1次固有振動数を剛性の指標とした膜構造物の初期応力・形状設計法

藤原 淳 [*1], 大崎 純 [*2], 北折 智規 [*1]

梗　概

定ひずみ三角形有限要素を用いて離散化された骨組支持膜構造物に対し，剛性の指標として膜面の1次固有値(固有円振動数の2乗)に着目しこれを指定することによる剛性指定型の応力・形状最適化手法を提案する。形状指定条件下においては応力の非線形関数となる膜面の1次固有値を1次近似により表し，逐次計算を繰り返すことによりこれを指定値へと収束させる。また，形状に関する感度解析においては2次微分項を無視しプログラムの簡略化を図る。例題においては，HP形状を持つ骨組膜構造物に対し本手法を適用することにより，本手法による固有値制約の精度および形状感度解析における近似の精度を例証する。

1. 序

一般的な膜構造物の設計では，境界形状および内部応力比分布を与条件として釣合い形状を求める，原型曲面解析と呼ばれる形状解析から始まる。釣合い形状の決定後，応力レベルを与え応答解析を行ない，曲面の応答特性が確認される。以上の設計法では，曲面形状が許容されない場合には応力比分布を，また応答特性が許容されない場合には応力レベルをそれぞれ変更して解析を再実行する必要があるが，どちらの場合も変更の具体的な指針は存在せず，勘と経験に基づく試行錯誤に頼らざるを得ない。

坪田・吉田 [1] は，仮定した裁断図形状に対して非線形釣合い形状解析により釣合い形状を求め，得られた応力分布が望ましくないときには，裁断図形状を変更し，繰り返し形状解析を行なって最適な裁断図形状を求める手法を提案した。一方，大崎ら [2, 3] は，指定された釣合い形状のもとで釣合条件および釣合い曲面が平面裁断図より形成される条件 (可展条件) を満足し，なおかつ目標とする応力分布をでき得る限り実現する応力分布を決定する逆問題型設計法と，応力分布の形状感度解析を行ない最適化アルゴリズムを用いて更に良好な応力分布を実現する形状の探索を繰り返す，二段階最適化手法を提案した。しかし，以上の設計法では釣合い曲面の応答特性が考慮されていない。

膜構造物は，外力作用時に面外に大きく変形するので，幾何学的非線形性を考慮した応答評価が必要である。従って，外力に対する応答量は，釣合い形状のみならず面内応力分布にも依存する。目標応力分布を指定する設計法では，目標応力分布が指定されると釣合い形状および内部応力分布はほぼ一意に決定されるため，目標応力の決定後は剛性改善の自由度は残されない。外力作用による曲面の変形および応力分布の変化が大きいなど，応答特性が許容できない場合は，目標応力分布の変更が必要であるが，変更に関する指針が明らかではなく，非効率的な繰り返しが必要とされる。

Uetani *et al.* [4] は，指定された釣合い形状をできるだけ満足する応力比の決定後，静的な指定外力に対する最大変位が許容値以下となるような応力レベルを決定する手法を提案した。しかし，この手法では膜面の可展条件が考慮されておらず，決定された応力分布および応答特性が実現される保証はない。一方，大崎・山川 [5] は逆問題型設計法 [2, 3] を拡張し，コンプライアンス (静的外力作用時の外力仕事) を剛性の指標として，静的な指定外力に対するコンプライアンスを最小とする釣合い形状および応力分布を実現する手法を提案するとともに，膜の面内剛性を有効に活用できる形状が最適であることを示した。しかし，この手法では最適設計解は指定外力に依存し，指定外力以外の外力作用時の応答特性が保証されないという問題点がある。

本論では，逆問題型設計法 [2, 3] を拡張し，指定された釣合い形状のもとでの釣合条件，可展条件および動的剛性を代表する指標である固有値 (固有円振動数の2乗) に関する制約のもとで，釣合い状態での最適な応力分布および形状を実現するための裁断図設計手法を提案する。1次固有値を指定することにより，静的剛性の下界を保証することができるものと考える。本手法はまず第1段階で，形状を既知とする条件下では応力に関して非線形関数となる固有値指定制約を，1次近似を用いて導入し，逐次計算を行ない固有値指定制約を満足する応力分布を決定する。そして第2段階では，形状に関する感度に基づき

*1　京都大学大学院工学研究科 大学院生
*2　京都大学大学院工学研究科 助教授

最適化アルゴリズムを用いて形状を変更し，第1段階での目的関数値の改善を行なう。また，形状に関する感度解析では計算コストの高い2次微分項を無視した近似感度解析を行ないプログラムの簡略化を図る。例題では，HP形状を持つ骨組膜構造物に対し本手法を適用し，本手法により固有値制約を十分な精度で満足する釣合い状態を実現する裁断図設計が行なわれることを示す。また，感度解析を差分法により行なった場合と解を比較することにより，本論で提案する近似感度解析の精度を示す。

2. 釣合条件式と可展条件式の導出

本節では，初期形状で満たされるべき釣合条件と，初期応力を除去して平面裁断膜が形成されるための可展条件を導く。釣合条件には通常の三角形有限要素法の定式化を用い，可展条件は，材料非線形性と偏差角を考慮した定式化に従うものとする。以上は，文献 [2,3] で示されているものと同じであるが，論文の完結性と後で用いる記号の定義のため，以下に記述を行なう。

2.1 釣合条件式

三角形有限要素の節点 i の局所座標 (x^e, y^e) 方向の変位を u_i, v_i とし，節点 j, k についても同様に下添字 j, k を用いて表わす。このとき，要素の変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \{u_i\ v_i\ u_j\ v_j\ u_k\ v_k\}^T$ のように定義する。要素内一様ひずみ有限要素の局所座標でのひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^e = \{\epsilon^e_x\ \epsilon^e_y\ \gamma^e_{xy}\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の関係は，節点 i, j, k の全体座標から求められる定行列 $\boldsymbol{C}$ より以下のように表される。

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

ここで，全体座標系を (x, y, z) とし，節点 i, j, k での値を下添字 i, j, k で表わすと，$\boldsymbol{C}$ は要素面積 S を用いて次式で与えられる。

