膜材料の非線形性と異方性を考慮した膜構造物の応力·形状最適化

大崎 純[*1]，藤原 淳[*2]

梗　概

有限要素法を用いて離散化された骨組支持膜構造物に対し，応力の目標値からの偏差量を最小化する形状設計法を拡張し，膜材料の応力-ひずみ関係の非線形性および直交異方性を考慮した定式化を提案する。膜材料の各繊維方向の1軸載荷引張り試験結果をもとに，指定応力レベルで応力-ひずみ関係曲線の接線近似を行なう。また，有限要素分割された膜面の要素の局所座標と膜材料の繊維方向との偏差角を，膜の釣合形状から近似的に求め，初期応力を除去したときのひずみの変化量を精度よく予測する変換式を導く。以上の定式化を用いて，等張力などで与えられる目標応力レベルに可能な限り近い応力分布を実現できる釣合い形状と，それに対応する裁断図形状を求める。また，膜材料の繊維方向を変化させることにより，応力分布を改善する手法についても論じる。例題では，2種類の骨組支持膜構造物に対して最適な形状及び繊維方向を求め，得られた裁断図から釣合形状解析を行なうことにより，本手法の有効性について検証する。

1. 序

膜構造物は，平面裁断膜を張り合わせて構成されるため，張力導入時の初期釣合い曲面を求めるためには，張力を除去したときに平面となるための条件（可展条件）を考慮しなければならない。しかし，原型曲面解析 [1–5] によって自己釣り合い形状を求めた後に，初期応力によるひずみを取り除いて近似裁断図形状を求める手法では，可展条件は直接的には考慮されていない [6–8]。

このような問題点を解決するため，坪田・吉田 [9] は，仮定した裁断図形状に対して非線形釣合い形状解析 [10] により釣合形状を求め，得られた応力分布が望ましくないときには，裁断図形状を変更し，繰り返し形状解析を行なって最適な裁断図形状を求める手法を提案した。しかし，その手法では形状解析のために極めて多くの計算時間を必要とする。

一方，大崎ら [11] は，釣合形状を既知とする逆問題型手法に基づく目標形状・応力トレードオフ設計法を提案した。この手法では，三角形有限要素で分割された膜面に対し，下位レベル最適化問題において，指定された形状の下で釣合い条件と可展条件を満たし，目標値からの偏差量を最小化するような応力分布を求める。次に，上位レベル最適化問題では，内部節点座標と裁断曲線に関する下位レベル最適解の形状感度解析を行ない，最適化アルゴリズムを用いて応力偏差量と形状偏差量の重み付き和を最小化するような形状を求める。この手法を用いれば，釣合曲面の決定と同時に裁断膜形状を決定することができる。しかし，このトレードオフ設計法では，応力-ひずみ関係の非線形性や，張力除去過程での繊維方向の変化の影響が考慮されていない。また，釣合い形状と裁断図形状の間の非線形関係を直接用いた形状設計法 [12,13] でも，材料非線形性は考慮されていない。

膜材料の非線形性のモデル化に関しては，多くの研究が発表されている。日野・石井 [14] は，塑性理論で用いられる相当応力の概念を導入し，数個の応力比に対して区分線形化法により材料定数を定める方法を提案した。南ら [15] は，応力比を定めた2軸引張り試験により得られた応力-ひずみ関係を内挿し，任意の応力比に対する応力-ひずみ関係を求める手法を示した。これらのマクロモデル的な手法に対し，膜材料の繊維構造を定式化する手法も発表されている。西川ら [16] は，膜の織糸間の相互作用における幾何学的非線形関係を導き，織布固有の特性を非線形弾性体としてモデル化することにより，材料非線形性を定式化した。一方，加藤らは，織構造の特性を精度よく表現できるSchockモデルに基づき，膜材料の材料非線形性をモデル化する手法を提案し，その精度を実験結果と比較して検討するとともに，そのモデルを用いた解析手法を提案した [17–20]。

本論では，逆問題型定式化による形状設計法 [11] を拡張し，材料非線形性及び張力除去過程での要素の剛体変化にともなう主方向（繊維方向）の変化の影響を考慮した手法を提案する。また，繊維方向を設計変数として導入し，繊維変更を変化させることにより応力分布を改善することが可能であることを示す。

*1　京都大学大学院工学研究科 助教授
*2　京都大学大学院工学研究科 大学院生

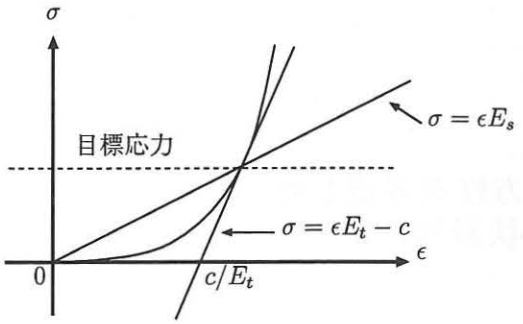

図 1: 応力-ひずみ関係の近似

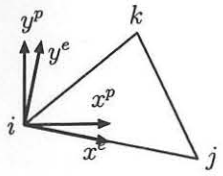

図 2: 座標の偏差角

図 3: 釣合状態膜面の平面展開

2. 材料非線形性のモデル化

本論で提案する逆問題型の形状設計法では，釣合い状態から応力を取り除いたときに平面裁断図が形成されるための可展条件を用いて，指定された曲面が形成可能であることを保証する。指定された釣合い形状に対する最適初期応力が得られると，裁断図は応力除去にともなうひずみを差し引いて求められる。したがって，応力除去の過程で用いる応力-ひずみ関係が現実的なものでないと，得られた裁断図を実際に張り合わせて得られる形状とそれに対応する応力は，設計時に指定されたものとは大きく異なることになる。

膜材料は，織布とコーティング材により構成され，織布の縦糸と横糸方向（主方向あるいは繊維方向）の応力-ひずみ関係は，各方向の応力の比（応力比）によって異なる。その原因としては，繊維間の幾何学的非線形関係と，材料固有の非線形性などが考えられるが，ここでは，膜材料を直交異方性弾性体としてモデル化し，1 軸方向の応力-ひずみ関係の非線形性のみ考慮するものとする。本論の目的は，目標レベルからの偏差量が小さい応力分布をもつ形状を求めることであるから，目標レベル付近の応力-ひずみ関係が精度良く近似できれば十分である。また，次節以降で述べる手法は，文献 15 の手法などを導入すれば，より厳密なものとすることができる。

