

矩形張力膜のしわ解析

呂 品琦*1)

半谷裕彦*2)

川口健一*3)

梗 概

膜材料は曲げ剛性が小さいので、圧縮力を受ける場合には、しわが発生する。張力膜のしわ解析は、通常、面内問題としての張力場解析と面内、面外問題としての分岐座屈解析の2つ方法に分類される。本論文では、張力場理論と分岐座屈解析の両理論を結合し、新しい方法を検討する。

1. はじめに

膜構造は透明性、軽さを持ち、そのため、近年世界中で、大空間構造の一つ構造形式として、多く建設されている。しかし、薄い膜材料は、曲げ剛性及び圧縮剛性が少ないため、圧縮力が作用する場合には、しわが発生する。しわは張力の消失を意味し、膜構造の力学性状及び美観に影響を与える。しわ発生時の応力状態及び変形の解析、しわ発生の予防および制御問題は重要な課題である。“しわ”の問題は以下の2つに大別できる。

(1) 力学的しわ

(2) 幾何学的しわ

力学的しわとは、膜が圧縮場におかれ張力を消失する場合に生じるしわである。幾何学的しわは、膜面が幾何学的に適合しない、境界条件におかれた時に生じる、膜面の緩みやだぶつきのことである。

本論文では、主に(1)のしわの問題から考察する。

2. しわの解析理論

2.1 研究背景

膜構造に発生するしわの問題については現在まで多くの研究が行われてきている。その中で、解析的研究は

a. 張力場理論(例えば文献[1]と[2])

b. 分岐座屈理論(例えば文献[3]と[4])

の2つの理論に基づいているものが大部分である。

張力場理論によるしわの研究の歴史の中で、文献[1]は古典的名論文として評価の高いものである。この文献では、膜の定義として次の2項目を採用している。

(1) 曲げ剛性を無視する(曲げ剛性 $D=0$)

(2) 圧縮力を伝達しない

図1に示す面内力 N_x , N_y , N_{xy} を用いて、項目(2)を定式化しておく。主面内力を N_1 , N_2 とすると、

$$N_1 = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2}, \quad N_1 \geq N_2 \quad (1)$$

$$N_2 = \frac{N_x + N_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2}$$

N_1 , N_2 により(図2)

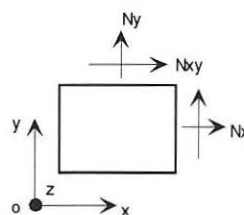


図1. 面内力

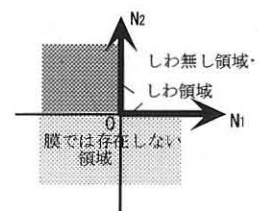


図2. しわの領域

1) 東京大学大学院工学系研究科 博士課程

2) 東京大学生産技術研究所 教授 工学博士(平成10年8月9日逝去)

3) 東京大学生産技術研究所 助教授 工学博士

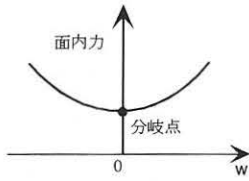


図3. 釣合経路と分岐点

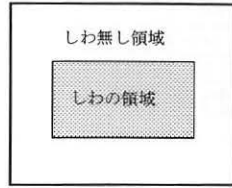


図4. しわ領域

しわ無し領域 : $N_x, N_y > 0$ (2)

しわの生じている領域 : $N_x N_y = 0$ (3)

図2において、陰影を施した領域は膜では存在しない領域となる。式(1)を式(3)に代入すると

$$N_x N_y = N_{xy}^2 \quad (4)$$

文献[1]では、ポアソン比を変数とすることで、式(4)を満たす応力状態の性質を解析している。

張力場理論では上式を用いてしわの発生領域と方向のみが解析される。つまり、個々のしわに対する詳細な変形特性(例えば、面外方向変位を持つしわモード)を調査するのではなく、しわを持つ膜の巨視的な構造挙動を調べるのに適した理論である。

しわモードなどしわの詳細な形状を解析する目的で採用される理論が上述した分岐座屈理論である。つまり、しわ形状を平板の座屈形状と仮定する理論である。しわ発生前の面内力を N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} とすると次式の釣合い式が成立している。(面内問題)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy0}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y0}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