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2S}\begin{pmatrix} y_i - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix} \tag{2}$$

要素の局所座標に関する応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}^e = \{\sigma^e_x\ \sigma^e_y\ \tau^e_{xy}\}^T$ とし，等価節点力ベクトルを $\boldsymbol{f} = \{f_{xi}\ f_{yi}\ f_{xj}\ f_{yj}\ f_{xk}\ f_{yk}\}^T$ とすると，$\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{f}$ の関係は，膜材料の厚さを t として以下のように表される。

$$\boldsymbol{f} = tS\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\sigma}^e \tag{3}$$

(3) を全体座標に変換し，膜面全体にわたって重ね合わせることにより，全体の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ に関する釣合式は，以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{b}$ は外力ベクトルであり，自己釣り合い状態では $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である。

2.2 可展条件式

釣合い曲面が平面裁断膜から形成されるためには，釣合い状態から初期張力を除去した後に，1つの節点に隣接する要素の対応する節点での内角の和が 2π とならなければならない。さらに，隣接要素間で共有される辺の長さは，応力除去後にも等しくなければならない。上記2つの条件をここでは可展条件という。ここで，裁断線上で隣接する要素間では，角度と辺長の適合は要求されず，裁断線全体の長さが等しければ十分であるものとする。

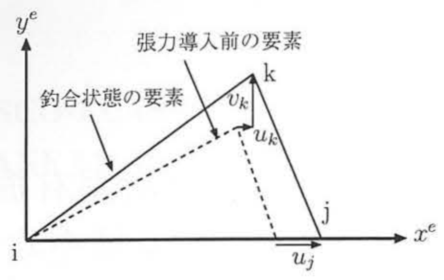

図 1: 局所座標とそれに対応する節点変位

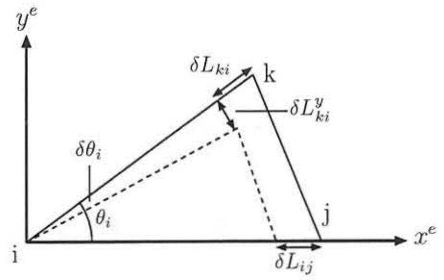

図 2: 辺長および角度変化量の定義

節点 i を要素節点とする要素の集合を A, 要素 a の節点 i での釣合い状態の角度を θ^a_i とすると，節点 i での角度の適合条件式は，張力の除去による変化量を $\delta(\ )$ として以下のようになる。

$$\sum_{a \in A} \theta^a_i + \sum_{a \in A} \delta\theta^a_i = 2\pi \tag{5}$$

また，裁断線上以外の辺 ij の両側の要素を a, b とし，それぞれの要素の辺 ij の釣合い状態での長さを L^a_{ij}, L^b_{ij} で表わすと，辺 ij の辺長適合条件式は以下のようになる。

$$\delta L^a_{ij} + \delta L^b_{ij} = 0 \tag{6}$$

さらに，1つの裁断線の両側の要素の集合を A, B とすると，裁断線の適合条件式は以下のように表される。

$$\sum_{a \in A} \delta L^a_{ij} - \sum_{b \in B} \delta L^b_{ij} = 0 \tag{7}$$

これらの適合条件を，以下のようにして応力の線形式で表わす。

図1に示すように，節点 i を局所座標の原点とし，辺 ij 方向に x^e 軸を定めると，要素の変形を表現するために必要な独立な節点変位は節点 j の x^e 方向変位 u_j および節点 k の x^e, y^e 方向の変位 u_k, v_k の3個となる。以上に基づき，3自由度の変位ベクトルを $\boldsymbol{u}_s = \{u_j\ u_k\ v_k\}^T$ のように定義し，これにともない $\boldsymbol{\epsilon}^e$ と $\boldsymbol{u}_s$ を関係づける行列 $\boldsymbol{C}_s$ も (2) の $\boldsymbol{C}$ から対応する列を取り出して定義する。

要素の節点 i, j, k での角度を $\theta_i, \theta_j, \theta_k$, 辺 ij, jk, ki の辺長を L_{ij}, L_{jk}, L_{ki} とする。要素の剛体変位は大きいが，要素内の変形は微小であるものとすると，$\delta L_{ij} \ll L_{ij}$ 等が成り立ち，辺長変化量 $\delta\boldsymbol{L}^e = \{\delta L_{ij}\ \delta L_{jk}\ \delta L_{ki}\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}_s$ の関係は以下のようになる。

$$\delta\boldsymbol{L}^e = \boldsymbol{G}^e\boldsymbol{u}_s \tag{8}$$

$$\boldsymbol{G}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta_j & -\cos\theta_j & \sin\theta_j \\ 0 & \cos\theta_i & \sin\theta_i \end{pmatrix} \tag{9}$$

また，微小変形の仮定より $\sin\delta\theta_i = \delta\theta_i$ となるので，節点 k の辺 ki に対する垂直方向変位を δL^y_{ki} とすると，$\delta\theta_i = \delta L^y_{ki}/L_{ki}$ が成り立つ。他の節点に対しても同様にして，角度変化量 $\delta\Theta^e = \{\delta\theta_i\ \delta\theta_j\ \delta\theta_k\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}_s$ の関係は以下のようになる。

$$\delta\Theta^e = \boldsymbol{H}^e \boldsymbol{u}_s \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H}^e = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\sin\theta_i}{L_{ki}} & \dfrac{\cos\theta_i}{L_{ki}} \\ -\dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\cos\theta_j}{L_{jk}} \\ \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\sin\theta_i}{L_{ki}} - \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & -\dfrac{\cos\theta_i}{L_{ki}} - \dfrac{\cos\theta_j}{L_{jk}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

文献3に従い，材料非線形性を考慮した定式化を行ない，材料の主方向(繊維方向)座標での応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^p = \{\sigma^p_x\ \sigma^p_y\ \tau^p_{xy}\}^T$ と主方向座標でのひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^p = \{\epsilon^p_x\ \epsilon^p_y\ \gamma^p_{xy}\}^T$ の関係式を以下のように記述する。

$$\boldsymbol{\sigma}^p = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{c} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{1-\gamma\nu^2_{xy}} \begin{pmatrix} E_x & E_x\nu_{xy} & 0 \\ E_x\nu_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G(1-\gamma\nu^2_{xy}) \end{pmatrix} \tag{13}$$

