

# トラス要素四辺形モデルによるエアチューブ式アーチの 極限状態解析

河端昌也\*

## 梗概

膜構造の解析でリンクリングを取り扱う場合に、三角形や四辺形の膜要素ではリンクリング発生後の解の収束が極端に悪くなり、問題によっては解が得られないことがある。これに対してトラス要素モデルを用いた FEM 解析は、収束性が極めて良く、上記のような場合にも有意な解が得られることが多い。トラス要素モデルによる FEM 解析は、膜構造解析において収束解が得にくいような問題において、その定性的傾向の把握を目的とするような場合には有効な手法といえる。本報では、直交異方性弾性体の剛性をトラス要素四辺形モデルの部材剛性に置換するための算定式を示し、解析例として、エアチューブ式アーチが外力を受けて大きく変形し、局部的にリンクリングを生じながらも荷重負担能力を保持しているような極限状態の解析を示す。

### 1.はじめに

現在、膜構造建築物に用いられる材料は、恒久建築用としてはガラス繊維織布を四ふっ化エチレン樹脂コーティングした膜材料 A 種、仮設建築物としてはポリエステル繊維織布を塩化ビニル樹脂コーティングした膜材料 C 種が主に用いられている。

膜材料 C 種は比較的弾性体に近い挙動を示すが、膜材料 A 種は、2 軸引張試験における荷重-ひずみ関係が、作用する 2 軸の応力の比に大きく依存することが石井<sup>1)</sup>、西川<sup>2)</sup>らの研究で確認されている。近年、膜材料の非線形性を対象とした研究が盛んに行われており、南ら<sup>3)</sup>や、日野ら<sup>5)</sup>の研究では多段階線形近似を用いて非線形性を考慮した FEM 解析を行っている。さらに加藤ら<sup>6)7)8)</sup>の研究では、初期ゆるみやコーティング樹脂による粘弾性など膜材料特有の非線形性を厳密に表現しうる織構造格子モデルを定式化し、これと直交異方性弾性体モデルによる解析との比較を行っている。今後、材料非線形性を考慮した解析が実務レベルでも一般化していくと予想されるが、現状では縦糸方向と横糸方向の引張剛性およびポアソン比と、せん断剛性によって弾性定数を設定し、膜材料を直交異方性弾性体として扱う構造解析も数多く行われている。

三角形や四辺形の膜要素による解析では、膜材料の局部的なしわ波座屈現象であるリンクリング現象を取り扱う場合に、リンクリング発生後の解の収束が極端に悪くなり、問題によっては解が得られないことがある。

本報で取上げるトラス要素 (2 次元) モデルは、これまでは計算時間の短縮を主な目的として用いられたもので、近年のコンピュータの飛躍的な性能向上と、低価格化によって、大規模かつ複雑なモデルの FEM 解析が容易になったため現在ではその意義は薄れている。また任意形状への適用が困難であることや、連続体をトラス要素に離散化することにより剛性評価や応力評価に誤差が生じるといふ問題もある。しかし、トラス要素モデルを用いた FEM 解析は、収束性が極めて良く、前述のような解の収束が困難な問題でも有意な解が得られることが多い。エアチューブ構造は外力によって大きく変形し、局部的にリンクリングを生じた場合にも荷重負担能力を保持しており<sup>9)</sup>、荷重が除荷されると原状を回復することが可能である。このような極限状態の解析では、解が収束しない数値解析上の不安定現象と、構造的崩壊とは適切に峻別される必要がある。

このような観点から、トラス要素モデルによる FEM 解析は、収束解が得にくいような状況の膜構造解析において、その定性的傾向の把握を目的とするような場合には有効な手法と思われる。とりわけ、エアチューブ構造は通常、弾性体に近い挙動を示す膜材料 C 種が用いられることが多く、筒型の形状はトラス要素四辺形によるモデル化に有利である。

直交異方性弾性体からトラス要素モデルへの置換に関して小竹<sup>10)</sup>は、剛性マトリクスの比較による方法を示している。長方形の膜材料を線材要素置換する場合には、縦、横の糸方向に平行な部材 (長

\* 横浜国立大学建設学科 助手・工修

方形の4辺)と、ブレース材(対角線)に置換される。ブレース材の剛性評価に関する研究例としては、耐震壁のせん断剛性をブレース材に置換する方法<sup>11)</sup>が挙げられる。しかし同法は、剛床と柱で囲まれた長方形耐震壁の水平せん断変形(単純せん断)を仮定したもので、縦横の比が逆転した場合にはブレース材のせん断剛性評価が異なる結果となる。したがって、せん断変形のモードが単純せん断とはならない膜材料の線材置換には適していない。著者の調べた範囲では、膜材料の等価剛性線材置換時のブレース材剛性評価に適合する研究例は見当たらなかった。

### 1.1. 膜材料の材料定数の評価と試験方法

膜材料の材料定数の算定方法は、(社)日本膜構造協会による試験法標準<sup>12)13)</sup>に示されており、日本国内の膜構造建築物において一般的に用いられている。