例えば，図 1 は，主方向 (x^p, y^p) の 1 つの方向の単軸引張り試験によって得られる応力 σ とひずみ ϵ の関係を表わしたものである。文献 11 では，膜材料を直交異方性線形弾性体としてモデル化し，その弾性係数などの材料パラメータは，応力比や応力レベルに関わらず一定とした。しかし，そのモデル化では，釣合い時の応力から導かれるひずみは，指定応力レベルによっては実際の値とは大きく異なったものとなる。一方，指定応力レベルによって弾性係数を変更することも可能であるが，その場合にも，得られた応力値の指定値からの偏差量が大きいときには，応力除去にともなうひずみの減少量を精度良く予測することができない。

図 1 の点線は，目標応力レベルを表わしたものである。文献 11 では，目標レベルでの応力とひずみから得られる割線係数 E_s を用い，次のような線形表現で応力-ひずみ関係を表わしている。

$$\sigma = \epsilon E_s \tag{1}$$

しかし，この場合には，応力の目標値からの偏差量が大きいとき，釣合い状態での応力から得られるひずみの値は，曲線で表わされる値からかけ離れたものとなる。

そこで，図 1 に示すように，目標応力レベルで得られる接線係数 E_t を用いて，繊維方向の応力-ひずみ関係を次式で近似する。

$$\sigma = \epsilon E_t - c \tag{2}$$

例題では，縦糸方向と横糸方向のそれぞれについて，1 軸引張り試験の結果から，σ を ϵ の多項式で表わす。

各繊維方向応力及びせん断応力をそれぞれ $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ とし，対応するひずみ及びせん断ひずみを $\epsilon_x^p, \epsilon_y^p, \gamma_{xy}^p$ とする。また，応力の指定値から得られる接線弾性係数を E_x, E_y とする。せん断弾性係数 G 及びポアソン比 ν_{xy}, ν_{yx} は，応力レベルに関わらず一定とする。

指定応力レベル $(\sigma_x^p, \sigma_y^p) = (\bar{\sigma}_x^p, \bar{\sigma}_y^p)$ 付近での応力増分とひずみ増分の関係が，直交異方性弾性体として表わされるものとすると，$(\bar{\sigma}_x^p, \bar{\sigma}_y^p)$ 付近での応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^p = \{\sigma_x^p\ \sigma_y^p\ \tau_{xy}^p\}^T$ とひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^p = \{\epsilon_x^p\ \epsilon_y^p\ \gamma_{xy}^p\}^T$ の関係は，次のように書ける。

$$\boldsymbol{\sigma}^p = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{c} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_y}{1-\gamma\nu_{xy}^2}\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\nu_{xy} & 0 \\ \gamma\nu_{xy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa(1-\gamma\nu_{xy}^2) \end{pmatrix} \tag{4}$$

ここで，相反関係 $E_x\nu_{xy} = E_y\nu_{yx}$ を用いた。また，$\gamma = E_x/E_y, \kappa = G/E_y$ であり，ベクトル $\boldsymbol{c} = \{c_x\ c_y\ 0\}^T$ の c_x, c_y は，$(\sigma_x^p, \sigma_y^p) = (\bar{\sigma}_x^p, \bar{\sigma}_y^p)$ においてひずみが実験値に一致することより求められる。

3. 主方向の偏差角の算定

釣合い形状を形成する曲面を三角形有限要素を用いて離散モデル化すると，図 2 のように各要素ごとに設定される局所座標 (x^e, y^e) と繊維方向のなす主方向座標 (x^p, y^p) は一般には一致せず，その間には偏差角 ϕ が生じる。文献 11 ではこの偏差角を微小なものとして無視しているが，本論ではこの偏差角を考慮したより厳密な定式化を行なう。ここで，図 2 に示すように各要素ごとに節点 i, j, k を定め，x^e は節点 i から j に向かう方向，y^e は x^e を反時計回りに $\pi/2$ 回転させた方向とする。

本論で用いる逆問題型形状設計法では，釣合い形状を既知として，初期応力を除去することにより裁断図形状を求める。しかし，上記の偏差角は裁断図上で定められるべきものであり，釣合い形状を有限要素分割した段階で評価するのは困難である。そこで，図 3 に示すように釣合状態の膜面を切断して平面に展開し，ここで求めた偏差角が偏差角の真の値を近似しているものと仮定する。すなわち，要素の剛体変形のみ考慮し，せん断変形の偏差角への影響は微小であるものとして無視する。したがって，膜材料繊維は張力導入後も直交するものと仮定する。

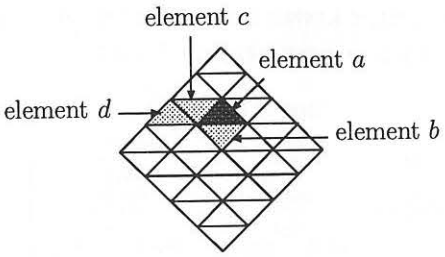

図 4: 要素の分類

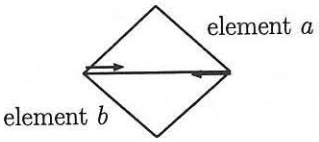

図 5: 要素 b の偏差角

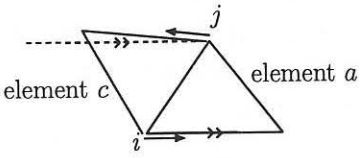

図 6: 要素 c の偏差角

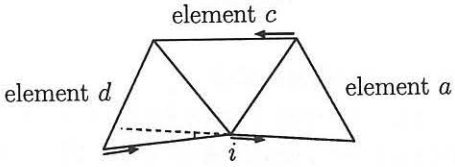

図 7: 要素 d の偏差角

偏差角は，裁断膜ごとに 1 つの独立な値をとり得るため，まず，基準となる要素 a を定めその偏差角の値 ϕ_a を与える。次に，要素 a 周辺の要素を a との位置関係により図 4 に示すように b, c, d の 3 種類に分類し，それぞれに対して以下のように偏差角を算定する。ここで，図 5-7 において，矢印は局所座標 x^e の方向を表わしている。

