超弾性薄膜の膨張と収縮挙動について

水澤　富作*
田中　宏明**

梗　　概

膜構造の形状決定問題は幾何学的非線形性の強い問題であり、これまでに多くの研究が報告されているが、超弾性膜の静的及び動的な膨張展開と収縮メカニズムは、必ずしも明確にされていないように思われる。本文では、アイソパラメトリック膜要素とViscous Relaxation法を用いて、空気圧を受ける超弾性半球膜の膨張挙動と減圧に伴う収縮挙動について検討を行い、膨張過程の飛び移り現象や膨張と収縮挙動の相違について明らかにしている。また、動的圧力の変動に伴う超弾性薄膜の膨張応答と収縮運動についても検討を行っている。

1.まえがき

軽量な膜構造は大空間を容易に、かつ経済的に架構することを可能にし、大型の利用空間を作り出すドームやテント、飛行船、消波用フレキシブルマウンドなどの仮設構造物や常設構造物に用いられている[1]。また、膜構造は軽量で収納性が良好であるため、地上構造物だけでなく宇宙や月面上の構造物等への適用も考えられている。膨張膜は、曲げや圧縮に抵抗するシェル構造などの曲面構造と異なり、封じ込められた圧力などの初期張力を与えることにより、安定した構造形態が作り出される。膜構造では、その厚さが非常に薄く、曲げや圧縮剛性が無視され、面内引張応力と、面内せん断応力のみに抵抗する構造物である。また、形状を保つため、膨張や曲げ荷重による応力を低減するために、ケーブルで補強する場合もある。このような膜構造の解析過程は、一般に2つに分けられる。すなわち、1) 初期張力の導入による形状決定問題、2) 得られたつり合い形状での静的及び動的問題である。また、膜構造の解析では、次のような非線形性を考慮しなければならない。(1) 幾何学的非線形性（限変位問題）(2) 超弾性材料などの材料学的非線形性(3) 導入される内圧などのよな形状依存の非線形外力（非保存力の問題）などが挙げられる。一方、このような膜構造問題は、古くから解析的手法や種々の数値解析法を用いて解析されてきている[2)-4)]。Rivlin[5]、Jiangら[6]による弾性及び超弾性膜問題の解析的研究、またOdenらの三角形要素による研究[7]、Leonardら[8]によるSuper-Parametric要素を用いたシェル膜の解析や、Charrierら[9]による三角形要素を用いたNeo-Hooken弾性材よりなる円形膜や楕円形膜の大変形解析が挙げられる。これらの研究では、高次の非線形方程式を解くために、Newton-Rapshon法や増分・反復法が用いられている。また、水澤らは[10]、アイソパラメトリック膜要素とViscous Relaxation法を用いて、超弾性膜の初期つり合い形状解析と自由振動解析を行っている。膜構造の形状決定問題に関する研究は多く報告されているが、空気圧を受ける超弾性膜の静的及び動的な膨張展開と収縮メカニズムは必ずしも明確にされていないように思われる。

本文では、アイソパラメトリック膜要素と Viscous Relaxation法を用いて、空気圧を受ける超弾性半球膜の膨張挙動と減圧に伴う収縮挙動を明らかにしている。特に、膨張展開で生じる飛び移り現象や収縮メカニズムについて明らかにしている。また、衝撃的な変動圧力を受ける超弾性薄膜の膨張と収縮応答解析を行い、静的挙動との相違について検討を行っている。

2.式の定式化

3次元有限変位弾性理論[11]と仮想仕事の原理に基き、膜要素の基礎方程式を導いている。ここで、次のような解析仮定を設ける。

(1)　膜の厚さは非常に薄く曲げ剛性は無視する。
(2)　膜の中央面に垂直な応力成分は無視し面内応力状態を仮定する。

*　工博　大同工業大学教授　工学部建設工学科　　**　大同工業大学大学院工学研究科修士課程建設工学専攻

(3) 変形前の中央面に垂直な断面は変形後もその面に垂直である。
(4) 面内引張り応力のみに抵抗し、面内圧縮応力には抵抗しない。
(5) 有限変位と有限ひずみを考慮する。
(6) 膜の材料は硫化ゴムのような超弾性材料とする。
(7) 無応力での膜の初期形状を、変形後の形状における応力とひずみの表現に用いる。
(8) テンソル表現と曲面座標系を用いる。
(9) 動的解析では、減衰の影響は無視する。

2.1 膜のひずみと応力

有限変位を伴う膜のひずみと応力は、Total Lagrangian 表現と曲面座標系を用いて表す。

図-1 に示すような、膜要素の変形前の形状の中央面での位置ベクトルは、次式に示すような 2 変数で定義される。

$$\bar{r}' = \bar{r}'\left(\xi^1, \xi^2\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

したがって、変形前の C_0 上の任意の点での位置ベクトルは、

$$\bar{r} = \bar{r}'\left(\xi^1, \xi^2\right) + \xi^3 \bar{a}_3 \quad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる。ここで、$\bar{a}_3$ は、中央面に垂直な単位ベクトルである。したがって、変形前の形状での基底ベクトル $\bar{g}_q$ は、

$$\bar{g}_q = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \bar{r}'_{,q} + \xi^3 \bar{a}_{3,q} \qquad ; \quad q=1,2 \quad \cdots\cdots(3)$$

で与えられる。ここで、コンマは ξ に関する偏微分を表している。中央面上の基底ベクトルは、$\xi_3=0$ より、次のようになる。

$$\bar{g}_q = \bar{r}'_{,q} = \bar{a}_q \qquad ; \quad q=1,2 \quad \cdots\cdots(4)$$

同様に、変形後の形状 C 上での膜の中央面の形状は、$\bar{R}' = \bar{R}'\left(\xi^1, \xi^2\right)$ で定義されるので、変形後の形状の任意の点の位置ベクトルは、次のように示される。

$$\bar{R} = \bar{R}'\left(\xi^1, \xi^2\right) + \xi^3 \bar{A}_3 \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで、$\bar{A}_3$ は中央面に垂直なベクトルであり、その大きさは、膜の厚さの変化を示す。また、変形前の形状での共変基底ベクトルは、次式で定義される。

$$\bar{G}_q = \bar{R}_{,q} = \bar{R}'_{,q} + \xi^3 \bar{A}_{3,q} \qquad ; \quad q=1,2 \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで、中央面は $\xi_3=0$ より、

$$\bar{G}_q = \bar{R}'_{,q} = \bar{A}_q \qquad ; \quad q=1,2 \quad \cdots\cdots(7)$$

になる。

C_0 の中央面での共変テンソル要素は次式で与えられる。

$$g_{qr} = \bar{a}_q \cdot \bar{a}_r = a_{qr} \quad , g_{33} = a_{33} = 1 \quad , g_{q3} = 0 \quad ; q,r=1,2 \quad \cdots\cdots(8)$$