ここで「膜材料面内剪断剛性試験方法」の概要を説明する。図1に示すような16cm×16cm以上の正方形型枠に初期張力導入状態の膜材料を固定し対角方向の加力を行う、フレーム法による面内せん断変形試験法を採用している。面内せん断剛性の算出は、3以上の試験片に対して、正負繰返し载荷を3サイクル行い、第2, 3サイクル目の平均的な荷重-変位曲線から次の

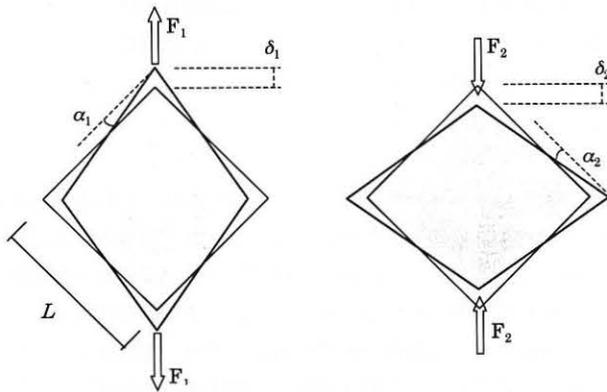


図1 面内せん断試験法

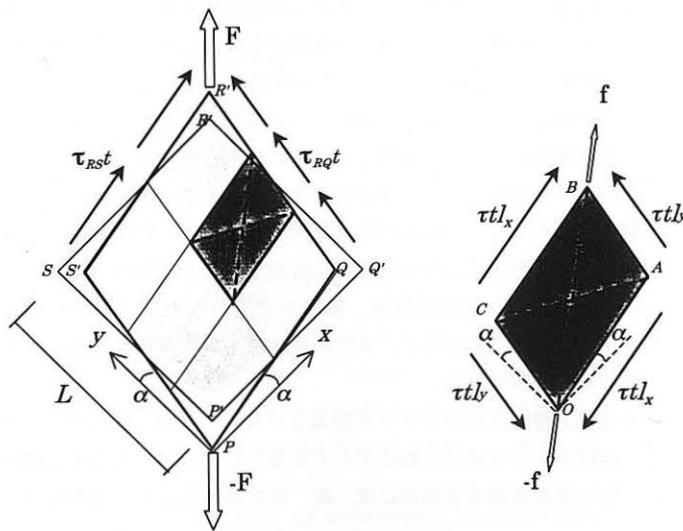


図2 面内せん断変形試験片と部分要素

$$Gt = \frac{(\tau_{xy1} + \tau_{xy2})l}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{F_1 + F_2}{2\sqrt{2}L(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (1)$$

ただし、 $L$ : 面内せん断変形試験の試験面一辺の長さ

$F$ : 面内せん断変形試験機の対角方向に加えた荷重

$\gamma_1$ : 荷重  $F_1$  に対応するせん断変形角( $=2\alpha_1$ )

$\gamma_2$ : 荷重  $F_2$  に対応するせん断変形角( $=2\alpha_2$ )

よって各試験片の単位幅当りの面内せん断剛性値を求め、それらの平均値を膜材料の単位幅当り面内せん断剛性としている。

### 1.2. 直交異方性弾性体からトラスへの置換

本節では、前節の試験法および材料定数評価法により求められた材料剛性を、トラス要素モデルで表現するための、剛性置換方法を検討する。

いま、図2に示すような辺長  $L$  の正方形の面内せん断試験片 PQRS に、対角方向の荷重  $F$  が作用し  $\gamma = 2\alpha$  のせん断変形が生じたとする。また辺長  $l_x, l_y$  ( $L = n_x l_x = n_y l_y$ ) の関係にある長方形 OACB を試験片の部分要素として考える。部分要素 OACB には、対角方向に荷重  $f$  が作用しているものとする。

試験片の対角方向の荷重  $F$  と変形角  $\alpha$  の関係は、

$$\begin{aligned} F &= (\tau_{RS} t + \tau_{RQ} t)L \\ &= \tau \begin{Bmatrix} n_x l_x \cos \alpha + n_y l_y \sin \alpha \\ n_x l_x \sin \alpha + n_y l_y \cos \alpha \end{Bmatrix} \\ &= \tau L \begin{Bmatrix} \cos \alpha + \sin \alpha \\ \cos \alpha + \sin \alpha \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

で表わされる。ただし  $\tau$  はせん断応力、 $t$  は膜厚を表す。同様に、部分要素に作用する荷重  $f$  と変形角  $\alpha$  の関係は、

$$f = \tau \begin{Bmatrix} l_x \cos \alpha + l_y \sin \alpha \\ l_x \sin \alpha + l_y \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (3)$$

で表される。ここで、 $\alpha$  は微小として近似を行うと式(2)、(3)より、

$$\begin{aligned} |F| &= \tau L \sqrt{2(1 + \sin 2\alpha)} \\ &= \tau L \sqrt{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |f| &= \tau \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + 2l_x l_y \sin 2\alpha} \\ &= \tau \frac{l_x^2 + l_y^2 + \frac{\gamma}{2} l_x l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。したがって式(4)、(5)より

$$\begin{aligned} |f| &= \frac{l_x^2 + l_y^2 + \frac{\gamma}{2} l_x l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \frac{|F|}{\sqrt{2}L \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)} \\ &= \frac{l_x^2 + l_y^2}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \frac{|F|}{\sqrt{2}L} \\ &= \frac{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}{\sqrt{2}L} |F| \end{aligned} \quad (6)$$