要素 a と図 5 のように隣接する要素 b に対しては，x^e 軸が同一直線上で向きが異なるように設定すると，偏差角 ϕ_b は ϕ_a と等しいから次式が成立する。

$$\phi_b = \phi_a \tag{5}$$

要素 a と局所座標 x^e の辺以外で隣接する要素 c の偏差角 ϕ_c は，図 6 に示すように要素 a の節点 i と要素 c の節点 j を定め，その内角をそれぞれ θ_i^a, θ_j^c とすると，ϕ_a を用いて以下の式より得られる。

$$\phi_c = \theta_i^a - \theta_j^c + \phi_a \tag{6}$$

要素 c と隣接する要素 d の偏差角 ϕ_d は，図 7 に示すように局所座標 x^e を定め，以下の式より得られる。

$$\phi_d = \pi - (\theta_i^a + \theta_i^c + \theta_i^d) + \phi_a \tag{7}$$

ここで，$\theta_i^a, \theta_i^c, \theta_i^d$ は，それぞれ要素 a, c, d の節点 i の内角である。

同様の操作を繰り返して適用することにより，1 つの列を構成する要素の偏差角を求める。隣接する列については，それが異なる裁断膜に含まれる場合には新たに基準偏差角 ϕ_a を与え，すでに基準値が定められている列と同一の裁断膜に含まれる場合には，その列の任意の要素の偏差角から基準値を算定する。

以上より，全ての要素の偏差角が得られると，局所座標に関する応力から主方向座標に関する応力への変換行列 $\boldsymbol{R}^e$ は，偏差角 ϕ^e を用いて，以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{R}^e = \begin{pmatrix} \cos^2\phi^e & \sin^2\phi^e & 2\cos\phi^e\sin\phi^e \\ \sin^2\phi^e & \cos^2\phi^e & -2\cos\phi^e\sin\phi^e \\ -\cos\phi^e\sin\phi^e & \cos\phi^e\sin\phi^e & \cos^2\phi^e - \sin^2\phi^e \end{pmatrix} \tag{8}$$

4. 釣合い条件式と可展条件式の導出

本節では，初期形状で満たされるべき釣合い条件と，初期応力を除去して平面裁断膜が形成されるための可展条件を導く。釣合い条件には通常の三角形有限要素法の定式化 [21] を用い，可展条件は，材料非線形性と偏差角を考慮すること以外は文献 11 に示したものと同じであるが，論文の完結性と後で用いる記号の定義のため，重複するところも含めて以下に記述を行なう。

釣合条件式

三角形有限要素の節点 i の局所座標 (x^e, y^e) 方向の変位を u_i, v_i とし，節点 j, k についても同様に下添字 j, k を用いて表わす。このとき，要素の変位ベクトル $\boldsymbol{u}^e$ を $\boldsymbol{u}^e = \{u_i\ v_i\ u_j\ v_j\ u_k\ v_k\}^T$ のように定義する。要素内一様ひずみ有限要素の局所座標でのひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^e = \{\epsilon_x^e\ \epsilon_y^e\ \gamma_{xy}^e\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}^e$ の関係は，節点 i, j, k の全体座標から求められる定行列 $\boldsymbol{C}^e$ より以下のように表される。

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{C}^e\boldsymbol{u}^e \tag{9}$$

ここで，全体座標系を (x, y, z) とし，節点 i, j, k での値を下添字 i, j, k で表わすと，$\boldsymbol{C}^e$ は要素面積 A^e を用いて次式で与えられる。

$$\boldsymbol{C}^e = \frac{1}{2A^e}\begin{pmatrix} y_i - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix} \tag{10}$$

要素の局所座標に関する応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}^e = \{\sigma_x^e\ \sigma_y^e\ \tau_{xy}^e\}^T$ とし，等価節点力ベクトルを $\boldsymbol{f}^e = \{f_{xi}^e\ f_{yi}^e\ f_{xj}^e\ f_{yj}^e\ f_{xk}^e\ f_{yk}^e\}^T$ とすると，$\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{f}^e$ の関係は，膜材料の厚さを t として以下のように表される。

$$\boldsymbol{f}^e = tA^e\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\sigma}^e \tag{11}$$

(11) を全体座標に変換し，膜面全体にわたって重ね合わせることにより，全体の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ に関する釣合い式は，以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{b} \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{b}$ は外力ベクトルであり，自己釣り合い状態では $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である。

可展条件式

釣合い曲面から初期応力を除去して平面裁断膜が形成されるためには，1 つの節点に隣接する要素の，対応する節点での内角の和が，無応力状態で 2π とならなければならない。さらに，隣接要素間で共有される辺の長さは，応力除去後にも等しくなければならない。上記 2 つの条件をここでは可展条件という。ここで，裁断線上で隣接する要素間では，角度と辺長の適合は要求されず，裁断線全体の長さが等しければ十分であるものとする。

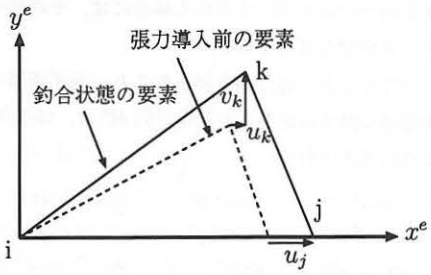

図 8: 局所座標とそれに対応する節点変位

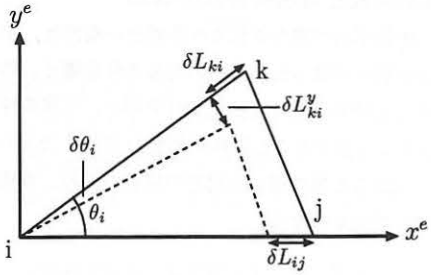

図 9: 辺長および角度変化量の定義

節点 i を要素節点とする要素の集合を A, 要素 a の節点 i での角度を θ_i^a とすると，節点 i での角度の適合条件式は以下のようになる。

$$\sum_{a\in A}\theta_i^a - \sum_{a\in A}\delta\theta_i^a = 2\pi \tag{13}$$

ここで，$\delta(\ )$ は張力導入による変化量を表わす。また，裁断線上以外の辺 ij の両側の要素を a, b とし，それぞれの要素の辺 ij の長さを L_{ij}^a, L_{ij}^b で表わすと，辺 ij の辺長適合条件式は以下のようになる。

$$\delta L_{ij}^a - \delta L_{ij}^b = 0 \tag{14}$$

さらに，1つの裁断線の両側の要素の集合を A, B とすると，裁断線の適合条件式は以下のように表される。

$$\sum_{a\in A}\delta L_{ij}^a - \sum_{b\in B}\delta L_{ij}^b = 0 \tag{15}$$

これらの適合条件を，以下のようにして応力の線形式で表わす。

図 8 に示すように，節点 i を局所座標の原点とし，辺 ij 方向に x^e 軸を定めると，要素の変形を表現するために必要な独立な節点変位は節点 j の x^e 方向変位 u_j 及び節点 k の x^e, y^e 方向の変位 u_k, v_k の 3 個となる。以上に基づき，変位ベクトルを $\boldsymbol{u}^e = \{u_j\ u_k\ v_k\}^T$ のように再定義し，これにともない (10) の $\boldsymbol{C}^e$ も変更する。