さらに、分岐点では面内問題と次式で与えられる面外問題に対する釣合い式が共存することになる。

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{x0} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{y0} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、D:曲げ剛性、w:面外方向変位、である。

釣合い経路上の分岐点の探査および分岐経路の追跡によって[5]、しわの解析を行うことができる。しかし、分岐座屈理論をしわの解析に適用する場合の欠点は、式(5)の成立を前提としているところにある。つまり、張力場理論で仮定している式(4)の成立を無視しているところにある。

2.2 研究目的

本研究では、しわ無し領域 ($N_x N_y > N_{xy}^2$) としわの領域 ($N_x N_y = N_{xy}^2$) を区分することにより、式(5)を満足させながらしわの形状を解析する方法(ここでは、c. しわ解析理論と呼び)を考えてみる。言い換えると、張力場理論と分岐座屈理論において、膜の特性を満足させる仮定のみを採用し、両理論を結合し、再構築する[7][8]。

2.3 基本仮定

しわ解析理論では膜の定義として次の3項目を採用する。

A1: 主面内力において圧縮力を伝達しない。

A2: しわの生じている領域では不伸張変形によりしわ形状が決定される。

A3: 微小な曲げ剛性が存在する ($D \neq 0$)

これらの基本仮定を具体的に説明する。

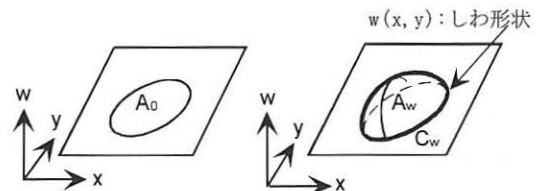
A1: 図4に示すように、張力の作用下において、式(2)、(3)により、しわ無し領域としわの生じている領域を分離する。しわの生じている領域では式(4)が成立している。

A1における領域の解析には張力場理論によるしわ領域の解析法が利用できる。さらに、引張り状態では $N_x > 0$ 、圧縮状態では $N_y = 0$ であるから、片側応力問題としての取り扱つかいも利用できる[6]。

A2: 図5に示すように変形前、後のしわ領域の xy 平面上での面積を A_0, A_w とする。しわの生じている領域では、しわ形状により面外変位 $w(x, y)$ が存在しているから、 $A_0 > A_w$ となっている。更に、A2の不伸張変形の仮定より次式が成立する。

$$A_w = \iint_{A_w} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (7)$$

しわ形状の解析はしわの生じている領域の境界形状が指定された条件下で、式(7)を満足する $w(x, y)$ を求めることに帰着できる。



(a) 変形前

(b) 変形後

図5 しわ領域の面積としわ形状

A3: しわ形状の解析には、直交基底関数を用いる連続型解法とリンクモデルや有限要素法を用いる離散型解法等が考えられる。理解を容易にするために正弦関数を採用する 1 次元の場合を図 6 に示す。境界の 2 点が指定された場合、この 2 点を結ぶ曲線は無数に存在する。この無数に存在する候補曲線の中から、1 個の曲線を特定するために、微小な曲げ剛性の存在を仮定し、曲げによるエネルギーに基づくエネルギー基準を設定する。

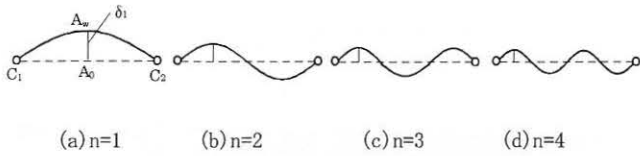


図 6: しわ形状の候補曲線

3. ケーブル構造による具体例

ケーブルに圧縮力が作用するとたるみが生じ、力の伝達は不可能になる。ここでは、たるみは一次元材におけるしわを考え、前節までに述べた内容を図 7 に示すケーブル構造を用いて具体的に示す。