ここで，G，ν_{xy} はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比であり，応力レベルに関係なく一定の値とする。E_x，E_y および定ベクトル $\boldsymbol{c} = \{c_x\ c_y\ 0\}^T$ は，膜材料の応力- ひずみ関係を現在の応力の平均値で接線近似した際の接線剛性および応力の切片であり，ここでは E_x，E_y，c_x および c_y は全要素に同一の値を用いることとする。また，$\gamma = E_x/E_y$ である。

また，有限要素ごとの局所座標と主方向座標の偏差各 ϕ^e を，文献3と同様に釣合い形状より近似的に求める。局所系座標のひずみから主方向系座標のひずみへの変換行列 $\boldsymbol{R}$ は，偏差角 ϕ^e を用いて以下のように求められる。

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos^2\phi^e & \sin^2\phi^e & \cos\phi^e\sin\phi^e \\ \sin^2\phi^e & \cos^2\phi^e & -\cos\phi^e\sin\phi^e \\ -2\cos\phi^e\sin\phi^e & 2\cos\phi^e\sin\phi^e & \cos^2\phi^e - \sin^2\phi^e \end{pmatrix} \tag{14}$$

従って，$\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{\sigma}^p$ の関係式および，$\boldsymbol{\epsilon}^e$ と $\boldsymbol{\epsilon}^p$ の関係式は座標変換行列 $\boldsymbol{R}$ を用いて以下のように得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}^p = [\boldsymbol{R}^{-1}]^T\boldsymbol{\sigma}^e \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\epsilon}^e \tag{16}$$

(1) および (12)，(15)，(16) より，$\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{u}_s$ の関係は

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{C}_s^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}([\boldsymbol{R}^{-1}]^T\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{17}$$

のようになり，(17) を (8)，(10) に代入て，張力導入にともなう変化量を，次のように応力の線形式で表現できる。

$$\delta\boldsymbol{L}^e = \boldsymbol{G}^e\boldsymbol{C}_s^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}([\boldsymbol{R}^{-1}]^T\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{18}$$

$$\delta\Theta^e = \boldsymbol{H}^e\boldsymbol{C}_s^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}([\boldsymbol{R}^{-1}]^T\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{19}$$

以上より，(18), (19) を (5)–(7) に用いて重ね合わせると，辺長・裁断線適合条件式および角度適合条件式は以下のように全体系の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ の線形式で表現できる。

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{h} \tag{21}$$

3. 有限要素法に基づく固有値解析

本節では，動的剛性の指標とする膜面の1次固有値を，定ひずみ三角形有限要素を用いた有限要素法に基づき定式化する。膜材料のような薄く軽量な物体の振動を考える場合には，周辺空気による付加質量効果の考慮が提案されているが [6]，ここではこの付加質量効果は考慮しない。また，膜面の剛性行列は幾何学的非線形効果を考慮に入れて決定される。

通常の定ひずみ三角形有限要素を用い，有限要素の面外変形も考慮した9自由度の節点変位ベクトルに関する質量行列 $\boldsymbol{M}^e$ は膜材料の密度を ρ として次式で定義される。

$$\boldsymbol{M}^e = \frac{\rho St}{12}\begin{bmatrix} 2&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&2&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&2&0&0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&2&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&2&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&2&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&2&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&2&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

剛性行列についても，質量行列と同様に要素の面外変形を考慮した9自由度の節点変位ベクトルに関する定式化を行なう。

9自由度の節点変位ベクトルに対して拡張した，微小変形理論によるひずみ-変位関係行列 $\boldsymbol{C}_l$ および応力-ひずみ関係行列 (13)，座標変換行列 (14) を用いると有限要素の線形剛性行列 $\boldsymbol{K}^e_L$ は以下のように得られる。

$$\boldsymbol{K}^e_L = tS\boldsymbol{C}_l^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}_l \tag{23}$$

また，変形前の形状を基準とするラグランジュ型の定義を用いると，面内応力分布にともなう幾何剛性行列 $\boldsymbol{K}^e_G$ は次式で定義される。

$$\boldsymbol{K}^e_G = tS\boldsymbol{C}_d^T\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{C}_d \tag{24}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \frac{1}{S}[\,\boldsymbol{C}_{di}\ \boldsymbol{C}_{dj}\ \boldsymbol{C}_{dk}\,] \tag{25}$$

$$\boldsymbol{C}_{di} = \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & 0 \\ x_k - x_j & 0 & 0 \\ 0 & y_j - y_k & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 \\ 0 & 0 & y_j - y_k \\ 0 & 0 & x_k - x_j \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{C}_{dj} = \begin{bmatrix} y_k - y_i & 0 & 0 \\ x_i - x_k & 0 & 0 \\ 0 & y_k - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_k & 0 \\ 0 & 0 & y_k - y_i \\ 0 & 0 & x_i - x_k \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{C}_{dk} = \begin{bmatrix} y_i - y_j & 0 & 0 \\ x_j - x_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & 0 & y_i - y_j \\ 0 & 0 & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^e & \tau_{xy}^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xy}^e & \sigma_y^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^e & \tau_{xy}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy}^e & \sigma_y^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_x^e & \tau_{xy}^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xy}^e & \sigma_y^e \end{bmatrix} \tag{29}$$

ここで，$\boldsymbol{C}_d$ は節点変位と変位勾配を関係づける行列である。

線形剛性行列 $\boldsymbol{K}_L^e$，幾何剛性行列 $\boldsymbol{K}_G^e$ を重ね合わせ，剛性行列 $\boldsymbol{K}^e$ を以下のように得る。

$$\boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{K}_L^e + \boldsymbol{K}_G^e \tag{30}$$