ここで、変形前の膜の厚さを h_0、変形後の厚さを h とすると、膜の厚さの伸び比 λ は、次式で定義される。

$$\lambda = h/h_0 \quad \cdots\cdots(9)$$

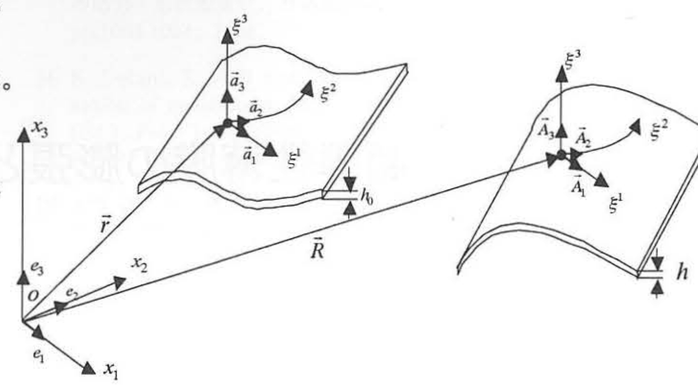


図-1 膜要素の曲面座標系

したがって、変形後の形状での共変テンソル要素は、

$$G_{qr} = \bar{A}_q \cdot \bar{A}_r = A_{qr} \quad , G_{33} = A_{33} = \lambda^2 \quad , G_{q3} = 0 \quad ; q,r=1,2 \quad \cdots\cdots(10)$$

で与えられる。また、Green のひずみテンソル γ_{qr} は、

$$\gamma_{qr} = (1/2)\left(G_{qr} - g_{qr}\right) \qquad ; q,r=1,2 \quad \cdots\cdots(11)$$

より、求められる。また、共変テンソルより導かれるひずみ不変量は、次式で定義される。

$$I_1 = g^{qr} G_{qr} = \lambda^2 + a^{qr} A_{qr}$$
$$I_2 = G^{qr} g_{qr} I_3 = \lambda^2 (A/a) a_{qr} A^{qr} + \lambda^4 (A/a)$$
$$I_3 = G/g = \lambda^2 (A/a)$$
$$; q,r=1,2 \quad \cdots\cdots(12)$$

ここで、$q,r=1,2$ $a = \det\left|a_{qr}\right|$ $A = \det\left|A_{qr}\right|$ であり、a^{qr} と A^{qr} は、それぞれ次式で定義される。

$$a^{sq} a_{sr} = \delta^q_r \quad , A^{sq} A_{sr} = \delta^q_r \qquad ; s=1,2$$

ただし、$\delta^q_r = \begin{cases} 1; & q=r \\ 0; & q \neq r \end{cases}$ $\cdots\cdots(13)$

次に、Mooney-Rivlin 材 [10] のような超弾性材の応力テンソルは、ひずみエネルギー関数より、

$$\tau^{qr} = 2a^{qr}\left[\left(C_1 + C_2\lambda^2\right)\right] + 2A^{qr}\left\{C_2 A/a - \lambda^2\left[C_1 + C_2\left(I_1 - \lambda^2\right)\right]\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

で与えられる。ただし、$a = \det\left|a_{qr}\right|$, $A = \det\left|A_{qr}\right|$ であり、λ は厚さの伸び比、I_1 はひずみ不変量である。また、C_1 と C_2 は Mooney-Rivlin 材の材料定数である。

2.2 アイソパラメトリック膜要素 [1,10]

ここでは、高次の補間関数を用いた Isoparametric 膜要素の運動方程式を、仮想仕事の原理より導く。Isoparametric 要素では、座標関数と変位関数に同じ形状関数、[illegible] が用いられ、次式で仮定される。

$$X_i(\xi_1,\xi_2)=M^I(\xi_1,\xi_2)X_i^I$$
$$u_i(\xi_1,\xi_2)=M^I(\xi_1,\xi_2)u_i^I \qquad ; I=1,\cdots,n\ ,\ i=1,2,3 \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

ここで、X_i, u_i は、直交座標系での要素の節点座標と節点変位を示し、ξ_1,ξ_2 は、要素の自然座標系である。nは要素の節点数である。また、*Appendix* には形状関数が示してある。

要素の運動方程式は、Hamilton の原理を用いると、次式で与えられる。

$$\iint_{S_0}\tau^{qr}\delta\gamma_{qr}h_0dS_0+\iint_{S_0}\rho_0\ddot{u}_i\delta u_ih_0dS_0$$
$$-\iint_{S_0}\rho_0b_{oi}\delta u_ih_0dS_0-\iint_{S_0}t_{oi}\delta u_idS_0=0 \qquad q,r=1,2\ ,\ i=1,2,3 \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

ここで、第１項は内力τ^{qr}の仕事を、第２項は慣性力の仕事であり、また、第３項及び第４項は、それぞれ物体力(b_{oi})と表面力(t_{oi})による仕事である。h_oは初期膜厚、ρ_oは密度である。また、Soは膜の中央面での初期面積である。

膜の初期形状と変形後の形状で定義される基底ベクトル $\vec{a}_q$　,$\vec{A}_q$ は、それぞれ次式で表される。

$$\vec{a}_q=(X_i,\vec{e}_i)_{,q}=M^I_{,q}\ X^I_i\vec{e}_i$$
$$\vec{A}_q=[(X_i+u_i)\vec{e}_i]_{,q}=M^I_{,q}(X^I_i+u^I_i)\vec{e}_i \qquad ; I=1,\cdots,n \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで、e_iは単位ベクトルである。$(\ )_{,q}$と $M^I_{,q}$は、それぞれqに関する偏微分を表す。また、共変メトリックテンソル要素 a_{qr} , A_{qr} は、次式で与えられる。

$$a_{qr}=(M^I_{,q}X^I_i)(M^J_{,r}X^J_i)$$
$$A_{qr}=\left[M^I_{,q}(X^I_i+u^I_i)\right]\left[M^J_{,r}(X^j_i+u^J_i)\right]$$
$$; I,J=1,\cdots,N\ ,\ q,r=1,2\ ,i=1,2,3 \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

Green のひずみテンソルγ_{qr}は、

$$\gamma_{qr}=(1/2)(A_{qr}-a_{qr})$$
$$=1/2\left(M^I_{,q}M^J_{,r}X^I_iu^J_i+M^I_{,q}M^J_{,r}X^J_iu^I_i+M^I_{,q}M^J_{,r}u^I_iu^J_i\right)$$
$$q,r=1,2 \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

で与えられる。

したがって、仮想ひずみ、$\delta\gamma_{qr}$,は、次式で表される。

$$\delta\gamma_{qr}=(\partial\gamma_{qr}/\partial u^I_i)\delta u^I_i=1/2\left(M^J_{,q}M^I_{,r}+M^I_{,q}M^J_{,r}\right)(X^J_i+u^J_i)\delta u^I_i \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