の関係が導かれる。 $\pi=Gt\gamma$ とおくと、式(4)より、

$$|F| = Gt\sqrt{2}L\gamma \quad (7)$$

であるから、式(6)、(7)より、

$$Gt = \frac{|f|}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \frac{1}{\gamma} \quad (8)$$

となる。

次に、図3に示すような長方形OABCの異方性弾性体素片を、 $x$ 軸方向の部材OAおよびCB、 $y$ 軸方向の部材OCおよびAB、ブレース材OBおよびACで構成されるトラス要素モデルへ置換することを考える。長方形OABCに外力 $f$ が作用して、せん断変位 $\gamma=\alpha+\beta$ が生じ、平行四辺形OAB'C'に変形したとする。

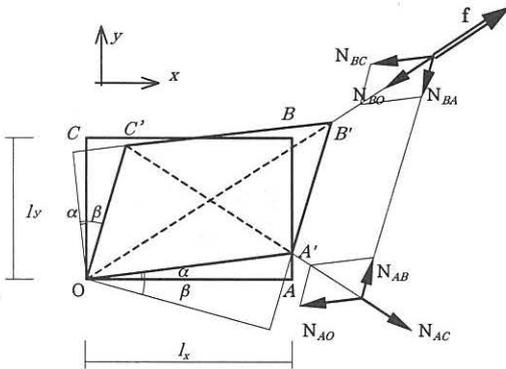


図3 部分要素の面内せん断変形

いま、部材OA、CB、OC、ABを剛体と仮定すると、ブレース材OBおよびACのひずみは、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{OB} &= (|\overline{OB'}| - |\overline{OB}|) / |\overline{OB}| \\ &= \sqrt{(l_x \cos \alpha + l_y \sin \beta)^2 + (l_x \sin \alpha + l_y \cos \beta)^2} / \sqrt{l_x^2 + l_y^2} - 1 \\ &= \{(l_x^2 + l_y^2 + 2l_x l_y \sin(\alpha - \beta))^{1/2} / (l_x^2 + l_y^2)^{1/2} - 1 \\ &= \{(l_x^2 + l_y^2)^{1/2} + (\alpha - \beta)l_x l_y (l_x^2 + l_y^2)^{-1/2}\} / (l_x^2 + l_y^2)^{1/2} - 1 \\ &= (\alpha - \beta)l_x l_y (l_x^2 + l_y^2)^{-1} \\ \varepsilon_{AC} &= (|\overline{A'C'}| - |\overline{AC}|) / |\overline{AC}| \\ &= -(\alpha - \beta)l_x l_y (l_x^2 + l_y^2)^{-1} \\ \varepsilon_{OB} = -\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{xy} &= \frac{(\alpha - \beta)l_x l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

で表される。変形後の点A'およびB'におけるつりあいより、

$$\begin{aligned} N_{AB} + N_{AC} + N_{AO} &= 0 \\ N_{BO} + N_{BA} + N_{BC} &= f \end{aligned} \quad (10)$$

が成立する。幾何学的条件より、 $N_{AB} = -N_{BA}$ 、 $N_{AO} = N_{BC}$ となることは明らかである。

$\alpha, \beta$ は微小として、 $l_x^2 + l_y^2 = C_1$ 、 $l_y = C_2$ 、 $\sin \alpha = \alpha$ 、 $\sin \beta = \beta$ 、 $\cos \alpha = \cos \beta = 1$ とおくと、 $\gamma = \alpha - \beta$ の関係は、

$$\frac{l_x \sin \alpha + l_y \cos \beta}{l_x \cos \alpha - l_y \sin \beta} = \frac{l_y}{l_x}$$

$$\begin{aligned} \frac{l_x \alpha + l_y}{l_x - l_y \beta} &= \frac{l_y}{l_x} \\ \therefore \gamma = \alpha - \beta &= \frac{C_1}{l_y^2} \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

で表される。また、

$$\begin{aligned} N_{AC} &= -\frac{EA_{xy}\varepsilon_{xy}}{|A'C'|} \begin{Bmatrix} -l_x \cos \alpha - l_y \sin \beta \\ -l_x \sin \alpha + l_y \cos \beta \end{Bmatrix} \\ &= \frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 - C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} \begin{Bmatrix} l_x + l_y \beta \\ l_x \alpha - l_y \end{Bmatrix} \\ N_{BO} &= \frac{EA_{xy}\varepsilon_{xy}}{|B'O|} \begin{Bmatrix} l_x \cos \alpha - l_y \sin \beta \\ l_x \sin \alpha + l_y \cos \beta \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 + C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} \begin{Bmatrix} l_x - l_y \beta \\ l_x \alpha + l_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