要素ごとの質量行列 $\boldsymbol{M}^e$，剛性行列 $\boldsymbol{K}^e$ を系全体に重ね合わせた行列をそれぞれ $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{K}$ とする。自由振動の運動方程式より，次式を得る。

$$[\boldsymbol{K} + \Omega_m \boldsymbol{M}]\Phi_m = 0 \tag{31}$$

ここで，Ω_m，Φ_m はそれぞれ m 次の固有値および固有モードである。以下では簡単のため，1次の固有値および固有モードをそれぞれ Ω，Φ と表記する。

4. 1次固有値指定下での応力・形状最適化問題

本節では，指定された1次固有値を有し，初期応力の分散が最小であるような釣合い形状およびこれを実現するための裁断図形状を求める階層型最適化問題を定式化し，感度解析に基づく最適化手法の概要を述べる。膜面の1次固有モードは最も弱い変形形状であると考えられ，これに対応する固有値を指定することで最も弱い変形形状に対する剛性が保証される。1次固有値の指定により剛性の下界を保証することになると考えられる。

下位レベル最適化問題では，指定された形状の下で，釣合および可展条件を満たし，1次固有値が指定値に一致し，かつ分散が最小であるような応力分布を求める。次に，上位レベル最適化問題では，下位レベル最適化問題の最適応力を指定形状の関数と考え，内部節点座標に関する感度解析を実行することにより，最適化アルゴリズムにしたがって内部節点座標を変更し，それを指定値として下位レベル最適化問題の最適応力を逐次求めて応力の偏差量を最小化するような最適形状を求める。概要は以下の通りである。

D 1 膜面の境界形状，裁断パターンおよび1次固有値の指定値を与える。

D 2 膜面の釣合い形状の初期値を与える。

D 3 指定された形状に対し，釣合条件と可展条件を満たし，1次固有値が指定値と一致する，分散が最小であるような応力分布を求める。

D 4 **D 3** の最適応力分布の指定形状に関する感度解析を行ない，最適化アルゴリズムにしたがって，応力分布を改善する形状を探索する。

D 5 形状変更の必要があれば，得られた形状を指定形状として **D 3** にもどる。変更の必要がなければ，最適化を終了する。

D 6 得られた釣合い形状と応力分布より，可展条件を満たす初期応力を除去して裁断図形状を得る。

4.1 形状・固有値指定応力一様化問題

指定された釣合い形状および1次固有値の下で，釣合条件および可展条件を満足し，でき得る限り一様に近い応力分布を決定する問題を考える。

従って，x^e，y^e 方向応力に関しては x^e，y^e 方向応力の平均値 $\bar{\sigma}$ を，せん断応力に関しては0を目標値とする。また，$\bar{\sigma}$ および0を対応する成分に持つベクトル $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を定義する。

釣合い形状が指定された膜面に対し，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ からの偏差量の2乗ノルムが最小となる応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ を決定する。釣合条件 (4) および可展条件 (20)，(21) はともに応力ベクトルの線形方程式であるので，これらをまとめて $\boldsymbol{A\sigma} = \boldsymbol{a}$ と表す。指定1次固有値を $\bar{\Omega}$ とすると，形状・固有値指定応力一様化問題は以下のように定式化される。

$$\text{minimize} \quad \bar{P}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{32}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{A\sigma} = \boldsymbol{a} \tag{33}$$

$$\Omega = \bar{\Omega} \tag{34}$$

4.1.1 逐次線形化手法の導入

固有値に関する制約条件 (34) は，応力に関する非線形関係式であり，このままでは文献 [2, 3] のように線形連立方程式を解いて最適応力を決定することはできない。そこで，以下のような1次近似を用いる。ある釣合い形状での応力分布 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ および固有値 $\tilde{\Omega}$ が既知であるとき，応力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 近傍の応力 $\boldsymbol{\sigma}$ での固有値の近似値 $\hat{\Omega}$ は，全有限要素数を n，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ の第 j 成分を σ_j とすると以下の式により与えられる。

$$\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} + \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial \Omega(\tilde{\sigma})}{\partial \sigma_j}(\sigma_j - \tilde{\sigma}_j) \tag{35}$$

以上より，固有値に関する制約条件 (34) の代わりに1次近似を用いた固有値制約 $\hat{\Omega} = \bar{\Omega}$ を導入することにより，固有値に関する制約条件を応力に関する線形関係式で記述できる。従って，釣合および可展条件 (33) および固有値に関する制約 $\hat{\Omega}^i = \bar{\Omega}$ は全て応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に関する線形式であるので，これらをまとめて $\boldsymbol{Q\sigma} = \boldsymbol{q}$ と表す。また，$\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は応力の線形式であるので，定行列 $\boldsymbol{L}$ を用いて $\boldsymbol{L\sigma}$ と表される。ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて以下のようなラグランジュ関数 Π を定義する。

$$\Pi = \bar{P} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{Q\sigma} - \boldsymbol{q}) \tag{36}$$

ここで，停留条件 $\partial\Pi/\partial\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ および $\partial\Pi/\partial\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$ より以下のような連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} & \boldsymbol{Q}^T \\ \boldsymbol{Q} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix} \tag{37}$$

従って，最適応力は連立方程式 (37) を解くことにより決定される。

しかし，以上の定式化では固有値制約が近似式であるので，求まった応力での固有値と指定値には誤差が生じる。そこで，この誤差が十分小さい値に収束するまで繰り返し計算を行なう必要がある。この逐次計算のアルゴリズムを以下に示す。

L 1 膜面の境界形状，裁断パターンおよび1次固有値の指定値を与える。また，適当な応力の初期値 $\boldsymbol{\sigma}^0$ を与え，膜面の1次固有値 Ω^0 を求める。固有値および応力に関する収束判定パラメータをそれぞれ e_1，e_2 $(e_1, e_2 > 0)$ で与え，繰返し計算のカウンター i を1とする。

L 2 固有値の近似値 $\hat{\Omega}^i$ を以下の式により与える。

$$\hat{\Omega}^i = \Omega^{i-1} + \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial \Omega^{i-1}}{\partial \sigma_j}(\sigma_j^i - \sigma_j^{i-1}) \tag{38}$$