したがって、式(16)に $\delta u_i=M^I\delta u^I_i,\ddot{u}_i=M^I\ddot{u}^I_i$ 及び $dS_0=\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2$ を代入すれば、膜要素の運動方程式が、次式で与えられる。

$$\{\int\int_{-1}^{1}1/2\tau^{qr}\left(M^J_{,q}M^I_{,r}+M^I_{,q}M^J_{,r}\right)(X^J_i+u^J_i)h_0\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2$$
$$+\int\int_{-1}^{1}\rho_0h_0M^IM^J\ddot{u}^J_i\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2-\int\int_{-1}^{1}\rho_0h_0b_{oi}M^I\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2$$
$$-\int\int_{-1}^{1}t_{oi}M^I\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2\}\delta u^I_i=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

{ } が膜要素の剛性方程式である。式(22)を全要素について重ね合わせ、マトリックス表示すれば次式で表される。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K_T]\{u\}=\{P\} \qquad \cdots\cdots(22)$$

ここで、$[M]$ は質量マトリックス、$[K_T]$ は接線剛性マトリックスである。$\{P\}$ は外力ベクトルであり、$\{\ddot{u}\}$、$\{u\}$ は、それぞれ加速度及び変位ベクトルである。

2.3　膜に作用する表面力の表示

圧力のような表面力は、膜が有限変位するので、作用方向が変化し、非線形性を伴う非保存外力である。変形後の膜に作用する表面力は次式で与えられる。

$$\vec{P}=p^i\vec{A}_ids \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

ここで、p^iは変形後の膜の単位面積当たりに作用する力の成分であり、$\vec{A}_i$ は式（17）で与えられる。また、dsは変形後の膜の微小要素を示す。もし、外力の大きさと方向を一定にしたまま、変形前の膜に作用させると、

$$\vec{P}=t_{0i}\vec{e}_ids_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

で表される。t_{oi}は変形前の膜での単位面積当たりに作用する力の成分である。したがって、式(23)と(24)を等値し、両辺に$\vec{e}_j$を用いた内積をとれば、

$$t_{oi}=(ds/ds_0)p^i(\vec{A}_3\cdot\ \vec{e}_j) \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

が得られる。ただし、

$$ds/ds_0=\sqrt{(A/a)} \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

である。ここで、膜要素の中央面に常に垂直に作用する圧力を、$p^i=p(\xi_1,\xi_2)$とすれば、変形前の膜に作用する圧力の直交成分は、

$$t_{0j}=\sqrt{(A/a)}p(\vec{A}_3\cdot\ \vec{e}_j)=(p/\sqrt{a})p\left[(\vec{A}_1\times\vec{A}_2)\cdot\ \vec{e}_j\right] \qquad ;j=1,2,3 \qquad \cdots\cdots\cdots(27)$$

で与えられる。ただし、$\vec{e}_j$ は直交座標系での単位ベクトル、$\vec{A}_3=\vec{A}_1\times\vec{A}_2/\left|\vec{A}_1\times\vec{A}_2\right|$は、垂直ベクトルである。

2.4　Viscous Relaxation 法を用いた初期つり合い形状解析

超弾性膜の初期つり合い形状を求めるために、Webster により提案された Viscous Relaxation 法 [12]を適用する。この方法は、静的つり合い方程式に仮想的な減衰項をつけ加えた１階の微分方程式を Newton-Raphson 法で解く、準動的解析法の一方法である。

一般に、静的なつり合い方程式は、

$$F(u)=P(u)$$

………(28)

で与えられる。ここで、Fは内力ベクトル、Pは外力ベクトル、また、uは変位ベクトルであり、それぞれ次式で定義される。

$$F=\{F_1, F_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, F_N\}$$

$$P=\{P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_N\}$$

$$u=\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_N\}$$

……… (29)

ここで、N はシステム（系）の全自由度数である。

Newton-Raphson 法を用いて式(28)を解くと、k 回の反復計算では、次式のように与えられる。

$$\left(\partial F_i/\partial u\right)\Big|_{u^K}\left(u_j^{K+1}-u_j^K\right)=P_i^{K+1}-F_i^K$$

$$i, j=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,N$$

………(30)

ここで、初期応力が導入されない膜の場合には、次式で表わされる u^0 で求められる接線剛性マトリックス（ヤコビアンマトリックス）が特異になり解が求められない。

$$[K_T]=\left(\partial F_i/\partial u_j\right)\Big|_{u^0}$$

……… (31)

式(30)を直接解く代わりに、仮想的な減衰項を付加し、次式で示すような1階の常微分方程式を時刻歴積分法を用いて解く。

$$[D]\dot{u}+F(u)=P(u)$$

……… (32)

ここで、[D]は仮想減衰マトリックスであり、また $\dot{u}$ は速度ベクトルである。したがって、式(32)に対して時刻歴積分を行い、速度ベクトルが零になったとき、式(28)の解が得られる。

式（32）を、Crank-Nicholson の数値積分法を用いて数値計算する。Crank-Nicholson の数値積分法では、時刻 t+Δt で、次式の関係式が仮定される。

$${}^{t+\Delta t}u_i^{K+1}={}^{t}u_i^{K}+{}^{t+\Delta t}\dot{u}_i^{K+1}\Delta t$$

……… (33)

ここで、Δt は仮想の時間ステップであり、その値は任意に仮定される。

式（32）と式（33）を組み合わせ、Newton-Raphson 法を用いれば、次式のように表せる。

$$\left[[K_T]+(1/\Delta t)[D]\right]\left\{{}^{t+\Delta t}u^{K+1}-{}^{t}u^{K}\right\}={}^{t+\Delta t}P^{K+1}-{}^{t+\Delta t}F^{K}$$

………… (34)

ただし、接線剛性マトリックス,[K_T]は、

$$[K_T]=\left(\partial F_i/\partial u_j\right)\Big|_{u_K}$$

………… (35)

で与えられる。

したがって、[D]を適当に仮定し、また任意に仮定される初期形状,U^0 を初期条件に用いて、式（34）を解けば初期つり合い形状が求められる。

ここでは、仮想減衰マトリックスは、次式のように仮定する。

$$[D]=C[I]$$

………… (36)

ただし、C は減衰マトリックス係数であり、[I]は単位マトリックスである。また、収束を加速させるために、次式に示すように各時間ステップで C を変化させている。

$${}^{t+\Delta t}C={}^{t+\Delta t}\mu^{0}C$$

………… (37)

$${}^{t+\Delta t}\mu={}^{t}\mu\gamma\sqrt{\sum\left({}^{t}u_i-{}^{t-\Delta t}u_i\right)^2\Big/\sum\left({}^{t}u_i\right)^2}$$

………… (38)