であるから、前述のつりあい条件式は

$$\begin{aligned} \frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 - C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} \begin{Bmatrix} l_x + l_y \beta \\ l_x \alpha - l_y \end{Bmatrix} + N_{AC} \begin{Bmatrix} \beta \\ -1 \end{Bmatrix} + N_{CB} \begin{Bmatrix} -1 \\ -\alpha \end{Bmatrix} &= 0 \\ -\frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 + C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} \begin{Bmatrix} l_x - l_y \beta \\ l_x \alpha + l_y \end{Bmatrix} - N_{AC} \begin{Bmatrix} \beta \\ -1 \end{Bmatrix} + N_{CB} \begin{Bmatrix} -1 \\ -\alpha \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_x \\ F_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

で表される。これらより、

$$\begin{aligned} N_{AC} &= \frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 - C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} l_y \\ N_{AO} &= \frac{C_2 \alpha}{(l_y^2 + C_2 \alpha) C_1^{1/2}} EA_{xy} l_x \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{|f|}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \begin{Bmatrix} l_x - l_y \beta \\ l_x \alpha + l_y \end{Bmatrix}$$

$$\text{ただし、} \frac{|f|}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} = \frac{2l_y^2}{l_y^4 - \alpha^2 C_2^2} \frac{C_2 \alpha}{C_1^{1/2}} EA_{xy}$$

となる。

したがって等価な面内せん断剛性を与えるブレース材剛性は、式(8)、(11)および式(14)より、

$$EA_{xy} = \frac{l_y^2 - \alpha^2 l_x^2}{2l_x \sin^3 \theta} Gt \quad (15)$$

で求められる。さらに、 $\alpha$ は微小であるとして高次の項を省略すると、ブレース材剛性は最終的に、

$$EA_{xy} = \frac{l_y^2}{2l_x \sin^3 \theta} Gt \quad (16)$$

によって求められる。

### 1.3. 糸方向の剛性評価とポアソン効果

次に、 $x, y$ 方向部材の剛性を求める。図4のように初期応力状態にある部分要素OABCが、 $x, y$ 軸方向の外力の作用によってOAB'C'に変形したとする。各部材の無ひずみ時、初期応力時、増分時のひずみや応力などは表1のように表示する。

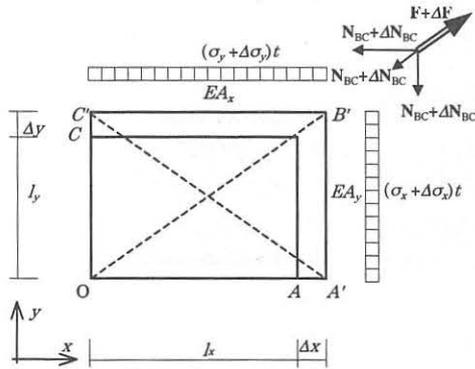


図4 部分要素の2軸引張による変形

表1 各部材のひずみと応力

部材	無ひずみ時 の部材長	部材ひずみ		部材応力	
		(初期)	(増分時)	(初期)	(増分時)
BC	$l_x^0$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_x$	$N_{BC}$	$N_{BC} + \Delta N_{BC}$
BA	$l_y^0$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_y + \Delta\varepsilon_y$	$N_{BA}$	$N_{BA} + \Delta N_{BA}$
BO	$l_{xy}^0$	$\varepsilon_{xy}$	$\varepsilon_{xy} + \Delta\varepsilon_{xy}$	$N_{BO}$	$N_{BO} + \Delta N_{BO}$

各部材のひずみは近似を用いて次式で定義する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \Delta\varepsilon_x &= \frac{l_x + \Delta x - l_x^0}{l_x^0} \\ \varepsilon_y + \Delta\varepsilon_y &= \frac{l_y + \Delta y - l_y^0}{l_y^0} \\ \varepsilon_{xy} + \Delta\varepsilon_{xy} &= \frac{\sqrt{(l_x + \Delta x)^2 + (l_y + \Delta y)^2} - l_{xy}^0}{l_{xy}^0} \\ &= \frac{(l_x + \Delta x) \cos \theta + (l_y + \Delta y) \sin \theta}{l_{xy}^0} - 1 \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $\theta = \tan^{-1}(l_y^0/l_x^0)$

節点 B に作用する外力を、初期応力時  $F=(F_x, F_y)$ 、増分時  $F+\Delta F=(F_x+\Delta F_x, F_y+\Delta F_y)$  で表すと、力のつりあいより、

$$\begin{aligned} F + N_{BC} + N_{BA} + N_{BO} &= 0 \\ F + \Delta F + N_{BC} + \Delta N_{BC} + N_{BA} + \Delta N_{BA} + N_{BO} + \Delta N_{BO} &= 0 \\ \therefore \Delta F + \Delta N_{BC} + \Delta N_{BA} + \Delta N_{BO} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

の関係が成立している。応力・ひずみ関係は、

$$\begin{aligned} \Delta N_{BC} &= \Delta\varepsilon_x(N_{BC} + EA_x) \\ \Delta N_{BA} &= \Delta\varepsilon_y(N_{BA} + EA_y) \\ \Delta N_{BO} &= \Delta\varepsilon_{xy}(N_{BO} + EA_{xy}) \end{aligned} \quad (19)$$

