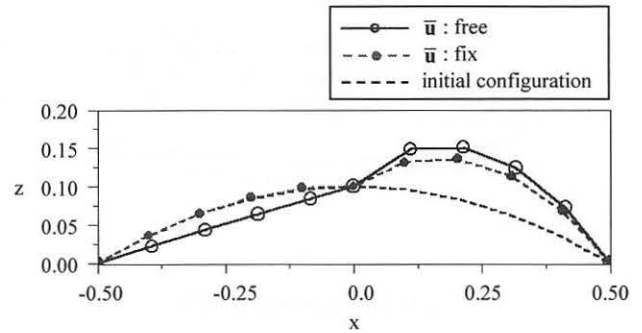


Fig.10 Deformed shape along line $y=0$

4.3 ケーブル補強膜構造（ケーブルが剛性を有する場合）

本例題では、実際の構造に近い解析としてケーブルも剛性を有し、変形するものとして扱う。また、ケーブルの軸方向の滑りも考慮する。

図 11 に示す構造に、ケーブルの両端に強制変位を与えつつ、膜面に張力を与える解析を行った。節点は膜面に 153 点、ケーブルに 17 点配置した。物性値は、膜面のヤング率 $Eh=6.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.267$ 、ケーブルのヤング率 Ec は断面積を A として、 $EcA=6.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ と $6.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ の 2 種類を用いた。張力は膜に $\sigma_{xx}=1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ 、ケーブルに $\sigma_{xx}=1.0 \times 10^2 \text{ Pa}$ を与えた。領域積分には、前例題と同様にバックグラウンドセルを用いた。

$EcA=6.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ の場合の変形形状を図 12 に示し、2 種類のケーブルでの変形の違いを図 13 に示す。ケーブルのヤング率が小さいほど変形は大きくなっており、定性的に妥当な結果が得られている。

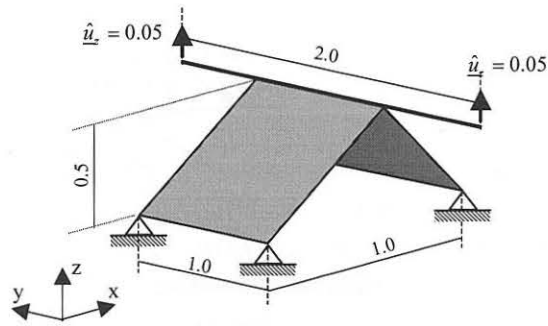


Fig.11 Analysis model of membrane with cable

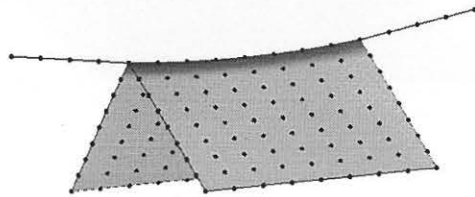


Fig.12 Deformed shape ($E_c A = 6.0 \times 10^7 \text{ Pa}$)

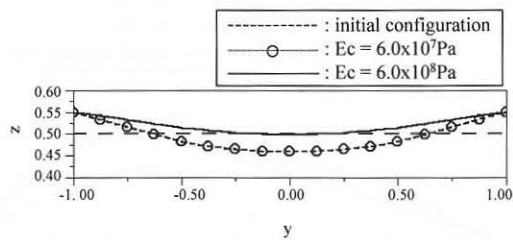


Fig.13 Deformed shape of cable

5. 結言

本研究では、著者らが提案した ALE 法による定式化に基づく EFGM の幾何学的非線形解析をケーブル補強膜構造に適用した。得られた結論を以下に示す。

- 1) ケーブル補強膜構造のメッシュレス解析のために、ALE 法に基づく幾何学的非線形解析手法について示した。
- 2) 本手法により、ケーブル、膜の折れ曲がりや滑りの解析が可能であることを数値解析例により示した。
- 3) 今後の課題は、摩擦の導入や、実験等との比較による解析結果の検討が挙げられる。

参考文献

- (1) 石井一夫：膜構造の形状解析（形状決定の問題）概説、膜構造研究論文集'89、日本膜構造協会、pp.83-107、(1989)。
- (2) 川島徹也、矢橋晋太郎、野口裕久、横堀一雄：移動最小自乗法による任意曲面上のメッシュレス測地線探索、膜構造論文集'99、日本膜構造協会、pp.1-6、(1999)。
- (3) T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu : Element free Galerkin methods, I. J. Num. Meth. Eng., Vol. 37, pp.229-256, (1994)。
- (4) Y. Y. Lu, T. Belytschko and L. Gu : A new implementation of the element free Galerkin method, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 113, pp.397-414, (1994)。
- (5) S. Beissel and T. Belytschko : Nodal integration of the element-free Galerkin method, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 139, pp.49-74, (1996)。
- (6) P. Krysl and T. Belytschko : Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method, I. J. Solids Struct., Vol. 33, pp.3057-3080, (1996)。
- (7) T. Belytschko, P. Krysl and Y. Krongauz : A three-dimensional explicit element-free Galerkin method, I. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 24, pp.1253-1270, (1997)。
- (8) 宮村倫司、野口裕久、横堀一雄：幾何学的非線形エレメントフリーガラキン法の定式化と膜構造解析への応用、日本機械学会論文集 (A 編)、Vol. 64, No. 623, pp.1753-1760、(1998)。
- (9) S. Y. Kim and S. Im : Analysis of wrinkling membrane by meshfree method, Proc. of Ices 2k, pp.1416-1420, (2000)。
- (10) 境、単、向井、橋、井上：折れ曲がり要素を用いたケーブル補強膜構造の形状解析に関する基礎研究、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.2029-2030、9月、(1994)。
- (11) 川島徹也、野口裕久：ALE-EFGM によるケーブル補強膜の幾何学的非線形解析定式化、日本機械学会論文集、投稿中。
- (12) R. B. Haber : A mixed Eulerian-Lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 43, pp.277-292, (1984)。
- (13) J.-P. Ponthot and T. Belytschko : Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 152, pp.19-46, (1998)。
- (14) 久田俊明、野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用、丸善。
- (15) H. Noguchi and T. Hisada : Integrated FEM formulation for total updated-Lagrangian method in geometrically nonlinear problems, Int. J. JSME Series A, Vol. 38, pp.23-29, (1995)。
- (16) H. Koivurova and A. Pramila : Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method, Comp. Mech., Vol. 20, pp.573-581, (1997)。

Meshless Analyses for Design of Cable-reinforced Membrane Structure

Tetsuya Kawashima^{*1}, Hirohisa Noguchi^{**2}, Kazuo Yokohori^{*3}

SYNOPSIS

In the analysis of cable-reinforced membrane structure, there are several complicated problems, such as the fold of membrane by cable, sliding of cable on membrane surface and so on. As finite element method (FEM) can hardly to analyze these problems, authors have applied the element free Galerkin method (EFGM), the meshless method presented by T. Belytschko et. al. in 1994, to analyze membrane structure with cable reinforcement. To model the sliding cable on membrane, the arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method is adopted. By using ALE formulation, deformation of membrane and sliding between cable and membrane can be represented as different displacement components. Additionally, convected coordinate system is utilized for geometrically non-linear analysis. In this paper, the proposed meshless method is applied to several numerical analyses of membrane structures with sliding cable.

*1 Graduate Student, Dept. of Mechanical Engineering, Graduate School, Keio Univ.

*2 Associate Professor, Dept. of System Design Engineering, Keio Univ.

*3 Taiyokogyo Corporation