ここで、^{0}C は初期減衰定数、${}^{0}\mu$は初期減衰係数（initial damping factor)、γは減衰を低減する係数（decrement coefficient）であり、それぞれ任意に仮定される。一般に、γは 1.0 ぐらいの値をとれば、少ない時間ステップ数で収束値が得られる。また、収束判定は、次式で評価している。

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left({}^{t}u_i-{}^{t+\Delta t}u_i\right)^2/\sum_{i=1}^{N}\left({}^{t}u_i\right)^2}\le\varepsilon$$

………… (39)

数値計算例では、収束判定値は 0.0001 に仮定している。

2.5 動的応答解析

減衰の影響を無視した膜の非線形運動方程式は、次式のように示される。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K_T]\{u\}=\{P\}$$

……… (40)

この運動方程式を、時刻歴積分を用いて解析するためには、増分値を時間ステップで置き換えれば、膜の非線形運動方程式は次式のように表される。すなわち、時刻 t+Δt における（k+1）回反復での運動方程式は、

$$[M]\left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}\ddot{u}\right\}+\left[{}^{t+\Delta t}_{k}K_T\right]\left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}u-{}^{t+\Delta t}_{k}u\right\}=\left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}P\right\}-\left\{{}^{t+\Delta t}_{k}F\right\}$$

……… (41)

で与えられる。ここで、$\left[{}^{t+\Delta t}K_T\right]$＝全体接線剛性マトリックス$[M]$ ＝全体質量マトリックス、$\{\Delta u\}$ ＝増分変位ベクトル、$\{{}^{t+\Delta t}\ddot{u}\}$＝加速度ベクトル、$\{{}^{t+\Delta t}P\}$ ＝外力ベクトル、$\{{}^{t+\Delta t}F\}$ ＝内力ベクトルである。

ここでは、上記の非線形運動方程式を、Newmark のβ法を用いて解いている。また、各時間ステップでの残差を最小化するために Newton-Raphson 法を適用している。すなわち、時刻 t＋Δt での

速度と変位ベクトルは、次式で定義される。

$$ {}^{t+\Delta t}_{k+1}\dot{u} = {}^{t}\dot{u} + \left[(1-\alpha_1)\,{}^{t}\ddot{u} + \alpha_1\,{}^{t+\Delta t}_{k+1}\ddot{u}\right]\Delta t \qquad \cdots\cdots\cdots (42) $$

$$ {}^{t+\Delta t}_{k+1}u = {}^{t}u + {}^{t}\dot{u}\Delta t + \left[(1/2-\beta_1)\,{}^{t}\ddot{u} + \beta_1\,{}^{t+\Delta t}_{k+1}\ddot{u}\right]\Delta t^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (43) $$

ここで、${}^{t}u, {}^{t}\dot{u}, {}^{t}\ddot{u}$ は時刻ｔにおける変位、速度及び加速度ベクトル、${}^{t+\Delta t}_{k+1}u, {}^{t+\Delta t}_{k+1}\ddot{u}$ ＝時刻 t＋Δｔで（k＋1）回反復の変位と加速度ベクトルを示す。α_1, β_1は、Newmark の積分定数である。ここでは、$\alpha_1=1/2$, $\beta_1=1/4$ を用いている。式（43）を書き換えると、

$$ {}^{t+\Delta t}_{k+1}\ddot{u} = a_0\left({}^{t+\Delta t}_{k+1}u - {}^{t}u\right) - a_1\,{}^{t}\dot{u} - a_2\,{}^{t}\ddot{u} \qquad \cdots\cdots\cdots (44) $$

ただし、

$$ a_0 = 1/(\beta_1\Delta t^2),\quad a_1 = 1/(\beta_1\Delta t),\quad a_2 = 1/(2\beta_1) - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots (45) $$

である。式（45）を式（41）に代入すると、

$$ \left[{}^{t+\Delta t}_{k}\overline{K}_T\right]\{\Delta u\} = \left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}\overline{P}\right\} - \left\{{}^{t+\Delta t}_{k}F\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (46) $$

が得られる。ここで、$\left[{}^{t+\Delta t}_{k}\overline{K}_T\right]$は修正接線剛性マトリックスであり、

$$ \left[{}^{t+\Delta t}_{k}\overline{K}_T\right] = \left[{}^{t+\Delta t}_{k}K_T\right] + a_0[M] \qquad \cdots\cdots\cdots (47) $$

$$ \left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}\overline{P}\right\} = \left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}P\right\} - [M]\left\{a_0\left({}^{t+\Delta t}_{k}u - {}^{t}u\right) - a_1\,{}^{t}\dot{u} - a_2\,{}^{t}u\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (48) $$

$$ \{\Delta u\} = \left\{{}^{t+\Delta t}_{k+1}u\right\} - \left\{{}^{t+\Delta t}_{k}u\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (49) $$

で得られる。なお、t＝0 での初期変位,${}^{0}\{u\}$ は、Viscous Relaxation 法で求められた膜の初期つり合い形状を用い、また、初速度,${}^{0}\{\dot{u}\}$ は 0 に仮定している。

膜に作用する変動圧力は、次式のようなステップ荷重で仮定している。

$$ P_t = \alpha P_0(t)\delta(t - t_0) \qquad \cdots\cdots\cdots (50) $$

ここで、P_0は初期圧力、$\alpha=P_t/P_0$である。

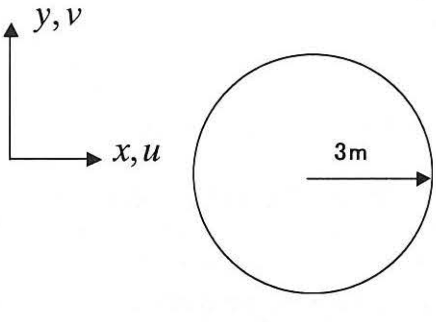
３.数値計算例及び考察

ここでは、変動内圧を受ける平面円形膜や半球形状の超弾性膜の膨張と収縮挙動について検討し、また衝撃圧力を作用させたときの半球膜の膨張と収縮応答解析を行っている。数値計算では、膜の材料を超弾性材料(Mooney-Rivlin 材)とし、材料定数を C_1=110kN/m^2 と C_2=38 kN/m^2.に仮定している。

また、本文で用いるアイソパラメトリック膜要素の収束性と精度比較は、文献 [10] に報告しているので省略する。

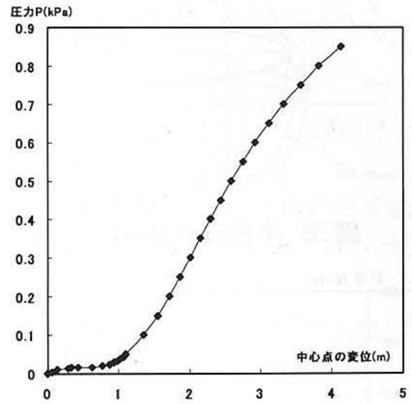
3.1　圧力を受ける超弾性膜の膨張挙動

図-3 は、図-2 に示すような周辺が固定された平面円形膜の中央点のたわみと圧力の関係が示してある。ここで、円形膜の半径は 3m、膜厚は 3mm、また密度は 52.0(kgsec^2/m^4)に仮定している。要素分割は対称性を考慮し、８節点アイソパラメトリック膜要素を用いて 1/4 領域を 16 要素に分割している。