で表される。また外力と部分要素応力の関係は、

$$\begin{Bmatrix} F_x + \Delta F_x \\ F_y + \Delta F_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\sigma_x t + \Delta\sigma_x t) l_y^0 \\ (\sigma_y t + \Delta\sigma_y t) l_x^0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

で表される。式(18)~(20)より、増分応力と増分ひずみの関係は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x t \\ \Delta\sigma_y t \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ただし、

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{2EA_x}{l_y^0} + \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \frac{l_x^0}{l_y^0} \times & \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \left( -\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta + \frac{l_y}{l_{xy}^0} \sin \theta \right) \\ \left( \varepsilon_{xy} \sin^2 \theta + \frac{l_x}{l_{xy}^0} \cos \theta \right) & \frac{2EA_y}{l_x^0} + \\ \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \times & \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \frac{l_y^0}{l_x^0} \left( \varepsilon_{xy} \cos^2 \theta + \frac{l_y}{l_{xy}^0} \sin \theta \right) \\ \left( -\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta + \frac{l_y}{l_{xy}^0} \cos \theta \right) & \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \frac{l_y^0}{l_x^0} \left( \varepsilon_{xy} \cos^2 \theta + \frac{l_y}{l_{xy}^0} \sin \theta \right) \end{bmatrix}$$

となる。式(21)において  $\varepsilon_{xy}=0$ ,  $l_x=l_x^0$ ,  $l_y=l_y^0$ ,  $l_{xy}=l_{xy}^0$  とおくと、無ひずみ状態の部分要素における応力・ひずみ関係は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x t \\ \Delta\sigma_y t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EA_x}{l_y^0} + \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \cos^3 \theta & \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \sin \theta \cos \theta & \frac{2EA_y}{l_x^0} + \frac{2EA_{xy}}{l_{xy}^0} \sin^3 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

となる。これが、直交異方性弾性体の応力・ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x t \\ \Delta\sigma_y t \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_x t & \nu_x E_y t \\ \nu_y E_x t & E_y t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

と等価になるとする。トラス要素モデルでは、変形後の部材張力のつりあい関係によって見かけのポアソン効果が生じる。これを見かけのポアソン比とすると、式(22)、(23)より、

$$\begin{aligned} \nu_x &= \frac{EA_{xy} \sin \theta \cos^2 \theta}{EA_y + EA_{xy} \sin^3 \theta} \\ \nu_y &= \frac{EA_{xy} \sin^2 \theta \cos \theta}{EA_x + EA_{xy} \cos^3 \theta} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。式(24)においてブレース材剛性  $EA_{xy}$  が  $EA_x$ ,  $EA_y$  に比べて小さい場合には見かけのポアソン効果は十分に小さくなるので、式(23)のポアソン比を含む項を省略することができる。したがって式(16)、(23)、(24)から、 $x, y$  軸方向の部材剛性は

$$\begin{aligned} EA_x &= \frac{l_y}{2} \left( E_1 t - \frac{Gt}{\tan^2 \theta} \right) \\ EA_y &= \frac{l_x}{2} \left( E_2 t - Gt \tan^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (25)$$

によって求められる。

#### 1.4. 解析例

本節では、トラス要素モデルによる FEM 解析例として、エアチューブ式アーチの解析結果を示し、実験(写真1)との比較を行う。対象構造物は図5に示すようなエアチューブによる円弧アーチである。試験体は膜材料C種で製作された円筒が母線方向に15個、溶着接合されたもので、個々の円筒は対称性を持つために両側面が溶着されている。形状および材料諸元は表2のとおりである。荷重はアーチの中央に取り付けられた25cm幅の織布を介して与え、荷重方向は面内と面外の2ケースとした。変位の測定は図5に示す3ヶ所で行い、内圧は設定内圧で常時制御した。

表 2 試験体形状と材料諸元

対象構造物：エアチューブ方式円弧アーチ
スパン $L=2.433\text{m}$ 、 アーチ曲率半径 $R=1.267\text{m}$ 、 チューブ径 $r=0.06\text{m}$ 、 曲率の中心に対する半開角 $\phi=0.41\pi$ 、 内圧 $p_i=3000\text{kgf/m}^2$
膜材料弾性定数（母線方向を $x$ 、周方向を $y$ とする）
$E_{t_x}=14800\text{kgf/m}$ 、 $\nu_x=0.75$ 、 $Gt=500\text{kgf/m}$ $E_{t_y}=15800\text{kgf/m}$ 、 $\nu_y=0.80$
境界条件：端部固定
荷重条件：面内方向、面外方向集中荷重（载荷ベルト幅 $0.25\text{m}$ ）