要素の節点 i, j, k での角度を $\theta_i, \theta_j, \theta_k$, 辺 ij, jk, ki の辺長を L_{ij}, L_{jk}, L_{ki} とする。要素の剛体変位は大きいが，要素内の変形は微小であるものとすると，$\delta L_{ij} \ll L_{ij}$ 等が成り立ち，辺長変化量 $\delta\boldsymbol{L}^e = \{\delta L_{ij}\ \delta L_{jk}\ \delta L_{ki}\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}^e$ の関係は以下のようになる。

$$\delta\boldsymbol{L}^e = \boldsymbol{G}^e\boldsymbol{u}^e \tag{16}$$

$$\boldsymbol{G}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta_j & -\cos\theta_j & \sin\theta_j \\ 0 & \cos\theta_i & \sin\theta_i \end{pmatrix} \tag{17}$$

また，微小変形の仮定より $\sin\delta\theta_i = \delta\theta_i$ となるので，節点 k の辺 ki に対する垂直方向変位を δL_{ki}^y とすると，$\delta\theta_i = \delta L_{ki}^y / L_{ki}$ が成り立つ。他の節点に対しても同様にして，角度変化量 $\delta\boldsymbol{\Theta}^e = \{\delta\theta_i\ \delta\theta_j\ \delta\theta_k\}^T$ と変位ベクトル $\boldsymbol{u}^e$ の関係は以下のようになる。

$$\delta\boldsymbol{\Theta}^e = \boldsymbol{H}^e\boldsymbol{u}^e \tag{18}$$

$$\boldsymbol{H}^e = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\sin\theta_i}{L_{ki}} & \dfrac{\cos\theta_i}{L_{ki}} \\ -\dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\cos\theta_j}{L_{jk}} \\ \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & \dfrac{\sin\theta_i}{L_{ki}} - \dfrac{\sin\theta_j}{L_{jk}} & -\dfrac{\cos\theta_i}{L_{ki}} - \dfrac{\cos\theta_j}{L_{jk}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

ここで，(3)，(8) 及び (9) より，$\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{u}^e$ の関係は

$$\boldsymbol{u}^e = [\boldsymbol{C}^e]^{-1}[\boldsymbol{R}^e]^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{R}^e\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{20}$$

のようになり，(20) を (16)，(18) に代入して，張力導入にともなう変化量を，次のように応力の線形式で表現できる。

$$\delta\boldsymbol{L}^e = \boldsymbol{G}^e[\boldsymbol{C}^e]^{-1}[\boldsymbol{R}^e]^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{R}^e\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{21}$$

$$\delta\boldsymbol{\Theta}^e = \boldsymbol{H}^e[\boldsymbol{C}^e]^{-1}[\boldsymbol{R}^e]^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{R}^e\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{c}) \tag{22}$$

以上より，(21), (22) を (13)–(15) に用いて重ね合わせると，辺長・裁断線適合条件式および角度適合条件式は以下のように全体系の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ の線形式で表現できる。

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{h} \tag{24}$$

5. 階層型応力・形状最適化手法

本節では，初期応力の目標値からの偏差量を最小化するような釣合い形状と裁断図形状を求める階層型最適化問題を定式化し，感度解析による最適化手法の概要を述べる。下位レベル最適化問題では，指定された形状の下で，釣合い式と可展条件を満たし，目標値からの偏差量を最小化するような応力分布を求める。次に，上位レベル最適化問題では，下位レベル最適化問題の最適応力を指定形状の関数と考え，内部節点座標に関する感度解析を実行することにより，最適化アルゴリズムにしたがって内部節点座標を変更し，それを指定値として下位レベル最適化問題の最適応力を逐次求めて応力の偏差量を最小化するような最適形状を求める。ここで，繊維方向も変数とするときには，上位レベルでにおいて，裁断図ごとに独立に設定する基準偏差角も設計変数に導入する。階層型形状設計法の概要は以下のとおりである。

Step 1 膜面の境界形状，裁断パターン及び目標となる応力分布を与える。

Step 2 膜面の釣合形状の初期値を与える。

Step 3 指定された形状に対し，釣合条件と可展条件を満たし，目標値からの偏差量を最小化するような応力分布を求める。

Step 4 Step 3 の最適応力分布の指定形状に関する感度解析を行ない，最適化アルゴリズムにしたがって，応力分布を改善する形状を探索する。

Step 5 形状変更の必要があれば，得られた形状を指定形状として Step 3 にもどる。変更の必要がなければ，最適化を終了する。

Step 6 得られた釣合形状と応力分布より，可展条件を満たす初期応力を除去して裁断図形状を得る。

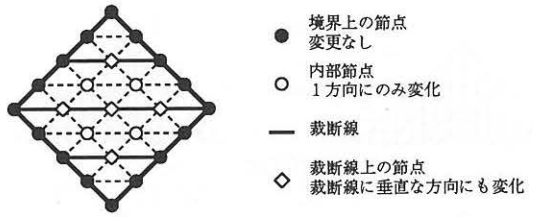

図 10: 設計変数の定義

上記アルゴリズムにおいて，繊維変更も変数とするときには，Step 4,5 で裁断図ごとに独立に設定される基準偏差角を変更する。下位と上位の最適化問題の詳細は，下記のとおりである。

<u>形状指定応力偏差量最小化問題</u>

釣合い形状が与えられ，有限要素分割を行なって節点座標が得られたとき，釣合い条件式 (12) 及び可展条件式 (23)，(24) を満たす $\boldsymbol{\sigma}$ を求めることにより，無応力時に膜面が平面となる応力分布が得られる。