L 3 固有値に関する制約条件 $\hat{\Omega}^i = \bar{\Omega}$ の下で，釣合および可展条件 (33) を満足し，(32) を最小化する応力 $\boldsymbol{\sigma}^i$ を決定する。

L 4 応力分布 $\boldsymbol{\sigma}^i$ の x^e, y^e 方向応力の平均値から膜材料の応力-ひずみ関係を接線近似し，膜面の固有値 Ω^i を求める。

L 5 $|\Omega^i - \bar{\Omega}| < e_1$ かつ $|\boldsymbol{\sigma}^i - \boldsymbol{\sigma}^{i-1}| < e_2$ $(e_1, e_2 > 0)$ であれば最適解が得られたとして計算を終了する。そうでなければ，$i \leftarrow i+1$ として**L 2** に戻る。

4.1.2 加速パラメータの導入による接線剛性変化の考慮

(35) の $\partial\Omega/\partial\sigma_j$ は以下のようにして求められる。(31) の両辺を応力または有限要素節点座標を代表する変数 α で微分すると

$$[\boldsymbol{K} - \Omega \boldsymbol{M}]\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + [\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \alpha} - \Omega \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \alpha}]\Phi - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\boldsymbol{M}\Phi = \boldsymbol{0} \tag{39}$$

を得る。(39) の左側から Φ^T を乗じる。$\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$ の対称性および (31), (39) より，

$$\Phi^T \boldsymbol{M}\Phi \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \Phi^T[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \alpha} - \Omega\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \alpha}]\Phi \tag{40}$$

を得る。固有ベクトルが $\Phi^T \boldsymbol{M} \Phi = 1$ となるように正規化されているとすると，(40) より

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \Phi^T[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \alpha} - \Omega\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \alpha}]\Phi \tag{41}$$

を得る。α が σ_j である場合は，質量行列 $\boldsymbol{M}$ は応力を含まないので，$\partial \boldsymbol{M}/\partial\sigma_j = \boldsymbol{0}$ である。従って，(30), (41) より以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_j} = \Phi^T \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \sigma_j}\Phi = \Phi^T[\frac{\partial \boldsymbol{K}_L}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \boldsymbol{K}_G}{\partial \sigma_j}]\Phi \tag{42}$$

ここで，$\boldsymbol{K}_L$, $\boldsymbol{K}_G$ はそれぞれ，$\boldsymbol{K}_L^e$, $\boldsymbol{K}_G^e$ を全要素について重ね合わせた行列であるので，$\partial \boldsymbol{K}_G/\partial\sigma_j$ は (24) を σ_j で微分して得られる以下の式を系全体に重ね合わせることで得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_G^e}{\partial \sigma_j} = tS\boldsymbol{C}_d^T\frac{\partial \boldsymbol{S}_0}{\partial \sigma_j}\boldsymbol{C}_d \tag{43}$$

$\partial \boldsymbol{S}_0/\partial\sigma_j$ は，(29) より求まる。また，$\partial \boldsymbol{K}_L/\partial\sigma_j$ は (23) を σ_j で微分して得られる以下の式を系全体に重ね合わせることで得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_L^e}{\partial \sigma_J} = tS\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}^T\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \sigma_j}\boldsymbol{R}\boldsymbol{C} \tag{44}$$

膜材料の接線剛性は，応力の関数であり $\partial \boldsymbol{D}/\partial\sigma_j \neq \boldsymbol{0}$ であるが，ここでは $\partial \boldsymbol{D}/\partial\sigma_j = \boldsymbol{0}$ とする。しかし，一般に膜材料は応力が大きくなると接線剛性も大きくなるので，$\partial \boldsymbol{D}/\partial\sigma_j = \boldsymbol{0}$ とすると固有値の変化を過小に評価することになり，応力の変更量が過剰となる。これは，解の振動を起こし収束性を悪化させる原因の一つであると考えらる (図 3 参照)。そこで加速パラメータ $\mu (1 \leq \mu)$ を導入し，固有値の近似値 $\hat{\Omega}$ を以下のように修正する。

$$\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} + \mu \frac{\partial \Omega(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{45}$$

ある形状の下で加速パラメータを変化させ，各加速パラメータ値において解の収束までに要した計算回数をプロットしたものを図 4 に示す。

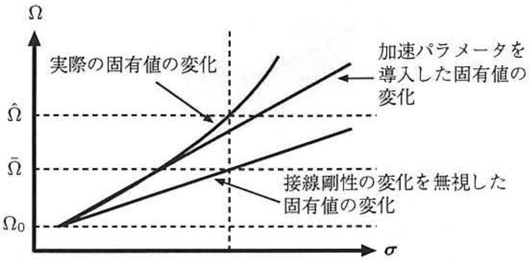

図 3: 接線剛性の変化の考慮の有無による固有値の近似値の変化

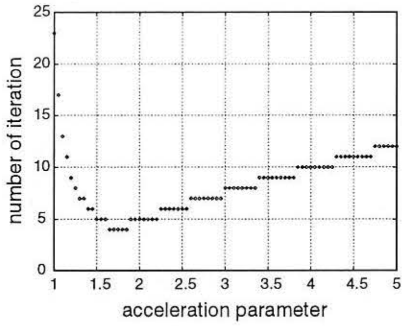

図 4: 加速パラメータ μ と計算回数の関係

図 4 より，適切な緩和パラメータ値の選択によって計算回数を低減できることが分かる。

4.2 形状最適化問題

形状・固有値指定応力一様化問題の最適応力分布は，指定された内部節点座標の関数と考えられるため，最適解と最適目的関数値の節点座標に関する感度解析を行ない，最適化アルゴリズムに基づき応力分布を改善する節点座標を探索する。

境界骨組の形状を固定とし，内部節点座標のみを変更する。節点は一般に 3 自由度をもつが，ここでは曲面の形状を記述できれば良いので節点座標は 1 方向のみに変更するものとする。

ある節点座標に関する感度を ( )′ で表すと，(32) の感度係数 $\bar{P}'$ は以下のようになる。

$$\bar{P}' = (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T(\boldsymbol{\sigma}' - \bar{\boldsymbol{\sigma}}') \tag{46}$$