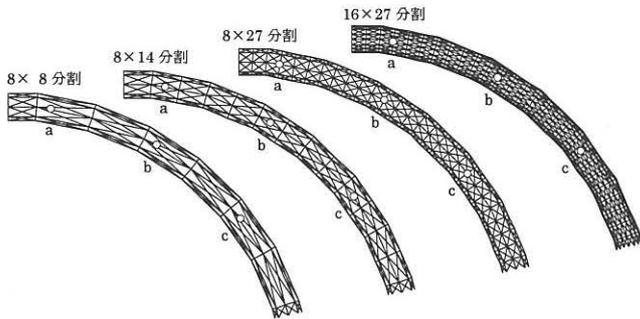


図 5 エアチューブ式アーチ解析モデル

表 3 解析モデル部分要素の形状と剛性

	$l_y/l_x$	$l_x$	$l_y$	$EA_x$	$EA_y$	$EA_{xy}$
8×8	0.1881	0.2442	0.0459	30.39	3853.94	342.00
8×14	0.3757	0.1222	0.0459	516.95	1922.75	99.16
8×27	0.7511	0.0611	0.0459	638.95	948.72	39.81
16×27	0.3829	0.0611	0.0234	266.65	961.49	49.01

ただし  $l_x$  は母線方向長さ、 $l_y$  は周方向長さをあらわす

表 4 部分要素の剛性

	$E_{t_x}$	$E_{t_y}$	$\nu_x$	$\nu_y$	$Gt$
8×8	13978.38	15335.03	0.07	0.07	499.49
	-6%	-3%	-10%	-7%	-0.1%
8×14	13920.73	15192.00	0.08	0.09	501.17
	-6%	-4%	4%	7%	0.2%
8×27	14838.25	15776.20	0.04	0.04	499.48
	0%	0%	-51%	-51%	-0.1%
16×27	15508.53	15996.29	-0.06	-0.06	502.65
	5%	1%	-174%	-172%	0.5%

解析は対称性を考慮して図 5 のように全体の 1/2 部分をモデル化し、周方向と母線方向の要素分割の違いによって 8×8、8×14、8×27、16×27 分割の 4 種類のモデルを設定した。これらのモデルの部分要素は母線方向長さが異なる等脚台形となるため、前節の長方形を前提に求めた式によって部材剛性を算定すると誤差が生じる。この誤差は部分要素の形状が長方形から離れるにしたがって大きくなるが、ここに示したアーチの場合には各部分要素が比較的長方形に近いので、その誤差はあまり大きくないと仮定して、各モデルの部分要素の剛性は表 3 の値とした。なおアーチ中央部および端部の母線方向幅が異なる部分要素については、その長さに応じた値を設定した。これらの部分要素に対して、2 軸引張試験をシミュレーションした解析から最小二乗法を用いて引張剛性とポアソン比を求め、

またフレーム法による面内せん断変形試験をシミュレートした解析からせん断剛性を求めた結果が表 4 である。糸方向の引張剛性とせん断剛性はいずれも良く近似できている。一方、ポアソン比は誤差が大きく、ポアソン効果をトラス要素によって表現することは困難であるといえる。ポアソン比の値が一部マイナスとなっているのは最小二乗法の近似誤差によって生じたものである。

試験体では、母線方向の両側面に 25mm 幅の溶着部があり、これが剛性に与える影響は無視することができない。解析モデルでは、母線方向の溶着部の引張剛性を母材の 2 倍と仮定してもモデル化を行った。なお、周方向の溶着部は、母材の幅に比べて小さいので剛性に与える影響は小さいものと仮定して、モデル化では考慮していない。

エアチューブのリンクリング現象への対応は、母線方向および周方向の部材長が無張力長さ以下となり計算過程で圧縮応力が発生した場合には張力を強制的に 0 にして応力の再配分を行い、部材長が再び無張力長さ以上になった場合には応力を回復させた。一方、ブレース材の応力の扱いでは、圧縮応力を強制的に 0 にする方法と、圧縮応力を許容する方法の 2 通りを比較したところ、後者の方法が実験によく一致する結果となった。

アーチが面内方向荷重を受けたときの荷重と鉛直変位の関係を図 6 に、母線方向部材のリンクリング発生範囲を図 7 に示す。なおアーチ周方向の位置を示す  $\theta$  は内側を  $-0.5\pi$ 、外側を  $0.5\pi$  とし、母線方向位の位置を示す  $\phi$  は中央を 0、端部を  $0.41\pi$  としている。

解析では、荷重が 6kgf に達するとアーチ中央部と端部の内側、8kgf に達するとアーチ中間部の外側にリンクリングが発生し始め、荷重とともにその範囲が拡大する結果となった。これらの荷重付近で荷重-変位関係の勾配が変化していることから、リンクリング発生が剛性の低下に直接影響していることが明らかである。これらの傾向は実験とよく一致した結果になっている。

次に、アーチが面外方向荷重を受けたときの荷重と水平変位の関係を図 8 に、母線方向部材のリンクリング発生範囲を図 9 に示す。荷重が 2.5kgf に達すると、アーチ端部圧縮側 ( $-0.5\pi < \theta < 0.5\pi$ ) のやや外寄り、3.5kgf に達するとアーチ中央部外側にリンクリングが発生し始め、4.0kgf に達すると端部のリンクリング範囲がチューブ周方向のほぼ半分に広がり、剛性が顕著に低下している。これらの傾向は実験とよく一致した結果になっている。