以下では，制約条件 (12)，(23) 及び (24) を満たす $\boldsymbol{\sigma}$ の中で，目標応力 $\boldsymbol{\sigma}_o$ からの偏差量が最も小さい応力ベクトルを求める最適化問題を定式化する。制約条件式は全て $\boldsymbol{\sigma}$ の線形式であるので，これらをまとめて次のように表わす。

$$\boldsymbol{A\sigma} = \boldsymbol{a} \tag{25}$$

以上より，最適化問題は次のように定式化できる。

$$\text{Minimize} \quad \bar{P}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o)^T(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o) \tag{26}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{A\sigma} = \boldsymbol{a} \tag{27}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ をラグランジュ乗数とし，ラグランジュ関数 Π を

$$\Pi = \bar{P}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A\sigma} - \boldsymbol{a}) \tag{28}$$

のように定めると，Π の停留条件より次の各式を得る。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \tag{29}$$

ここで，$\bar{P}$ は $\boldsymbol{\sigma}$ の 2 次式であり，(27) は $\boldsymbol{\sigma}$ の 1 次式であるので，(29) は $\boldsymbol{\sigma}$ 及び $\boldsymbol{\lambda}$ の連立 1 次方程式として次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_o \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \tag{30}$$

したがって，下位レベルの形状指定応力偏差量最小化問題の最適解は，連立 1 次方程式 (30) を 1 度解くだけで求められる。

<u>形状最適化問題</u>

下位レベル最適化問題の最適応力分布は，指定された内部節点座標の関数と考えられるため，最適解と最適目的関数値の節点座標に関する感度解析を行ない，最適化アルゴリズムに基づき応力分布を改善する節点座標を探索する。

境界骨組の形状を固定とし，内部節点座標のみを変更する。節点は一般に 3 自由度をもつが，ここでは曲面の形状を記述できれば良いので節点座標は 1 方向のみに変更するものとする。また，裁断線上の節点については，上記の方向に加え裁断線を変化させる方向にも移動させるものとする。形状設計変数の概要は，図 10 に示したとおりである。さらに，繊維方向も最適化するときには，裁断図ごとに独立に定められる偏差角 ϕ_a も変数とする。

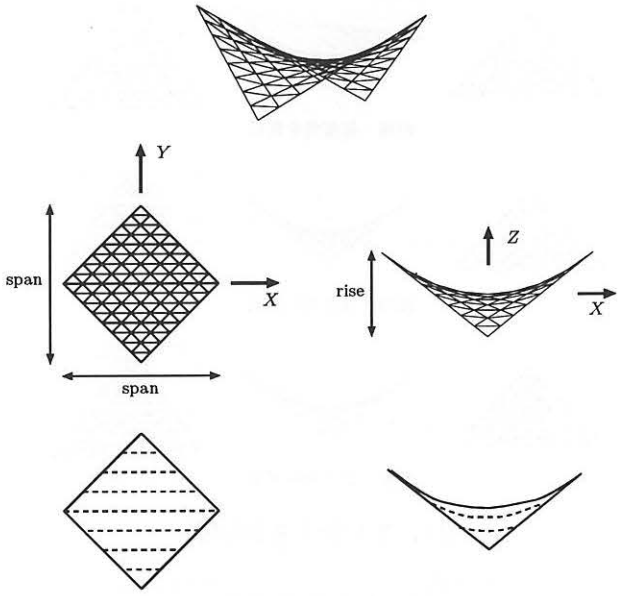

図 11: 骨組膜構造物モデル (タイプ 1)

設計変数による感度係数を $(\ )'$ で表すと，(26) の感度係数 $\bar{P}'$ は以下のようになる。

$$\bar{P}' = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o)^T \boldsymbol{\sigma}' \tag{31}$$

ここで，応力の感度係数 $\boldsymbol{\sigma}'$ は，(30) を設計変数で微分して得られる次のような連立 1 次方程式を解いて求められる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\lambda}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}'^T \\ \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a}' \end{pmatrix} \tag{32}$$

6. 形状設計例

以下では特に指定のない場合は長さの単位は cm，応力の単位は kgf/cm^2 とする。単位に関しては，本来ならば SI 単位を用いるところであるが，膜構造では工学単位を用いるのが慣例であるのでこれに習った。

<u>応力-ひずみ曲線の定式化</u>

以下の例題において裁断図設計を行なう際の，膜材料の応力-ひずみ関係の割線や接線による近似式を導くために，まず応力-ひずみ関係を定式化する。この例題では，x^p 軸，y^p 軸それぞれの 1 軸引張時の応力-ひずみ (σ_x-ϵ_x),(σ_y-ϵ_y) 関係を，以下のような 3 次曲線で定式化する。

$$\sigma_x = 1.024 \times 10^8 \times (\epsilon_x - 3.125 \times 10^{-3})^3 \tag{33}$$

$$\sigma_y = 3.125 \times 10^6 \times (\epsilon_y - 1.0 \times 10^{-2})^3 \tag{34}$$

目標応力を x^p, y^p 方向に対し $\sigma_{xo} = 62.5$，y 軸方向応力で $\sigma_{yo} = 62.5$ するとこの目標応力に対する割線近似式は以下のようになる。

$$\sigma_x = 5384\ \epsilon_x \tag{35}$$

$$\sigma_y = 1683\ \epsilon_y \tag{36}$$

また，同様の目標応力に対する接線近似式は以下のようになる。

$$\sigma_x = 22014\ \epsilon_x - 194.0 \tag{37}$$

$$\sigma_y = 6907\ \epsilon_y - 194.0 \tag{38}$$

以下の例題では，(35)-(38) を (3) に導入し膜材料の構成則を導くものとする。

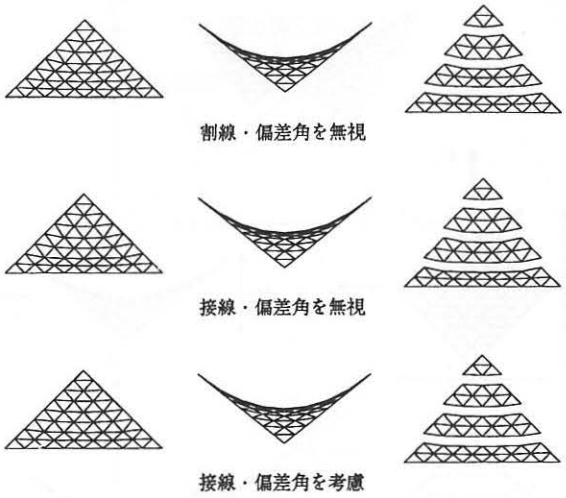

図 12: 最適形状と最適裁断図

表 1: 裁断図設計の結果

割線近似・偏差角無視			
応力偏差量	1637.76		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	62.463	62.486	2.0567×10^{-14}
最大	69.886	67.209	5.8116
最小	55.023	57.851	−5.8116
標準偏差	4.0378	2.1824	2.1263