(46) の $\bar{\boldsymbol{\sigma}}'$ は応力の感度係数 $\boldsymbol{\sigma}'$ から決定され，$\boldsymbol{\sigma}'$ は (37) を設計変数で微分して得られる次のような連立 1 次方程式を解いて求められる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} & \boldsymbol{Q}^T \\ \boldsymbol{Q} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \lambda' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{Q}'^T \\ \boldsymbol{Q}' & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{q}' \end{Bmatrix} \tag{47}$$

ここで，$\boldsymbol{Q}'$ および $\boldsymbol{q}'$ の固有値制約に関する成分は，$\hat{\Omega}' = 0$ および (35) より，以下の式のように得られる。

$$\tilde{\Omega}' + \sum_{j=1}^{3n}\left\{\frac{\partial \Omega(\tilde{\sigma})}{\partial \sigma_j}\right\}'(\sigma_j - \tilde{\sigma}_j) + \sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial \Omega(\tilde{\sigma})}{\partial \sigma_j}(\sigma_j' - \tilde{\sigma}_j') = 0 \tag{48}$$

(48) において，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{0}$ であるので，$\tilde{\sigma}_j' = 0$ となる。また，$\tilde{\Omega}'$ は (41) より，以下のように得られる。

$$\tilde{\Omega}' = \Phi^T[\boldsymbol{K}' - \tilde{\Omega}\boldsymbol{M}']\Phi \tag{49}$$

次に，$\{\partial\Omega(\tilde{\sigma})/\partial\sigma_j\}'$ は，(42) より以下の式により得られる。

$$\left\{\frac{\partial \Omega(\tilde{\sigma})}{\partial \sigma_j}\right\}' = 2\Phi^T\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \sigma_j}\Phi' + \Phi^T\left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \sigma_j}\right\}'\Phi \tag{50}$$

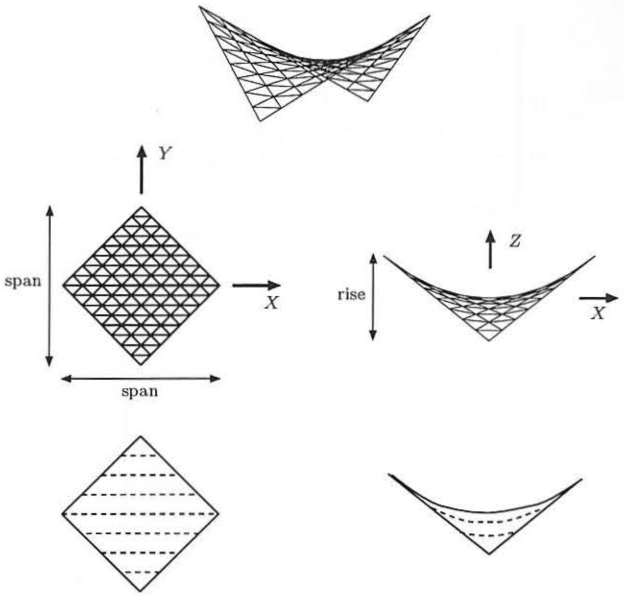

図 5: 骨組膜構造物モデル

(50) より，$\{\partial\Omega(\tilde{\sigma})/\partial\sigma_j\}'$ を求めるには，Φ' を求める必要があるが，これを求めるには非常に複雑な計算が必要である。従って，本手法では $\{\partial\Omega(\tilde{\sigma})/\partial\sigma_j\}' \approx 0$ と仮定し，プログラムの簡略化を図る。また，この仮定が解の探索および最適化結果に及ぼす影響を，後の形状設計例において形状に関する感度係数を差分によって与えたものと比較することにより検証する。

5. 形状設計例

5.1 応力-ひずみ曲線の定式化

以下の例題において裁断図設計を行なう際の，膜材料の応力-ひずみ関係の接線による近似式を導くために，まず応力-ひずみ関係を定式化する。この例題では，x^p 軸，y^p 軸それぞれの 1 軸引張時の応力-ひずみ $(\sigma_x\text{-}\epsilon_x)$,$(\sigma_y\text{-}\epsilon_y)$ 関係を，以下のような 3 次曲線で定式化する [3]。

$$\sigma_x = 1.00352 \times 10^7 \times (\epsilon_x - 3.125 \times 10^{-3})^3 \tag{51}$$

$$\sigma_y = 3.0625 \times 10^5 \times (\epsilon_y - 1.0 \times 10^{-2})^3 \tag{52}$$

5.2 例題

図 5 のようなスパン 16.00 m，ライズ 6.40 m の HP 形状の骨組膜構造物に対し，本手法を適用する。要素分割，裁断パターンも図 5 に従うものとする。対称性を考慮して，$Y \geq 0$ の範囲のみを対象とする。1 次固有値の指定値は，4.250 $\mathrm{rad^2/sec^2}$ とする。また，加速パラメータの値は 1.75 とする。

裁断図設計の結果得られた，応力 $\sigma^e_x, \sigma^e_y, \tau^e_{xy}$ の平均値，最大値，最小値，標準偏差，釣合い曲面の 1 次固有値および最適化問題の目的関数である応力偏差量を表 1 に示す。また，図 6 には得られた最適釣合い形状および裁断図形状を，図 7 には各有限要素の応力の値を線の太さで示す。

5.3 膜材料構成則の近似に関する検証

裁断図設計の結果を見る限りでは，膜面全体に一様な応力分布が得られており，1 次固有値も指定値に一致している。しかし，裁断図設計の際には，有限要素の主方向と局所座標方向の偏差角を釣合い形状から評価し，また膜材料の応力-ひずみ関係を応力の平均値で評価した接線を用いて表している。従って，得られた裁断図を境界に張り合わせて得られる釣合い曲面と，裁断図設計の結果得られた釣合い曲面には誤差が生じることが考えられる。そこで，裁断図設計の結果得られた裁断図に対し釣合い形状解析を行ない，そこで得られた釣合い曲面に対し固有値解析を行なう。解析の際には，有限要素の主方向と局所