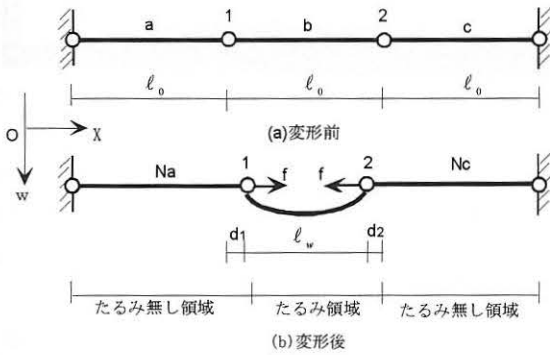


図 7: ケーブルのたるみ領域

A1: ケーブルの長さをそれぞれ l_0 とし、断面積を A 、断面 2 次モーメントを I 、ヤング率を E とする。節点 1、2 に反対向きに荷重 f を作用する。節点 1、2 の変位を求めると、

$$d_1 = d_2 = l_0 \frac{f}{EA} \quad (8)$$

上式を用いるとしわ領域の長さ l_w は次式となる。

$$l_w = l_0 - (d_1 + d_2) = l_0 - 2l_0 \frac{f}{EA} \quad (9)$$

式(8)の誘導において、ケーブル b は圧縮力を伝達できないことを用いている。

しわ領域の長さ l_w と初期長さ l_0 の関係を次式で定義する

$$l_w = \alpha l_0 = l_0 - 2l_0 \frac{f}{EA} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (10)$$

従って、
$$\alpha = 1 - 2 \frac{f}{EA} \quad (11)$$

A2: しわ形状は図 6 に示す正弦波関数で表されると仮定する。

$n=1, 2, 3, \dots$ として

$$w(x) = \delta_n \sin \frac{n\pi}{l_w} x \quad (12)$$

不伸張変形の仮定により、 δ_n を次式で決定することができる。

$$l_0 = \int_0^{l_w} \sqrt{1 + \left(\delta_n \frac{n\pi}{l_w} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi}{l_w} x} dx \quad (13)$$

ここでは、次の無次元量を採用する。

$$X = \frac{x}{\alpha \cdot l_0}, \quad \bar{\delta}_n = \frac{\delta_n}{\alpha \cdot l_0} \quad (14)$$

式 (13) を次式のように変化する。

$$l_0 = \alpha l_0 \int_0^1 \sqrt{1 + (\bar{\delta}_n n \pi)^2 \cos^2 n \pi X} dX \quad (15)$$

ここでは $1 \gg (\bar{\delta}_n n \pi)^2 \cos^2 n \pi X$ であるから、

$$\begin{aligned} l_0 &\cong \alpha l_0 \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} (\bar{\delta}_n n \pi)^2 \cos^2 n \pi X \right) dX \\ &= \alpha l_0 \left(1 + \frac{1}{2} (\bar{\delta}_n n \pi)^2 \int_0^1 (\cos^2 n \pi X) dX \right) \end{aligned} \quad (16)$$

よって、

$$\bar{\delta}_n^2 = \frac{4(1-\alpha)}{\alpha(n\pi)^2} \quad (17)$$

A3: エネルギー基準として、曲げによるひずみエネルギーを採用した場合を定式化しておく。ある n に対するひずみエネルギーを U_n^b とすると、

$$U_n^b = \int_0^{l_w} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (18)$$

式(12)を用いると

$$U_n^b = \int_0^{l_w} \frac{EI}{2} \left(-\delta_n^2 \left(\frac{n\pi}{l_w} \right)^4 \sin^2 \frac{n\pi}{l_w} x \right) dx = \frac{EI\pi^4}{4l_w^3} \delta_n^2 n^4 \quad (19)$$

ここでは、式(14)、(17)により得られる δ_n を上式に代入する

$$U_n^b = \frac{EI\pi^2}{l_0} \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2} n^2 \quad (20)$$

式 (11) を式 (20) に代入すると、

$$U_n^b = \frac{EI\pi^2}{l_0} \cdot \frac{2fEA}{(EA-2f)^2} \cdot n^2 \quad (21)$$