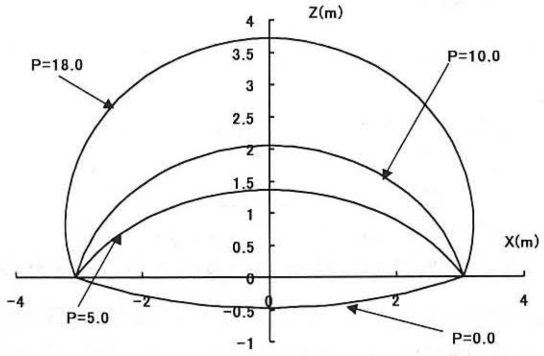


図−2　平面円形膜のモデル図

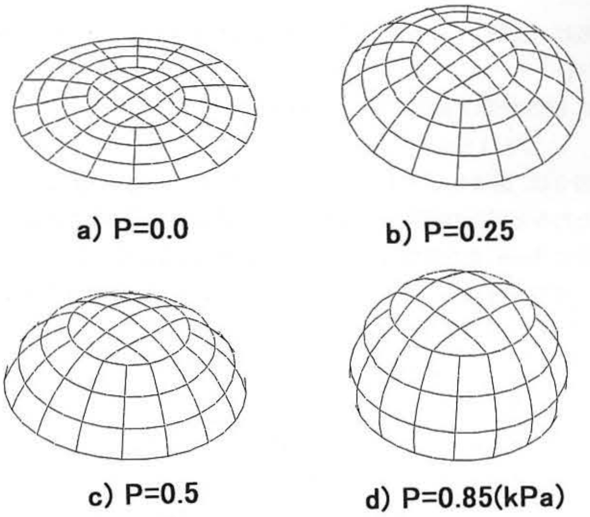
図-4 は、各圧力での中央断面のつり合い形状が示してある。また、図-5 には、各圧力での円形膜の膨張変形図が示してある。これより、圧力が 0 の場合には、自重により下凸な初期つり合い形状が示される。図-3 より、中央点のたわみは、圧力の増大と伴に超弾性の影響により非線形な性状を示し、圧力の増大と伴に安定したつり合い形状が得られている。



図−3　平面円形膜の中心点のたわみと圧力の関係



図−4　中央断面における各圧力のつり合い形状



図－5　平面円形膜の膨張変形図

図-7 は、図-6 に示すような下凸の周辺が固定された半球形膜の外側から圧力を増大させながら、膨張させた時の半球形状膜の中央点でのたわみと圧力の関係が示してある。ここで、半球の直径を 6m、膜厚を 3mm、また密度は 52.0(kgsec²/m⁴)に仮定している。圧力 P は 0 から 0.70(kPa.)まで変化させている。図-8 は、各圧力での中央断面における膨張変形が示してある。また、図-9 は、各圧力での膨張形状を示したものである。これより、半球状の膜では圧力の増大と伴に

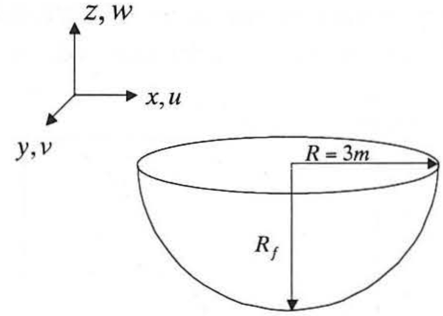
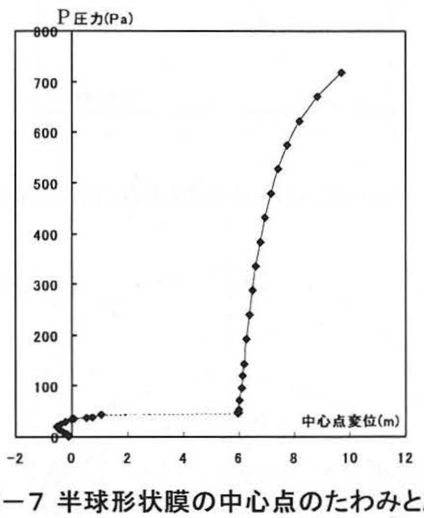
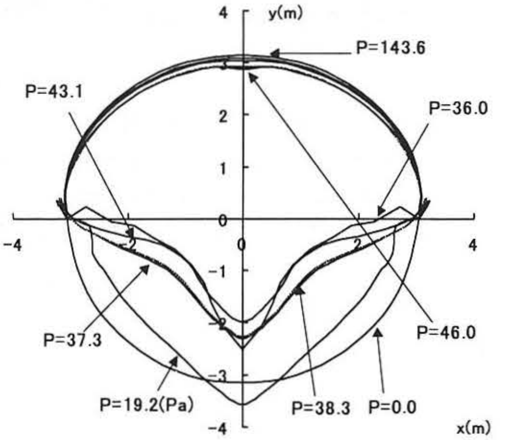


図-6　半球形状膜のモデル図

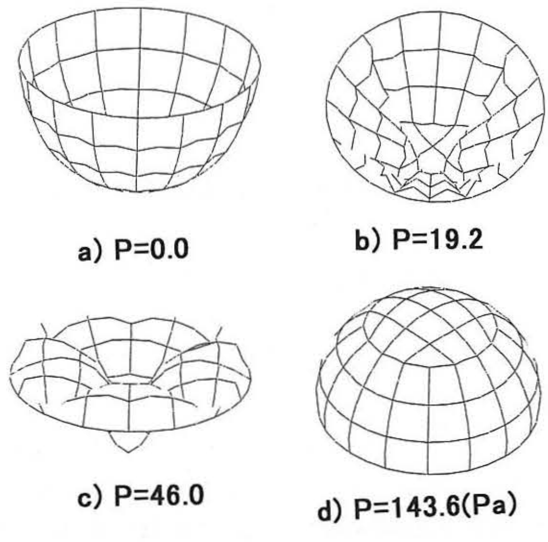


図－7 半球形状膜の中心点のたわみと圧力の関係

中心点の変位も増大し、ある圧力に達すると急激な膨張変形を伴う、飛び移り現象が生じる。飛び移り後は、圧力の増大にしたがって、超弾性の影響により大きな膨張変形をするので、非線形な圧力一変位曲線を示している。また、膨張変形は図-8 と図-9 から、圧力の増大と伴に、中央部に局所的な下凸の変形が生じ、また固定端周辺部に局所的な変形が形成される。さらに圧力を増加させると、急激な膨張を伴い安定した膨張つり合い形状が得られる。図-10 には、半球形状膜の膨張変形に与える深さ比(Rf/Rd)の影響が示してある。