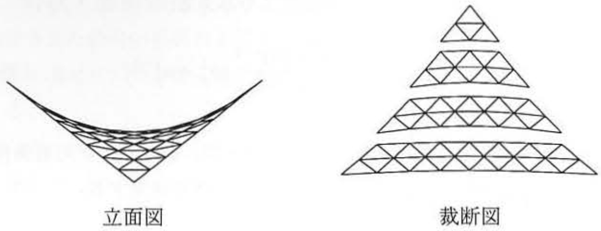

図 6: 最適釣合い形状および裁断図形状

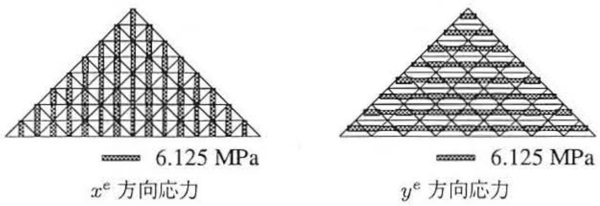

図 7: 裁断図設計の結果 1(応力分布)

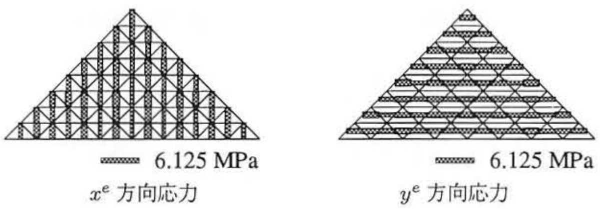

図 8: 釣合い形状解析の結果 1(応力分布)

表 1: 裁断図設計の結果 1

応力偏差量 ($\mathrm{MPa^2}$)	137.651		
1 次固有値 ($\mathrm{rad^2/sec^2}$)	4.250		
応力 (MPa)	σ^e_x	σ^e_y	τ^e_{xy}
平均	6.530	6.581	0.000
最大	8.999	8.165	0.769
最小	4.428	5.237	-0.768
標準偏差	1.239	0.725	0.297

表 2: 釣合い形状解析の結果 1

応力偏差量 ($\mathrm{MPa^2}$)	143.440		
1 次固有値 ($\mathrm{rad^2/sec^2}$)	4.274		
応力 (MPa)	σ^e_x	σ^e_y	τ^e_{xy}
平均	6.485	6.531	0.014
最大	9.095	8.266	0.798
最小	4.324	5.165	-0.765
標準偏差	1.269	0.728	0.315

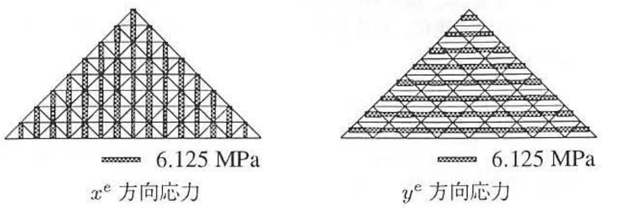

図 9: 釣合い形状解析の結果 2(応力分布)

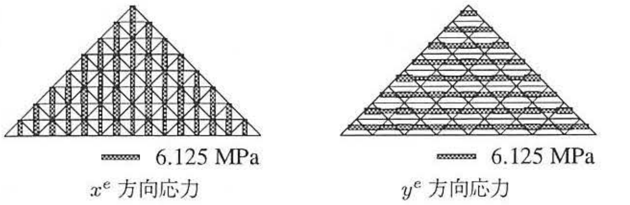

図 10: 差分法による裁断図設計の結果 (応力分布)

表 3: 釣合い形状解析の結果 2

応力偏差量 (MPa^2)	127.559		
1 次固有値 (rad^2/sec^2)	3.928		
応力 (MPa)	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	5.942	6.120	0.013
最大	8.295	7.819	0.805
最小	3.855	4.837	-0.775
標準偏差	1.189	0.687	0.303

座標方向の偏差角を裁断図形状から正確に評価し，また膜材料の応力-ひずみ関係および接線剛性を (51), (52) より評価する。

釣合い形状解析の結果得られた，応力 $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau_{xy}^e$ の平均値，最大値，最小値，標準偏差，釣合い曲面の 1 次固有値および最適化問題の目的関数である応力偏差量を表 2 に示す。また，図 8 には各有限要素の応力の値を線の太さで示す。

表 2 より，解析の結果得られた応力分布は裁断図設計の結果に比べ誤差を生じているため，応力偏差量に若干の悪化がみられる。また，1 次固有値も指定値である 4.250 rad^2/sec^2 から若干の偏差を生じている。1 次固有値の誤差は，応力分布が裁断図設計時に比べ若干異なること，および裁断図設計時は膜材料の接線剛性を全応力の平均値より評価していることに起因するものと思われる。しかし，これらの誤差は微小なものであると考えられる。以上から，本手法により応力分布の一様性および 1 次固有値制約を十分な精度で満足する初期応力分布，釣合い曲面およびこれらを実現するための裁断図形状が得られることが示された。

5.4 目標応力分布を与える設計法との比較

現在一般に用いられている膜構造物の設計では，原型曲面に対する応答解析の結果から裁断図設計時の目標応力分布が決定される。しかし，原型曲面は厳密に実現することが不可能な場合が多く，実際得られる釣合い曲面の応答特性は予め考慮されていたものと異なるものとなる。ここでは，原型曲面に対する応答解析より決定された応力分布を目標とする設計法と本手法との比較により，本手法の適用により高い精度で固有値に関する制約が満足されることを示す。

表 4: 差分法による裁断図設計の結果

応力偏差量 (MPa^2)	132.781		
1 次固有値 (rad^2/sec^2)	4.250		
応力 (MPa)	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	6.149	5.824	0.000
最大	8.578	7.275	0.704
最小	4.197	4.541	-0.703
標準偏差	1.214	0.681	0.289

本手法を適用した例題と同様に図 5 の骨組膜構造物を対象とし，要素分割パターンおよび裁断パターンも同様とする。例題での指定 1 次固有値である 4.250 rad^2/sec^2 を有する等張力曲面の応力は，6.125 MPa であるので，これを目標応力分布として逆問題型設計法 [2, 3] を適用し，裁断図設計を行なう。また，得られた裁断図に対し，同様の条件による釣合い形状解析および固有値解析を行なう。