面内方向、面外方向荷重の両ケースとも、リンクリング発生範囲が周方向の約半分に広がった状態が限界となっている。

解析モデルの要素分割の違いによる影響は、初期剛性評価の段階ではほとんど差がないが、リンクリング発生後の剛性低下傾向に差が現れている。母線方向については、分割を細かくするにしたがって実験により近付く傾向となっており、精度が向上するといえるが、周方向については、8×27 分割モデルの方が 16×27 分割モデルよりも実験に近い傾向となっていることから、必ずしも精度の向上に寄与していないといえる。リンクリング発生後の傾向は部分要素の形状  $l_y/l_x$  に対する依存性が見られ、8×27 分割モデルが実験に最も良く一致した傾向を示している。実験では、リンクリング発生後の剛性低下が顕著な領域では、深いしわが発生し残留変形への影響が懸念されたため载荷を中止したが、解析ではこれらの領域でも収束解が安定的に得られた。

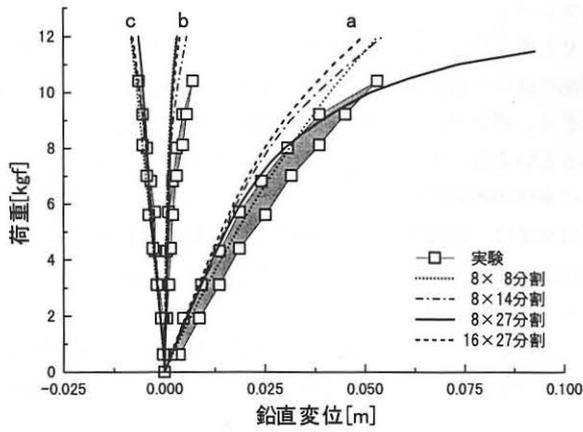


図 6 アーチ面内方向荷重と鉛直変位の関係

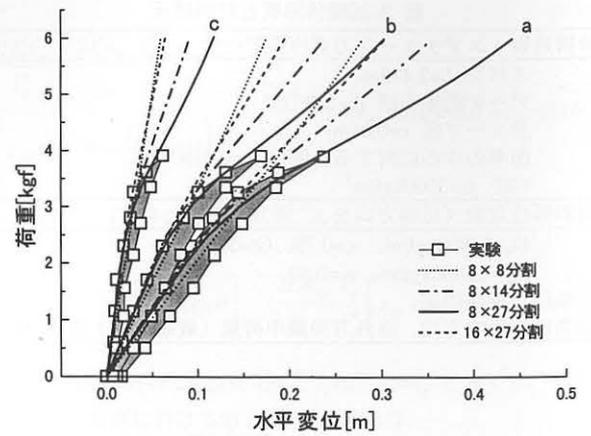


図 8 アーチ面外方向荷重と水平変位の関係

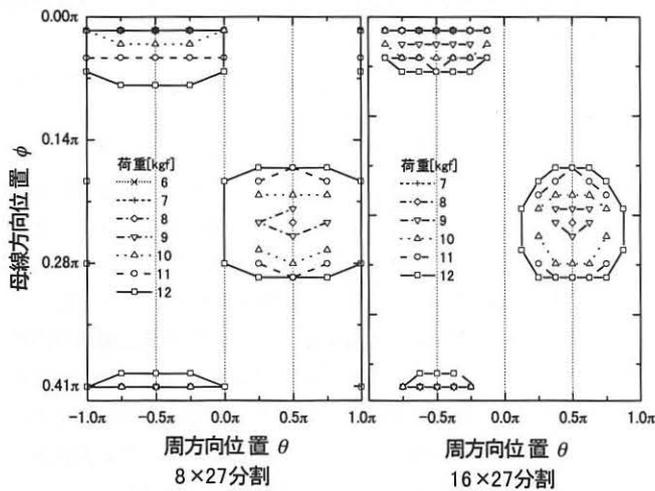


図 7 アーチ面内方向荷重によるリンクリング発生範囲

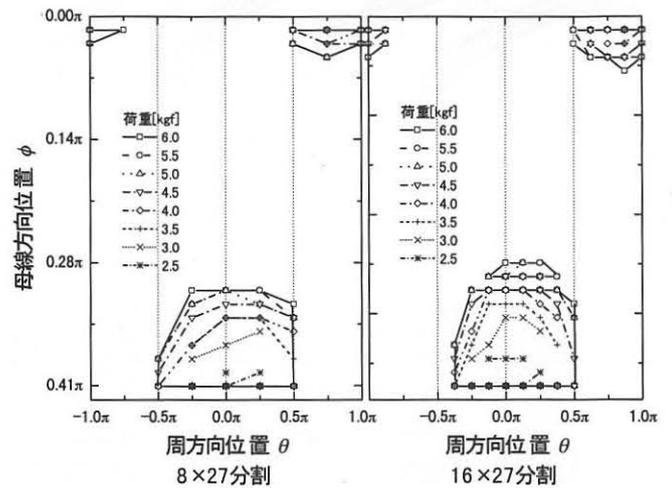


図 9 アーチ面外方向荷重によるリンクリング発生範囲

### 1.5.まとめ

長方形の直交異方性弾性体要素のせん断剛性と引張剛性を近似のトラス要素モデルに置換するための剛性評価式を陽な形式で示した。トラス要素モデルによる FEM 解析は解の収束性が良いため、エアチューブ式アーチの円周の半分にリンクリングが生じている限界状態のように、一般の膜要素解析では有意な解が得にくい問題への適用性に優れている。