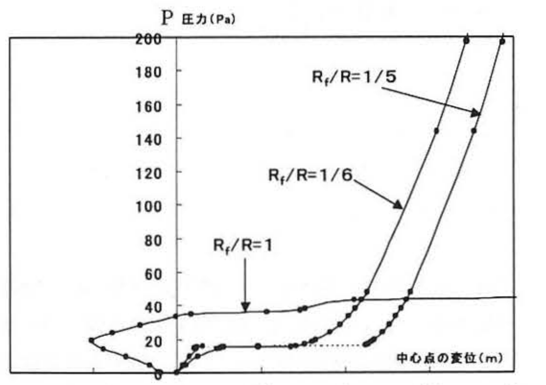


図－8　中央断面における各圧力のつり合い形状 (Rf／R=1)



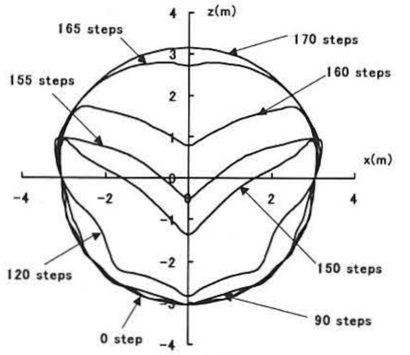
図－9　半球形状膜の膨張変形図

ここで、Rf は自重でつり合った球形膜の深さを表し、深さ比は 1,1/5,1/6 と変化させている。これより、急激な膨張変形を伴う飛び移り現象は深比比で 1/6 を超えると現れてくる。

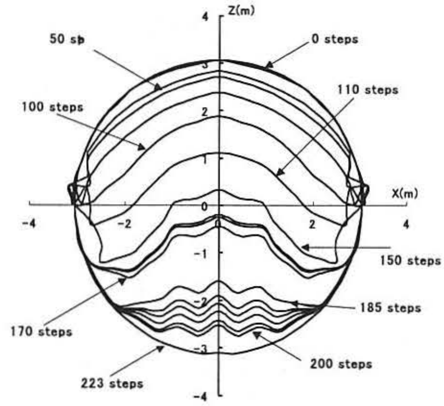


図－10　半球形状膜の中心点の変位に与える深さ比の影響

図-11 は、Viscous Relaxation 法を用いて先に示した半球形状の中央断面での超弾性膜の膨張つり合い形状の収束状態を、各時刻ズテップごとに示したものである。ただし、圧力が 143.6(Pa.)、初期形状を半球と仮定している。これより、Viscous Relaxation 法を用いれば膜の初期形状から膨張つり合い形状までの膨張過程が求められる。各時刻ステップごとの変形性状は、静的に求めた膨張変形と良く一致している。



図－11 Viscous Relaxation 法による半球形状膜の収束状態 (P=143.6Pa)

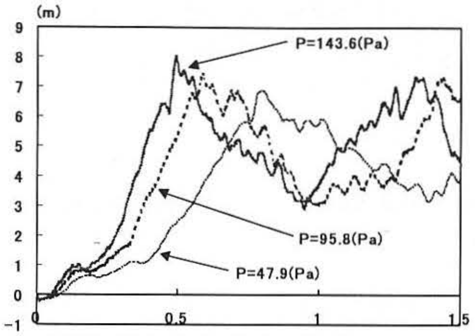


図－12 自重による半球形状膨張膜の収縮過程

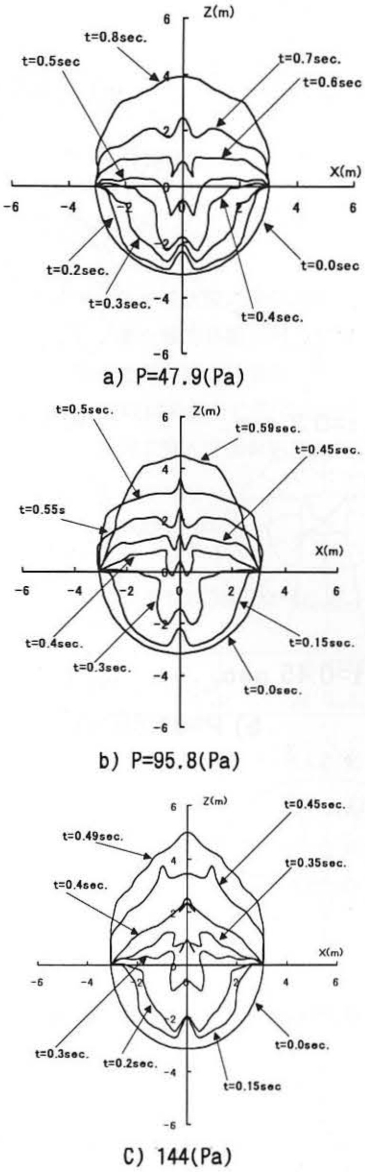
図-12 は、圧力 47.9(Pa)で膨張させたつり合い形状から圧力をゼロにして、自重のみで収縮する過程を Viscous Relaxation 法で求めたものである。これより、収縮過程は図-11 で示した膨張過程とは異なり、固定辺周辺部が早く収縮し、中央部を順次巻き込みながら、つり合い形状に収束していくことが分かる。

3.2 衝撃圧力を受ける球形状膜の膨張と収縮応答

図-13 は衝撃圧力を受ける図-6 に示すような半球形状の超弾性膜の中央点の変位応答曲線を示している。ここで、膜厚は 3mm に仮定し自重のみでつり合った初期つり合い形状を初期条件としている。また衝撃荷重はステップ圧力で与えている。ここで、衝撃圧力は 47.9, 95.8 と 143.6(Pa.)に変化させている。また、図-14 は各時刻での中央断面の膨張変形応答が示してある。図-15 は衝撃圧力を受ける半球形状膜の各時刻での膨張図が示してある。図-14 と図-15 より、衝撃圧力が作用すると中央部に上凸状の局所変形が生じ、時刻の経過と伴に複雑な変形を伴い、急激な膨張挙動が示される。衝撃圧力の大きさが大きいほど、急激な膨張応答が示される。また高圧ほど、中央部での局所変形が時刻の経過と伴に、折れたたまれるように変形し、急激な膨張展開が示される。静的解析の結果と比較すると、膨張する場合の中央部での局所変形が異なっている。



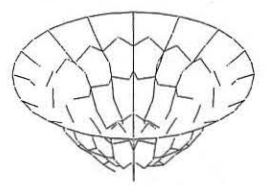
図－13 衝撃圧力を受ける半球形状膜の中心点の変位応答曲線



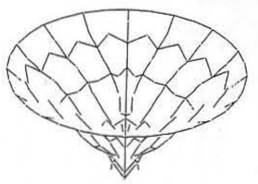
図－14 中央断面における各時刻での膨張運動性状図

次に 143.6(pa.)の衝撃圧力を受ける半球形状膜の膨張に与える膜厚の影響について示す。ここで、膜厚を 1mm,3mm と 5mm に変化させている。図-16 には、半球形状膜の中央断面の変形性状を各時刻で示したものである。これより、膜厚が大きくなると膨張展開するまでに時間がかかる。一方、膜厚が薄くなると、中央点でかなり

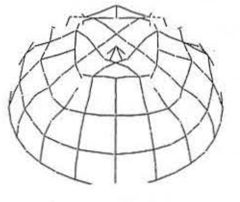
複雑で局所的な変形を伴いながら膨張することがわかる。



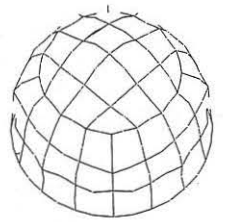
i) t=0.3 sec.



ii) t=0.6 sec.