釣合い形状解析の結果得られた，応力 $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau_{xy}^e$ の平均値，最大値，最小値，標準偏差，また釣合い曲面の 1 次固有値および最適化問題の目的関数である目標応力分布からの応力の偏差量の 2 乗和を表 3 に示す。また，図 9 には各有限要素の応力の値を線の太さで示す。

表 3 での 1 次固有値は目標値である 4.250 rad^2/sec^2 より 7.576 % 小さくなっている。この誤差は，本手法での誤差 (表 2 参照) に比べ大きい。以上より，原型曲面を用いた応答解析に基づき得られた応力分布を目標とした裁断図設計決では，得られる応力分布と目標応力分布との偏差によって得られる曲面の応答特性に誤差が生じるが，本手法では 1 次固有値に関する制約と可展条件の導入によりこの誤差を抑え，固有値に関する要求が十分な精度で満足されることが例証された。

5.5 差分法による検証

ここでは，形状に関する目的関数の感度係数を差分により与えた場合の結果と，本手法で提案する感度解析を用いた場合の結果の比較を行なう。

例題と同様，図 5 のような骨組膜構造物を対象とし，要素分割パターンおよび裁断パターンも同様とする。形状に関する感度を差分で与え，指定 1 次固有値などのその他の条件は全く同一とする。

裁断図設計の結果得られた，応力 $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau_{xy}^e$ の平均値，最大値，最小値，標準偏差，また釣合い曲面の 1 次固有値および最適化問題の目的関数である応力偏差量を表 4 に示す。また，図 10 には各有限要素の応力の値を線の太さで示す。

表 1 に比べ，表 4 に示す結果では若干良好な解が得られているが，これらの差は微小である。以上より，本論で提案する感度解析法の精度が例証された。

6. 結論

1. 逆問題型設計法を拡張し，釣合い形状の指定された膜構造物に対し，剛性の指標として 1 次固有値に関する制約条件を導入した。応力の非線形関数である固有値指定条件を 1 次近似を用いて線形化し，繰返し解くことで固有値指定条件，釣合および可展条件を満足し，平均値からの分散が最小である応力分布を実現する裁断図を設計する手法を提案した。
2. 1 で得られた最適応力の形状に関する感度解析を行ない，形状変更を行なう際に，プログラムの簡略化を図るため，固有値の応力に関する感度係数を定数として扱う，近似感度解析手法を提案した。

3. 以上に提案した手法を，HP 形状を持つ骨組膜構造物に適用した。得られた裁断図に対し釣合い形状解析および固有値解析を行ない，本手法の適用により，固有値指定条件および応力の一様性を十分な精度で満足する釣合い形状，応力分布およびそれらを実現するための裁断図形状が得られることを示した。
4. 原型曲面に対する固有値解析に基づき決定された目標応力を用いる手法によって得られた設計解と，本手法により得られた設計解を比較した。目標応力を用いる手法に比べ，本手法では固有値に関する制約が高い精度で満足された。
5. 形状に関する感度を 2 の近似感度解析で与えた結果と，差分で与えた結果の比較を行ない，感度解析の際の近似が最適形状の探索に与える影響が小さいことを示した。

参考文献

[1] 坪田 張二，吉田 新，最適化手法を用いた膜構造物の裁断図解析，日本建築学会構造系論文集，第 373 号，pp.101-110，1987.

[2] 大崎 純，上谷 宏二，高谷 真次，逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法，日本建築学会構造系論文集，第 488 号，pp.107-115，1996.

[3] 大崎 純，藤原 淳，膜材料の非線形性と異方性を考慮した膜構造物の応力・形状最適化，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造 I，pp.1003-1004，1998.

[4] K. Uetani, E. Fujii and M. Ohsaki, Initial stress field determination of membranes using optimization technique, Y-B. Yang (Ed.), Proc. Int. Colloquim on Computation of Shell & Spatial Struct., Taipei, pp.301-306, 1997.

[5] 大崎 純，山川 誠，膜構造物の静的載荷時の剛性を考慮した初期応力・裁断膜形状最適化，膜構造研究論文集，No.12，pp.31-38，1998.

[6] 正岡 典夫，村中 良，石井 一夫，サスペンション膜構造の振動性状に関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 471 号，pp.91-100，1995.

[7] 鷲津 久一郎 他偏，有限要素法ハンドブック *1* 基礎編，培風館，1981.

[8] 鷲津 久一郎 他偏，有限要素法ハンドブック *2* 応用編，培風館，1983.

[9] 山川 宏，最適化デザイン，倍風館

[10] J. S. Arora, C. H. Tseng, IDESIGN user's manual ver. 3.5. Optimal Design Laboratory, University of Iowa, Iowa City, Iowa., 1987.

Optimization of initial stress and equilibrium shape of membrane structures considering fundamental frequency as a mesure of stiffness

Jun Fujiwara*1
Makoto Ohsaki*2
Tomonori Kitaori*1

SYNOPSIS

An inverse method for specified lowest eigenvalue (square of the lowest natural frequency) is proposed for finding the optimal cutting patterns and the optimal stresses of a frame-supported membrane structure. The lower bound of stiffness is guranteed by specifying the lowest eigenvalue, because the fundermental eigenmode is considered the weakest mode of deformation. The membrane is discretized by using the finite element method, where the triangular elements with constant strains is used.

In the first stage of proposed method, the optimal stresses to minimize the standard deviation are found for specified eigenvalue and nodal coordinates. The lowest eigenvalue which is a nonlinear function of stresses is linearized, and the optimal stresses are found by sequentially solving simultaneous linear equations. In the second stage, the optimal locations of nodes are found by using the optimizing method based on the sesibliity analysis with respect to the nodal coordinates.

In the examples, the proposed method is applied to an HP-type membrane structure supported by a frame. It is confirmed by carrying out nonlinear shape analysis that the eigenvalue constraint is satisfied within good accuracy.

*1 Graduate Student, Kyoto University

*2 Associate Professor, Kyoto University