上式により、各 n に対して、 U_n^b を計算することができる。 U_n^b を最小とする n を選択することにより、しわ形状を決定することができる。

ここでは、 $n=1$ の時、 U_n^b が最小値になる。

4. 矩形張力膜の座屈解析としわ解析

4.1 研究目的

本節では、一方向に一樣な張力 N_{y0} が作用する矩形膜 (図 9(a)) のしわについての実験結果を最初に示す(写真 1~3)。ここでは、ポアソン比の効果によってしわが発生する。このようなしわの発生機構を解明するために、最初に座屈解析を行う。しかし、図 9(a) に示すようなモデルを解析するには、有限要素法のような数値解析が必要である。そこで、ここでは、図 9(b) に示すような解析モデルに対して、理論的な解析を行い、アスペクト比等の影響を定性的に把握する。最後に、図 9(a) と同じ条件の下で、二次元平面応力解析を行い、膜面の応力状態と発生したしわの関係を調査する。

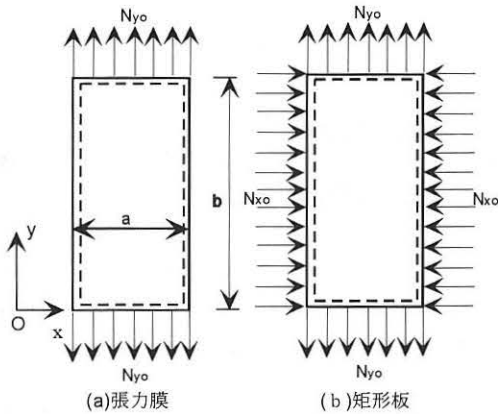


図 9 : 解析モデル

4.2 実験

しわの定性的な性質を見るため、簡単な実験を行った。

図 9 (a) に示すように、膜の一端を完全固定し、その反対側に載荷する。荷重を与える境界では、載荷方向のみローラーとし、その他の方向については固定する。等方性および直交異方性の膜に対して実験を行う。載荷荷重の大きさは、何れの場合も同じで 3kg である。写真 1 は等方性の膜に発生したしわを示す。直交異方性膜については、二種類の膜について実験を行った。それぞれ、二種類の繊維方向について実験を行った。矩形膜の長辺方向と繊維方向のなす角を θ とすると、どちらの膜も $\theta = 0$ のときにはしわは発生しなかった。写真 2、3 は $\theta = 45$ 度の場合である。写真 2 の膜は写真 3 の膜よりも厚い。直交異方性膜を 45 度方向に引っ張ったときの方が等方性膜の場合よりもしわの本数が少なく、また、しわによる面外変形が大きい。

4.3 平板の座屈解析

4.1 節に述べたように、ここでは、図 9 (b) に示すモデルについて、解析を行う。矩形板の境界から面内力 N_{x0} 、 N_{y0} を作用すると、図 9 (b) に示すように、面内力があるレベルに達すると面外方向にたわみが生じる。言いかえると、荷重に対する抵抗形式が面内抵抗から、曲げ抵抗に変化している。前で述べたように、分

岐座屈点では面内問題に対する釣合い式と面外問題における釣合い式が共存している。更に、座屈発生には圧縮力 N_{x0} の存在が必要である。この場合の境界条件は単純支持である。

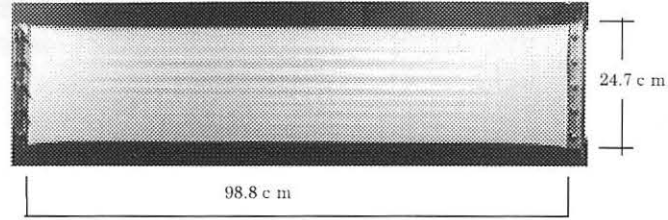


写真 1 : 等方性

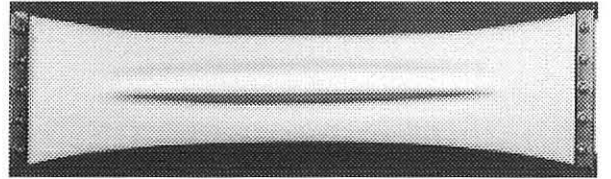


写真 2 : 直交異方性 (A) $\theta = 45^\circ$

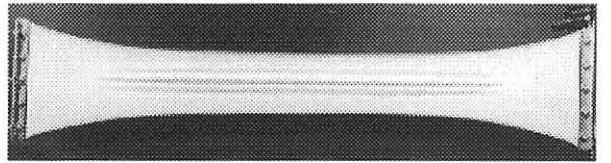


写真 3 : 直交異方性 (B) $\theta = 45^\circ$

1) 等方性の場合には、

図 9 の矩形板に対しては、式 (5) から

$$\frac{\partial N_{x0}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N_{y0}}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