接線近似・偏差角無視			
応力偏差量	7821.41		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	61.843	62.717	-5.4561×10^{-14}
最大	76.307	75.792	8.5161
最小	46.921	47.948	−8.5161
標準偏差	6.9491	7.9269	3.2567

接線近似・偏差角考慮			
応力偏差量	7631.38		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	62.144	62.400	-5.8176×10^{-14}
最大	77.448	74.240	6.9887
最小	47.997	50.396	−6.9887
標準偏差	7.6219	7.2660	2.8663

例題 1 (形状最適化)

図 11 のようなスパン 3200，ライズ 1280 の HP 形状の膜構造物を対象として，本手法による裁断図設計を行なう。要素分割，裁断パターンも図 11 に従うものとする。

まず，応力-ひずみ関係の割線近似で座標の偏差角を無視した場合，接線近似で偏差角を無視した場合，接線近似で偏差角を考慮した場合の 3 例で裁断図設計を行なう。対称性を考慮して，$Y \geq 0$ の範囲についてのみ最適形状を求める。裁断図設計の際の目標応力は x^e, y^e 方向に対して $\sigma_{xo} = 62.5, \sigma_{yo} = 62.5$，せん断応力に対して $\tau_{xyo} = 0$ とした。

最適釣合曲面の平面図，立面図及び得られた裁断図をそれぞれ図 12 に示す。表 1 には，最適化問題の目的関数である応力偏差量と応力 $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau_{xy}^e$ の平均，最大，最小値および標準偏差を示す。

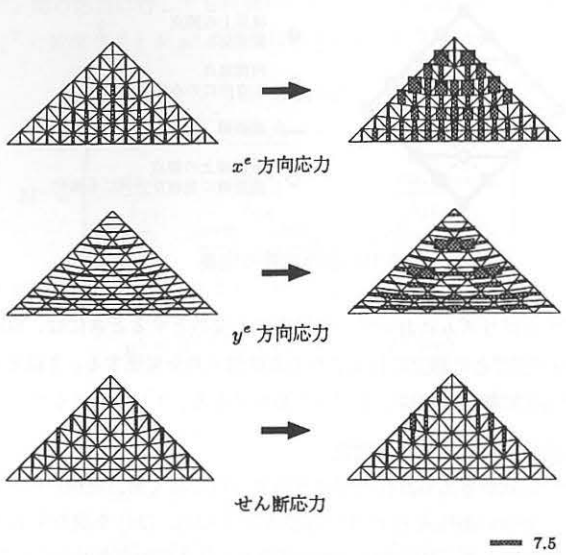

図 13: 割線近似・偏差角無視の場合の応力分布

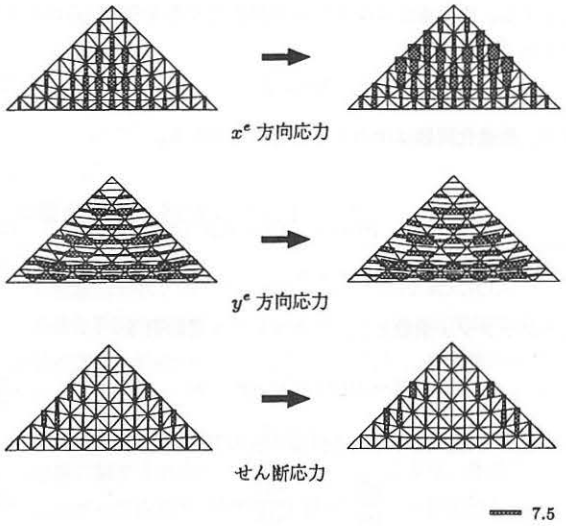

図 14: 接線近似・偏差角無視の場合の応力分布

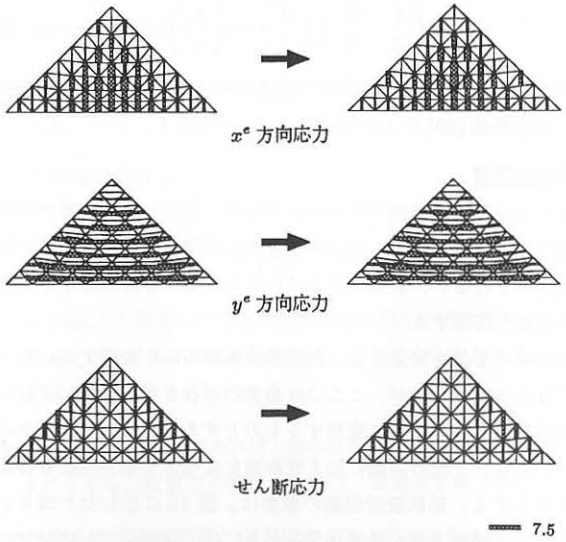

図 15: 接線近似・偏差角考慮の場合の応力分布

表 2: 釣合形状解析の結果

割線近似・偏差角無視			
応力偏差量	15107.76		
形状誤差	27.734		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	63.870	62.594	1.9954×10^{-1}
最大	90.179	85.845	10.497
最小	44.719	44.749	−9.7936
標準偏差	12.157	8.3392	3.4100

接線近似・偏差角を無視			
応力偏差量	13887.71		
形状誤差	12.913		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	62.837	62.750	1.9396×10^{-1}
最大	84.308	78.829	12.646
最小	41.020	47.082	−12.138
標準偏差	11.055	8.2229	4.1709

接線近似・偏差角考慮			
応力偏差量	8827.44		
形状誤差	0.7346		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	61.369	61.803	1.7952×10^{-1}
最大	76.630	74.715	6.8758
最小	47.483	50.441	−6.5136
標準偏差	7.4369	7.1854	2.7483

裁断図設計の結果では，割線近似・偏差角無視の場合がもっとも良好な結果となっているが，これは応力-ひずみの近似手法や偏差角の考慮の有無などの条件の違いのためであり，この結果をそのまま比べることはできない。そこで，検証のため得られた裁断図に対し釣合形状解析を行なう。釣合形状解析では 3 例とも，応力-ひずみ関係を (33)，(34) の曲線により評価し，また裁断図から偏差角の正確な値を評価した。