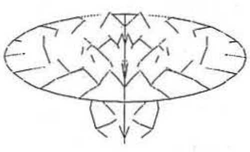


iii) t=0.7 sec.

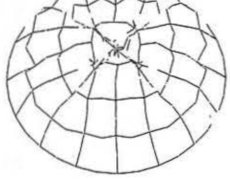


iv) t=0.8 sec.

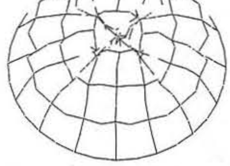
a) P=47.9(Pa)



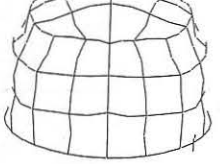
i) t=0.3 sec.



ii) t=0.4 sec.

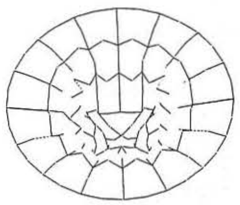


iii) t=0.45 sec.

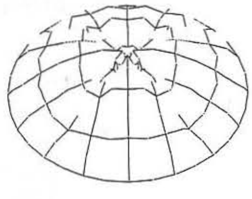


iv) t=0.5 sec.

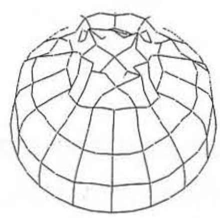
b) P=95.8(Pa)



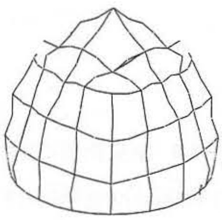
i) t=0.2 sec.



ii) t=0.3 sec.



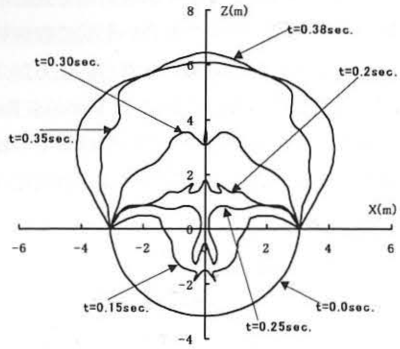
iii) t=0.45 sec.



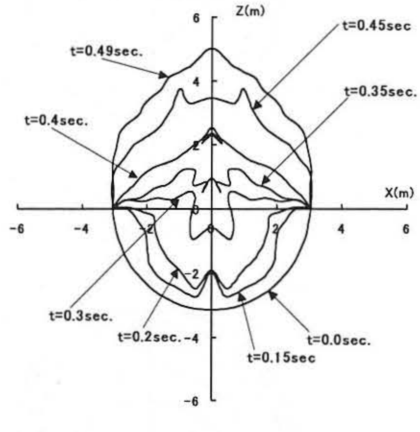
iv) t=0.49 sec.

c) P=143.6(Pa)

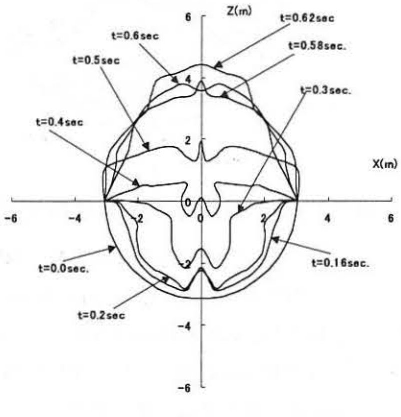
図－15 半球形状膜の各時刻での膨張運動性状図



a) 膜厚1mm



b) 膜厚3mm

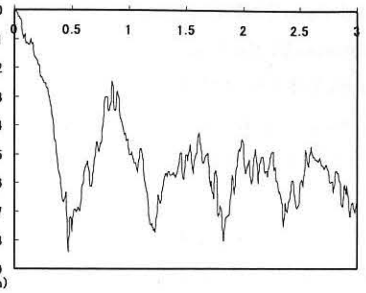


c) 膜厚5mm

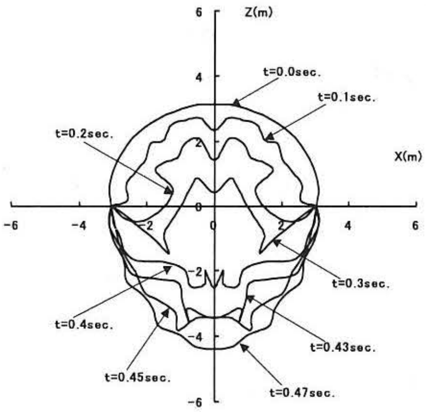
図－16 半球形状膜の各時刻での膨張運動性状図に与える厚さの影響　P=143.6(Pa)

最後に,図-17 は膨張した半球形状膜を衝撃的に減圧した場合の中央点の変位応答性状を示している。ここで、膜厚は 3mm、初期内圧を 0.15(Kpa.)に仮定し、ステップ荷重で圧力を 0 にしている。

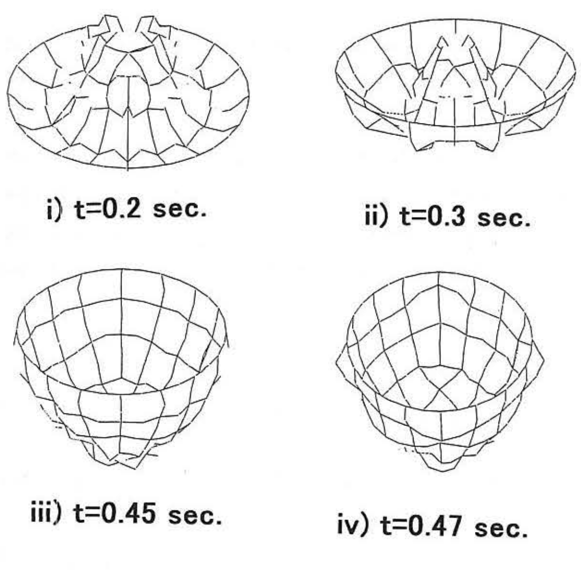
また、図-18 は各時刻での中央断面の収縮変形挙動を示している.同様にして、図-19 は各時刻での膨張膜の収縮運動図が示してある。これより、膨張膜の内圧が急激に下がると時刻の経過に伴い、膜全体にしわが発生して、膜全体がドーナツ状に変形し、また中央部が急激に収縮し、自重のみによるつり合い形状に移行することがわかる。