トラス要素モデルは、ポアソン比を設定できないことや、任意形状への適用性に問題がある。これらの問題の解決と本モデルの収束性の良さを両立させるには、糸方向の剛性を表現する線材とせん断剛性およびポアソン比を表現する膜要素の組み合わせが効果的と思われる。

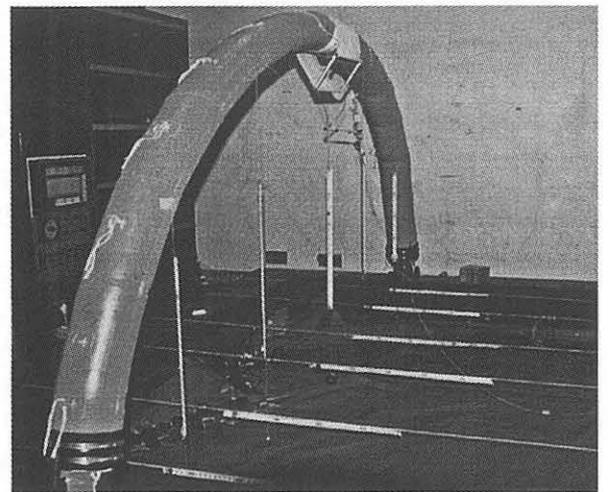


写真 1 エアチューブ式アーチ実験

エアチューブ式アーチの実験は、大成建設(株)技術本部、太陽工業(株)、横浜国立大学石井研究室の共同で行われたものである。

## 参考文献

- [1] 石井一夫, 膜構造用材料概説, 膜構造研究論文集'92, (社)日本膜構造協会, pp.91~119, 1992
- [2] 西川薫, 石井一夫, 小竹達也, 織布特性を考慮した膜構造の応力・変形解析法, 膜構造研究論文集'89, (社)日本膜構造協会, pp.41~55, 1989
- [3] 南宏和, PTFE コーティング・ガラス繊維布(膜材料 A 種)の非線形伸張曲線への多段階線形近似とその応用, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 436 号, pp.13~19, 1992 年 6 月
- [4] 南宏和, 山本千秋, 瀬川信哉, 河野義裕, 多段階線形近似による膜の材料非線形解析のための弾性パラメータ算定法, 膜構造研究論文集'96, (社)日本膜構造協会, pp.45~51, 1996
- [5] 日野吉彦, 石井一夫, 膜構造解析における材料非線形性の評価, 膜構造研究論文集'94, (社)日本膜構造協会, pp.35~49, 1994
- [6] 加藤史郎, 吉野達矢, 武田文義, 小野智子, 織構造格子モデルの構成則の検証—日本膜構造協会の新試験法による実験結果との比較—, 膜構造研究論文集'96, (社)日本膜構造協会, pp.1~16, 1996
- [7] 加藤史郎, 吉野達矢, 膜の材料非線形性を考慮した応力・変形解析—構成則に直交異方性弾性体と織構造格子モデルを用いた場合の比較—, 膜構造研究論文集'96, (社)日本膜構造協会, pp.17~28, 1996
- [8] 加藤史郎, 南宏和, 吉野達矢, 並田忠政, 粘性特性を考慮した織構造格子モデルによる構成方程式—クリープ及び応力緩和試験の数値シミュレーション—, 膜構造研究論文集'96, (社)日本膜構造協会, pp.29~43, 1996
- [9] 河端昌也, 石井一夫, エアビームの構造特性について, 膜構造研究論文集'93, (社)日本膜構造協会, pp.47~56, 1993
- [10] 小竹達也, 線材置換による膜構造解析法, 膜構造研究論文集'91, (社)日本膜構造協会, pp.23~32, 1991
- [11] 服部正, コンピュータによる数値解析法, 彰国社, pp.23~32
- [12] 「膜材料面内剪断剛性試験方法 (MSAJ/M-01-1993)」, (社)日本膜構造協会, 1993
- [13] 「膜材料弾性定数試験方法 (MSAJ/M-02-1995)」, (社)日本膜構造協会, 1995

## Limit state analysis of air-tube arch using truss element model

Masaya Kawabata

### SYNOPSIS

Convergence of solution after wrinkling is generated might worsen considerably when the triangular or quadratic membrane elements are applied to the analysis of the membrane structure, and the solution can not be obtained according to the problem. This should note that these problems are mainly numerical matter and are not always structural collapse. On the other hand, the convergence of the analysis using truss elements are remarkably good, so significant solution is often obtained in the cases above-mentioned. FEM analysis using the truss element model can be an effective method to grasp the qualitative tendency of the structures.

In this report, the calculation to substitute the rigidity of the orthotropic elastic body for the material rigidity of the truss element model is formulated in the beginning. Next, some limit state analysis of air-tube arch are shown with the comparison of experimental results. Air-tube arch retains load carrying capability even after it deformed considerably against external load and some parts are wrinkled.