表 2 には釣合形状解析の結果を示す。ここで，形状誤差とは，裁断図設計時の最適釣合形状と釣合形状解析の結果の形状との節点間距離の 2 乗和である。図 13-15 には 3 例での各有限要素の応力の目標値からの偏差量を図示した。それぞれの図で左側が裁断図設計時での応力の偏差，右側が釣合形状解析の結果得られた応力の偏差である。

3 例全てにおいて，形状に関しては設計時の釣合形状をほぼ実現していることがわかる。しかし，応力分布に関しては，割線近似で偏差角を無視した場合と接線近似で偏差角を無視した場合は釣合形状解析の結果が，裁断図設計時の値と著しく異なっている。これに対し，接線近似で偏差角を考慮した場合は，釣合形状解析の応力が裁断図設計の応力と良好な精度で一致しており，また釣合形状解析の応力分布の偏差量も最も小さくなっている。以上より，本手法を適用し膜材料の応力-ひずみ関係の接線近似や偏差角の考慮を行なうことにより，裁断図の精度が向上することが示された。

<u>例題 2 (繊維方向最適化)</u>

例題 1 では裁断図が横糸方向に対称な形状となり，裁断図ごとの最適な膜材料の繊維方向は自明となる。しかし，一般には裁断図は横糸方向に対称な形状とはならず，裁断図設計の際には最適な膜材料の繊維方向を求めるのが望ましい。図 16 のような，平面形状が 800 × 900

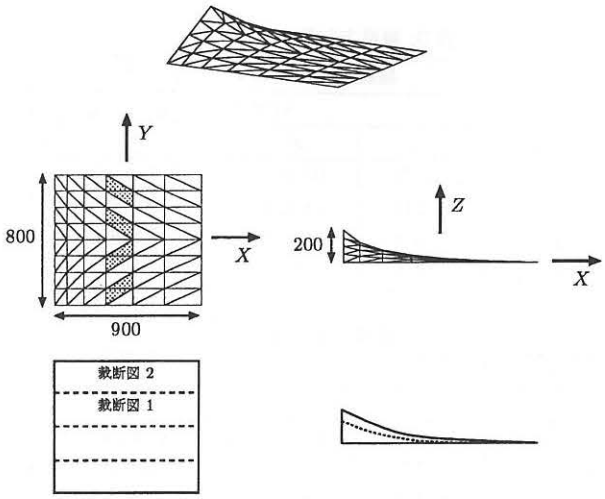

図 16: 骨組膜構造物モデル (タイプ 2)

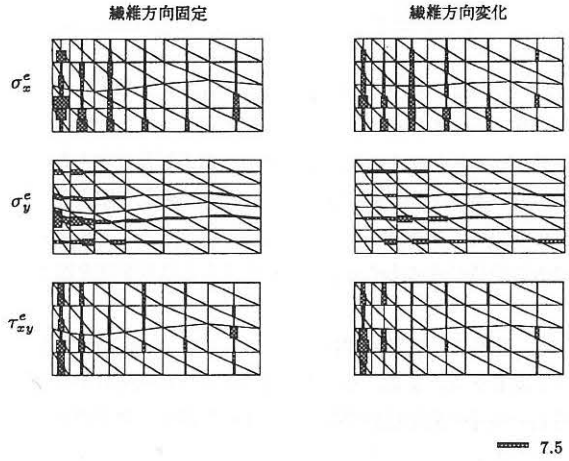

図 17: 応力分布

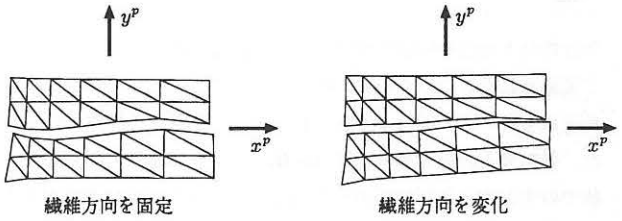

図 18: 裁断図

の長方形で，一辺を高さが 200 の二等辺三角形形状に持ち上げた境界形状を持つ膜構造物を対象モデルとする。この例では裁断図は対称な形状とはならない。

図 16 の網掛を施した要素の局所座標と繊維方向の角を基準偏差角 ϕ_a とする。以下では ϕ_a を 0° で固定とした場合と，設計変数として導入し，裁断図ごとに変化させた場合の 2 つの場合の最適化を行ない結果の比較を行なう。2 例とも応力-ひずみ関係を接線近似し，偏差角を考慮する。また，目標応力は例題 1 と同じとする。例題 1 と同様に対称性を考慮し，$Y \geq 0$ の範囲についてのみ形状最適化を行なう。

表 3 に，2 つの場合の裁断図設計時の応力偏差量と応力の平均，最大，最小値および標準偏差を示す。また，繊維方向を変化させる場合について図 16 の裁断図 1 と裁断図 2 の最適繊維方向の基準となる要素

表 3: 繊維方向最適化の結果

繊維方向を固定			
応力偏差量	8452.23		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	64.179	60.347	2.0878×10^{-1}
最大	92.710	74.325	18.221
最小	42.670	31.363	−15.292
標準偏差	8.9229	6.4724	6.8617

繊維方向を変化			
応力偏差量	5199.59		
応力	σ_x^e	σ_y^e	τ_{xy}^e
平均	63.041	62.862	9.6415×10^{-1}
最大	80.194	69.023	21.831
最小	48.119	51.487	−14.377
標準偏差	7.2952	3.7558	6.2747
繊維方向	裁断図 1	−3.4484°	
	裁断図 2	−1.0527°	

の x^e 軸となす角を、時計周り方向を正として示した。繊維方向を設計変数とした場合の応力分布は，繊維方向を固定とした場合の応力分布に比べ良好なものとなっている。図 17 には，裁断図設計時の各有限要素の応力の，目標値からの偏差量を示す。左側が繊維方向固定の場合，右側が繊維方向変化の場合である。また，図 18 はそれぞれの場合について繊維方向座標が図の (x^p, y^p) と一致するように裁断図を図示したものである。

以上より，繊維方向を設計変数とすることにより，応力分布を改善できることがわかる。また，本手法の適用により裁断図の形状だけでなく膜材料の繊維方向を設計変数としてより合理的に裁断図を設計することができる。