図－17 衝撃圧力を受ける半球形状膜の中心点の変位応答曲線 (P=144Pa)



図－18 衝撃圧力を受ける半球形状膜の各時刻における中央断面の収縮運動性状図(P=144Pa)



図－19 半球形状膜の各時刻での収縮運動図

4.あとがき

本文では、有限要素法と Viscous Relaxation 法を用いて、空気圧を受ける半球形状の超弾性膜の膨張展開挙動と減圧に伴う収縮挙動について検討を行い、また衝撃的な変動圧力を受ける膜の膨張応答と収縮運動を解析している。 得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

1） 外圧を受ける半球形状の超弾性膜の膨張展開は、圧力の増加に伴い、中央部に局所的な下凸の変形を生しながら固定端周辺部に局所的な変形が形成され、ある圧力になると、急激に膨張展開する飛び移り現象が生じる。膨張展開で生じる飛び移り現象は、円形膜では見られず、深さ比で 1/6 を超えると現れ、超弾性の影響は、飛び移り後の膨張過程で見られる。

2） 準動的解析法の一手法である Viscous Relaxation 法を用いれば、仮想的な各時間ステップでのつり合い形状が求められ、また荷重制御に基づく静的解析では求められない飛び移り挙動や収縮挙動の変形性状を求めることが可能である。

3） 半球形状の超弾性膜を衝撃的な圧力で膨張させると、静的に膨張させた場合と異なり、中央部に上凸の局所変形が生じ、時刻の経過と伴に複雑な変形を形成し急激な膨張応答が示される。衝撃圧力の大きさが大きいほど、中央部での局所変形が時刻の経過に伴い、折れたたまれるように変形し、急激な膨張運動が示される。また、膨張応答に与える膜厚の影響は、膨張時間と変形性状として現れる。

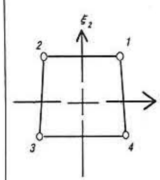
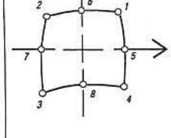
4） 膨張した半球形状膜を衝撃的に減圧させると、膜全体にしわが発生して、時刻の経過に伴い膜全体がドーナツ状に収縮性状を示しながら、中央部が急激に収縮運動して自重のみによるつり合い形状に移行する。

このように、空気圧を受ける半球状膜の膨張過程と収縮挙動は、かなり異なった性状を示し、また静的挙動と動的挙動においても変形性状が異なっている。本文で得られた結果が、地上膜構造または宇宙膜構造の膨張展開や収縮収納の設計に役立てば幸いである。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。

Appendix

アイソパラメトリック膜要素の形状関数 $M^I(\xi_1,\xi_2)$

要素モデル	節点	$(\xi_1,\ \xi_2)$	形状関数 $M^I(\xi_1,\xi_2)$
4 節点要素 	1	(1,1)	$(1+\xi_1)(1+\xi_2)/4$
	2	(-1,1)	$(1-\xi_1)(1+\xi_2)/4$
	3	(-1,-1)	$(1-\xi_1)(1-\xi_2)/4$
	4	(1,-1)	$(1+\xi_1)(1-\xi_2)/4$
8 節点要素 	1	(1,1)	$(1+\xi_1)(1+\xi_2)(\xi_1+\xi_2-1)/4$
	2	(-1,1)	$(1-\xi_1)(1+\xi_2)(-\xi_1+\xi_2-1)/4$
	3	(-1,-1)	$(1-\xi_1)(1-\xi_2)(-\xi_1-\xi_2-1)/4$
	4	(1,-1)	$(1+\xi_1)(1-\xi_2)(\xi_1-\xi_2-1)/4$
	5	(1,0)	$(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_2)/2$
	6	(0,1)	$(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1+\xi_2)/2$
	7	(-1,0)	$(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_2)/2$
	8	(0,-1)	$(1-\xi_1)(1+\xi_1)(1-\xi_2)/2$

参考文献

1. Leonard,J.W.: Tension Structures. MaGraw-Hill,1987.
2. Yang,W.H.: and Feng,W.W.: On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes.Journal of Applied Mechanics, Vol.37,pp.1002-1011,1970.
3. Hughes,T.J.R. and Carnoy,E.: Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strain. pp.193-208.1980.
4. Hart-Smith,L.J. and Crips,J.D.C.: Large elastic deformations of thin rubber membranes. Int.J.Engng Sic., Vol.5,pp.1-24,1967.
5. Oden,J.T.: Finite elements of nonlinear continua.MaGraw-Hill, 1972.
6. Jiang, L. and Haddow, J.B.: A finite element formulation for finite static axsymmetric deformation of hyperelastic membranes. Computers & Structures,57-3,pp.401-405,1995.
7. Oden,J.T. and Sato,T.: Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method.Int. J.Solids and Structures,Vol.3,pp.471-488,1957.
8. Verama,V.K. and Leonard,J.W.: Nonlinear behavior of cable-reinforced inflation of elastic membranes . ASCE, Vol.104, pp.735-749,1978.
9. Charrier,J.M., Shrivastava,S. and Wu,R.: Free and constrained inflation of elastic Membranes in relation to thermoforming-
non-axsymmetric problems.J. Strain Analysis, Vol.24, pp.55-74,1989.
10. 水澤富作,Leonard,J.W.: 膨張膜の非線形解析について,構造工学論文集 Vol37A, pp.15-23,1991.
11. Green,A.E. and Adkins,J.E.: Large elastic deformations. Claredon Press,1954.
12. Webster,R.L.:On the static analysis of structure with strong geometric nonlinearity. Compt.Struct.,Vol 11, pp.137-145, 1980.

Inflating and deflating behaviors of hyperelastic membranes

Tomisaku Mizusawa*1

Hiroaki Tanaka *2

SYNOPIS

The finding an equilibrium configuration of membrane structures is one of problems including strong geometrical nonlinearity, and many research papers have been published. However the static and dynamic analyses of inflation and deflation of hyperelastic menmbranes have been limited.

This paper deals with the inflating and deflating mechanism of a hemisphere membrane due to air pressure by using an isoparametric membrane element. The nonlinearities arising from large displacement, from nonlinear stress-strain relationships and from nonconservative loanings are considered. The snapthrough behavior and the difference between inflating and deflating mechanism of the menbrane are verified. The dynamic behaviors of the membranes under the action of impact pressure are also investigated.

*1 Professor , Daido Institute of Technology *2 Graduate Student, Daido Institute of Technology