上式より、 N_{x0} 、 N_{y0} は定数となる。式 (6) に代入すると、 N_{x0} は圧縮、 N_{y0} は引張り、であることに注意して、符号を選択すると、

$$D\nabla^4 w + N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

ここに、 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$

単純支持の境界条件を考え、座屈モードとして次式を仮定する。

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (24)$$

上式を式 (23) に代入し、 N_{x0} を求めると

$$\frac{b^2}{\pi^2 D} N_{x0} = \left[\frac{b}{a} m + \frac{an^2}{bm} \right]^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \frac{b^2}{\pi^2 D} N_{y0} \quad (25)$$

m, n を変化するとき、 N_{x0} が最小値をとる点で座屈が発生する。 N_{x0} の最小値は $n = 1$ で生じるので、式 (25) を次式のように変形する。

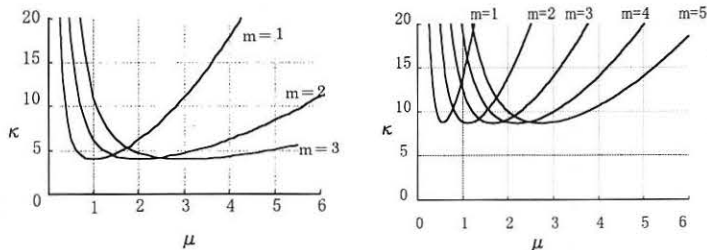
$$\kappa = \left[\frac{m}{\mu} + \frac{\mu}{m} \right]^2 + \left(\frac{\mu}{m} \right)^2 \bar{N}_{y0} \quad (26)$$

ここに、

$$\kappa = \frac{b^2}{\pi^2 D} N_{xx}, \quad \bar{N}_{y0} = \frac{b^2}{\pi^2 D} N_{yy}, \quad \mu = \frac{a}{b} \quad (27)$$

$\bar{N}_{y0} = 0$, 10 に対して κ と μ との関係を示すと図 10 となる。ある、 N_{y0} と μ に対して、 κ が最小となるように、 n を決定する。

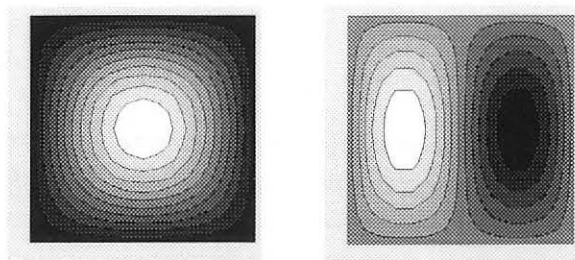
図 10 よりアスペクト比が大きいくほど、また、 N_{y0} が大きいほど n が大きくなるのがわかる。ここで、写真 1 と写真 2、3 を比較してみると、写真 2、3 の方がしわの本数が少ない。写真 2、3 は直交異方性膜を繊維方向に対して 45 度方向に引張っているので、引張方向に直交する方向の収縮変形が大きい（ポアソン比の影響が大きい）。ところで、後の 4.4 節にも示すように、しわは、ポアソン比の影響で生じる圧縮応力を解放するために発生する。従って、写真 2、3 の膜では荷重が小さくてもすぐにしわが生じる。これは、図 10 から得られる、 N_{y0} が小さい時には n が小さい、という事実に対応すると考えられる。なお、しわの本数は曲げ剛性にも影響されるが、写真 3 の膜は写真 2 の膜よりも薄く、 N_y が大きい、このため、 x 方向の収縮変形も大きく、 N_{y0} も大きかったと考えられる。これにより、写真 2 より写真 3 の場合のしわの本数が多くなったものと考えられる。