7. 結論

1. 膜材料の 1 軸応力状態での応力-ひずみ関係曲線を目標応力レベルで接線近似することにより，初期釣合い状態におけるひずみを，割線近似を用いるの場合より精度良く予測する手法を提案した。また，張力導入の際の要素の剛体変位の影響を考慮して，釣合い形状での主方向と局所座標の偏差角を算定することが可能であることを示した。これらの定式化に基づき文献 11 の可展条件を拡張し，より精度の良い逆問題型設計法を提案した。
2. 応力分布の偏差量を最小化するような釣合い形状と裁断図形状を求める際に，裁断図ごとに独立に定義できる繊維方向を変数とすることにより，最適な繊維方向も同時に求めることが可能であることを示した。
3. HP 形状の骨組支持膜構造物の最適形状を求め，得られた裁断図形状を用いて釣合い形状解析を行なった結果，1 の接線近似と偏差角算定法を用いた場合には，裁断図設計時の応力偏差量は大きくなるが，実際に釣合い形状解析を行なって得られる応力偏差量は小さくなることを示した。
4. 1 つの対称面を持つ膜構造物に対して繊維方向を最適化した結果，繊維方向を変更することによって応力の偏差量を減少させることが可能であることを示した。

謝辞

本研究の一部は，平成 8 年度能村膜構造技術振興財団の研究助成を受けて実施されたものであり，ここに深く感謝します。また，本研究をまとめるにあたり，貴重な助言をいただいた上谷 宏二博士 (京都大学教授) ならびに坪田 張二博士 (鹿島建設) に謝意を表します。

参考文献

[1] 石井一夫，膜構造の形状解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造 I, pp. 2599-2600, 1984.

[2] 大森博司，原型曲面の形態解析，構造形態の解析と創生，日本建築学会応用力学運営委員会，構造形態の解析と創生小委員会，pp. 43-87, 1995.

[3] 鈴木俊男，半谷裕彦，極小曲面の変数低減による有限要素解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 425, pp. 111-120, 1991.

[4] M. Hinata, M. Shimasaki and T. Kiyono, Numerical solution of Plateu's problem by a finite element method, Math. Comp., Vol. 28, pp. 45-60, 1974.

[5] M.R. Barnes, Form-finding and analysis of prestresses nets and membranes, Comp. & Struct., Vol. 30, pp. 685-695, 1988.

[6] 石井一夫，曲面の平面への近似展開，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造 I, pp. 783-784, 1972.

[7] J.L. Meek and K.Y. Tan, Post-formfinding determination of geodesic lines in cutting pattern design for membrane structures, Space Struct., Vol. 2, pp. 231-239, 1986.

[8] 安宅信行，小塚裕一，膜構造における膜曲面の測地線の決定法について，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造 I，pp. 2603-2604, 1984.

[9] 坪田張二，吉田 新，最適化手法を用いた膜構造物の裁断図解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 395, pp. 101-111, 1989.

[10] 坪田張二，吉田 新，黒川泰嗣，裁断図をもとにした膜構造物の実初期つり合い状態の解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 373, pp. 101-110, 1987.

[11] 大崎 純，上谷宏二，高谷真次，逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法，日本建築学会構造系論文集，488 号，pp. 107-115, 1996.

[12] 八木孝憲，萩原伸幸，大森博司，松井徹哉，膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究，日本建築学会構造系論文集，508 号，pp. 71-78, 1998.

[13] 八木孝憲，大森博司，膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究，膜構造研究論文集, No. 11, pp. 39-46, 1997.

[14] 日野吉彦，石井一夫，膜構造解析における材料非線形性の評価，膜構造研究論文集, No. 8, pp. 35-49, 1994.

[15] 南 宏和，山本千秋，瀬川信哉，河野義裕，多段線形近似による膜の材料非線形解析のための弾性パラメタ算定法，膜構造研究論文集, No. 10, pp. 45-51, 1996.

[16] 西川 薫，石井一夫，小竹達也，織布特性を考慮した膜構造の応力・変形解析法，膜構造研究論文集, No. 3, pp. 41-55, 1989.

[17] 加藤史郎，P. Pongpo, 材料非線形性を考慮した膜材料の構成方程式の定式化，–織構造格子モデル–，膜構造研究論文集, No. 7, pp. 11-21, 1993.

[18] 加藤史郎，P. Pongpo, 材料非線形性を考慮した膜構造解析，–織構造格子モデルによる構成方程式の適用–，膜構造研究論文集, No. 8, pp. 27-33, 1994.

[19] 加藤史郎，吉野達矢，膜の材料非線形性を考慮した応力・変形解析，–構成則に直交異方性弾性体と織構造格子モデルを用いた場合の比較–，膜構造研究論文集, No. 10, pp. 17-28, 1996.

[20] 加藤史郎，P. Pongpo, 武田文義，吉野達矢，松本恵美，Schock モデルに基づいて膜材料の構成方程式を誘導する方法について，–連続体としての増分型構成式の提案–，膜構造研究論文集, No. 8, pp. 27-33, 1994.

[21] O. C. Zienkiewicz, マトリックス有限要素法，培風館，1984.

Shape and stress optimization of membrane structures considering material nonlinearity

Makoto Ohsaki*1
Jun Fujiwara*2

SYNOPSIS

An inverse formulation is presented for simultaneously finding optimal cutting patterns and the optimal initial stresses of a frame-supported membrane structure, where explicit developability conditions are incorporated for a curved surface to be reduced to a set of plane cutting patterns after removing the initial stresses. The membrane is modeled as an orthotropic material, and the rigid body rotation of the principal axes is considered in the developability condition, although the effect of shear deformation on the directions of the principal axes is neglected. Nonlinear polynomial functions are used for the stress-strain relations in the principal axes. The membrane is discretized by using the finite element method, where the triangular unit with constant strains is used.

In the first stage of the proposed method, an inverse problem is formulated to directly find prestresses as well as the cutting patterns for specified nodal coordinates so as to minimize the variation of stresses at the initial shape from the desired values. Then the distribution of the stresses is further improved by considering the nodal locations as the design variables. Optimal orientations of principal axes is also found for each cutting sheet.

In the examples, the optimal shape, initial stresses and cutting patterns are found simultaneously for an HP-type membrane structure supported by a frame. The optimal locations of the internal nodes are found by using the sequential quadratic programming method. It is confirmed by carrying out nonlinear shape analysis that accurate optimal solutions are found by incorporating material nonlinearity in the developability conditions. It is also shown that the distribution of initial stresses is slightly improved by varying the directions of the principal axes of the cutting sheets.

---

*1 Associate Professor, Kyoto University
*2 Graduate Student, Kyoto University