(a) $\bar{N}_{y0} = 0$

(b) $\bar{N}_{y0} = 10$

図 10: κ と μ 関係図



(a) $\mu < 1.5 (\bar{N}_{y0} = 0)$

$\mu < 0.8 (\bar{N}_{y0} = 10)$

(b) $1.5 < \mu < 2.5 (\bar{N}_{y0} = 0)$

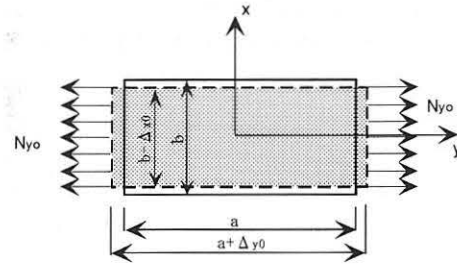
$0.8 < \mu < 1.4 (\bar{N}_{y0} = 10)$

図 11: 座屈モード

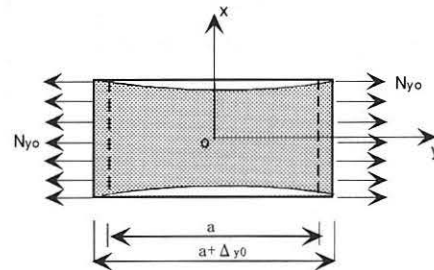
4.4 矩形膜の平面応力解析

1) 引張下矩形膜のしわ

4.2 節の実験では、繊維と 45° 方向に引張った時に最も面外変形の大きいしわが発生した。



(1) 境界が自由の場合



(2) 境界が固定の場合

図 12: 膜の引張変形

2) 平面応力の数値解析

図 9(a) の解析モデルに対して応力分布を二次元平面応力有限要素解析により求める。ただし、比較のため二種類の境界条件について検討する。つまり、二つの境界を載荷方向と直交方向について固定あるいは自由とする。

- 1) 引張方向の端部が自由の場合には、 $a \times b$ の膜が $(a + \Delta_{y0}) \times (b - \Delta_{x0})$ へ変形する。最も単純な平面応力状態であり、引張方向にのみ応力が存在し、直交方向の応力は零である。(図 12(1))
- 2) 引張方向の端部が固定の場合には、膜の中央部のみが収縮するので、圧縮力が発生する。(図 12(2))

以下では、等方性の場合 (図 13(a)) と、直交異方性で 4.2 節の繊維方向 θ が 0 度、45 度の場合 (図 13(b) (c)) について解析を行った。

計算された応力より、主応力を求める。図 13 に主応力の二成分のうち、小さい方の分布を示す。図の色の濃い部分は圧縮応力が発生している要素を示す。また、図の白い部分では応力は零となる。実際の膜では、圧縮応力はしわの発生により解放される。これにより変形状態も変化するが、面内変形のみでは幾何学的適合条件を満たすことができないため、面外変形が生じると考えられる。中央部では圧縮応力は発生していないが、引っ張り方向と直交方向では応力が零であるため、この方向に収縮するような変形はあまり拘束されない。従って、境界付近の面外変形が伝播して、

写真1~3のようなしわが形成されると考えられる。このような傾向は図13の中の全ての図に対して共通しているが、図13(c)の直交異方性で $\theta = 0^\circ$ のときには、圧縮応力は境界付近に少し分布しているだけであり、直交異方性膜を繊維方向に引張た実験では、しわがほとんど生じなかったことに対応している。

先の1)の境界条件では、引張応力のみが存在し、それに直交方向の応力は零となっている。すなわち、圧縮場のない張力場状態になっているので、幾何学的に不適合となることはない。従って、しわは発生しない。

5. まとめ

本研究では、張力場理論と分岐座屈理論を統一を試みるしわ解析理論について概説し簡単な考察を行った。次に一方向に引張られる矩形膜の実験を行った。座屈解析および二次元平面応力解析との比較により、そこで生じるしわの発生機構を考察した。提案したしわ解析理論を進展させ、さらに詳細な解析を行うことが、今後の課題である。

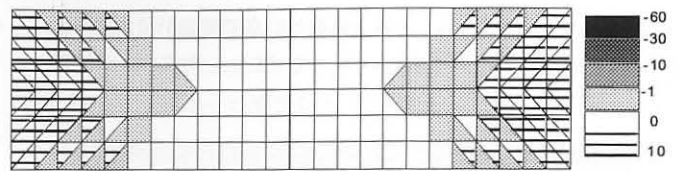
おわりに

本論文の作成にあたり、東京大学大学院工学系研究科博士課程李炯勲氏のご協力を受けました。ここに謹んで謝意を表します。

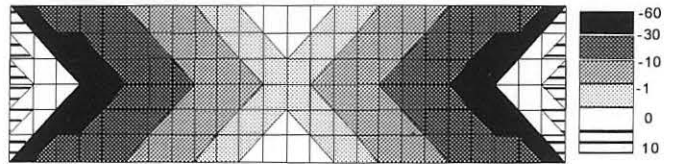
本論文の共著者の半谷裕彦教授が1998年8月9日逝去されました。本研究は基本的なアイデアから式の展開に至るまで、半谷教授の御指導の下に行われて来ました。ここに謹んで感謝の意を表すとともにご冥福を御祈りいたします。

【参考文献】

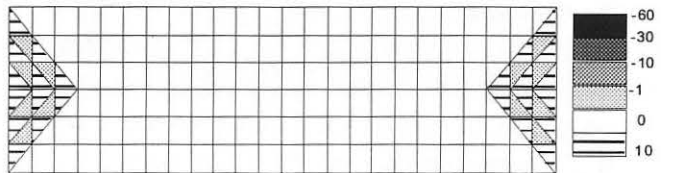
- [1] M. Stein and J. H. Hedgepeth : Analysis of Partly Wrinkled Membrane, NASA TN D-813, 1961. 7.
- [2] 西村敏雄, 登坂宣好, 本間俊雄 : 有限要素法による張力場解析手法について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第351号, 1985, pp. 76-83



(a) 等方性膜材料の場合



(b) 直交異方性膜材料の場合 ($\theta = 45^\circ$)



(c) 直交異方性膜材料の場合 ($\theta = 0^\circ$)

図13 : 主応力分布図 (kg/cm)

- [3] T. Suzuki, T. Ogawa, S. Motoyui and T. Sueoka : Investigation on Wrinkling Problem of Membrane Structure, Proceedings of IAASS-MSU Symposium on Domes from Antiquity to the Present, 1988, pp. 695-702
- [4] 宮村倫司, 半谷裕彦 : 回転対称膜構造に発生するしわの有限要素法による解析, 日本建築学会構造系論文集, 第481号, 1996, pp. 63-70
- [5] 半谷裕彦, 鍾国強, 宮村倫司 : 空間構造の分岐解析, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集, 17, 1993, pp. 227-232
- [6] 半谷裕彦 : 片側応力問題の変分不等式とポテンシャル関数, 生産研究, 38巻8号, 1986, pp. 62-6
- [7] 半谷裕彦, 呂品琦 : 平面膜のしわ解析—その1 研究背景と基本仮定, 日本建築学会大会学術講演梗概集'98年(九州), 1005-1006
- [8] 呂品琦, 半谷裕彦 : 平面膜のしわ解析—その2 矩形張力膜の座屈解析としわ解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集'98年(九州), 1007-1008

The Analysis of Wrinkling in Rectangular Tensioned Membrane Structures

Pinqi Lu¹

Yasuhiko Hangai²

Ken'ichi Kawaguchi³

SYNOPSIS

Tensioned membrane structures have so small flexural stiffness that they can not transmit compression stress. The wrinkling of membrane becomes a common problem. There have been two types of theory mainly used for the analysis of wrinkling problem of membrane. The first one is the tension field theory. The second one is the bifurcation buckling theory. In this paper, a new analysis theory will be introduced which integrate the above two theories, the tension field theory and the bifurcation buckling theory. The basic assumptions and research objectives will be described.

1) Doctoral Course Student, Graduate School of Engineering, University of Tokyo

2) Professor, Ph.D-Eng. Institute of Industrial Science, University of Tokyo. Passed away on August 9, 1998

3) Associate Professor, Ph.D-Eng. Institute of Industrial Science, University of Tokyo