

膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究

八木孝憲*, 大森博司**

概要

膜構造は面内張力のみで架構を形成することから、従来より膜曲面の形状決定手法の確立に力が注がれてきた。しかし、それらの手法を用いて得られる曲面は膜構造としての力学的理想曲面ではあるが、平面への展開が理論的に不可能な非可展曲面である。これに対して、現実には平面膜を所定の形状に裁断した膜帯を空間内で接合し、これに初期張力を導入することによって膜曲面が形成される。従来は、膜帯の裁断形状の決定については曲面形状解析で得られた曲面を既知として逆解析により行われていることが多いが、そこには様々な課題が存在する。従って、本報では従来の手法と異なり、力学的平衡状態において所望の張力場を近似的に実現するような膜曲面形状と裁断形状の同時解析手法について論じる。

1. 序

膜構造は面内張力のみで架構を形成することから設計段階での膜曲面の形状決定が非常に重要となる。それゆえ、この分野の研究が盛んに行なわれ、その成果として、膜応力を仮定し、エネルギー原理に基づいて曲面解析を行う初期応力法¹⁾や制約条件のもとで極小曲面解析を行う極小曲面法^{2) 3)}が報告されている。これらの解析手法によって得られる曲面は膜構造の力学的理想曲面であるが、それらの多くは、平面への展開が理論的に不可能な非可展曲面である。しかし、実際には、平面膜を所定の形状に裁断した膜帯を空間内で連結し、これに初期張力を導入することによって膜曲面が形成される。このとき、以下のことが要求される。

- (1) 設計者の要求する膜曲面の実現。
- (2) 膜曲面内に生じる張力ができる限り一様となること。

(1)の条件は、設計者の意志の反映として、膜構造物のみならず、建築物全般における設計要求と同様である。これに対して、(2)の条件は、面内張力のみを負担するという膜材の力学特性に起因する。この膜構造物特有の条件を満足することは、面内圧縮力やせん断力によって生じるしわの防止に結び付く。従って、膜構造物の設計では初期張力導入後の膜曲面内における所望の張力場の実現が課題となる。以上の膜曲面形状と面内張力に関する要求を満足するためには、平面膜をいかなる形状で裁断するかということに問題が及ぶ。ここで、裁断さ

れた膜帯の形状を裁断形状と呼ぶことにすれば、この問題は初期張力導入後において要求される条件を可能な限り満足する力学的平衡状態を設定し、それをもとに初期張力導入前の裁断形状を求める逆問題となる。しかし、得られた裁断形状をもとに構成される力学状態と初めに設定した力学状態との差の評価について問題が残る。逆に裁断形状を与えて順解析を行う場合は、要求条件に対する解析結果の満足度に応じて裁断形状を随時、変更しなければならない。従って、本報では、初期張力導入前後の状態について一方を既知、他方を未知とする従来の手法と異なり、要求条件を可能な限り満足し、力学的平衡状態において所望の張力場を近似的に実現するような膜曲面形状と裁断形状の同時解析手法について論じる。

2. 既往の研究

従来の裁断形状に関する研究の大きな流れとして、力学的理想曲面を求めた後に、それを近似的に実現するための裁断形状を決定するという逆解析的立場がとられている。その場合の解析対象は、曲面上の測地線である。測地線とは曲面上の2定点間を結ぶ最短曲線のことであり、対象とする曲面が可展曲面であれば、平面に展開した場合に直線となる性質を有する。従来の研究の多くは、これを利用して裁断形状を決定している。その内容は、膜帯の間隔を考慮して、その中心に測地線を配置し、これを基準として曲面上での膜帯の分割曲線を決定した後、平面への近似展開と初期張力による膜材の伸びを考慮した

*名古屋大学工学研究科建築学専攻 大学院生・修士(工学)

**名古屋大学工学研究科建築学専攻 助教授・工博

ものとなっている。

その先駆的研究として石井⁴⁾の研究が挙げられる。この研究は2つのパラメータの関数として表現された曲面の測地線に関する微分方程式を導き、その解を差分法による数値解析により求めている。さらに、石井^{5) 6) 7)}は任意曲面形状に対して測地線解析を可能とするために曲面を三角形平面要素により多面体近似した場合の手法についても論じている。

また、安宅ら^{8) 9)}は測地線問題を変分問題として捉え、測地線を線分要素で近似して解析を行っている。この解析において測地線と曲面の関係を保持するために、有限要素法による曲面形状解析から得られた離散座標値を用いて各部分領域において滑らかな近似曲面を作成し、それを用いて測地線と曲面の関係を評価している。さらに、鈴木¹⁰⁾は有限要素法による形状解析結果から直接、測地線解析が可能となるように汎関数の定式を行っている。

しかし、以上の研究の中では、測地線解析結果によって裁断形状を決定する場合に、初期張力による膜材の伸びの推定や平面への近似展開に関する定量的な見解が明示されていない。これに対して坪田^{11) 12)}は設計膜応力分布を近似的に実現するための裁断形状を定量的に決定する手法を提案している。また、従来の手法によって決定された裁断形状を用いて釣合解析や施工を行なった場合に、得られる膜応力分布が設計膜応力分布と著しく異なることもあるという問題点も指摘している。

しかし、この坪田の手法は解析過程が複雑であり、竣工釣合状態の解析と平面展開のための最小2乗近似計算の繰り返しにより多大な時間を要すると考えられる。従って、本報では、坪田の定義する竣工釣合状態を単に釣合状態と表現し、この釣合状態の成立する曲面形状と裁断形状の組合せの中から設計膜応力分布に非常に近い膜応力分布を示す組合せを合理的に抽出する手法の提案を目的とする。具体的には裁断形状と膜曲面形状の双方を未知とし、張力導入前後に要求される力学的条件を目的関数や制約条件として表現した最適化問題を定義し、それを解く手法である。

3. 有限要素法による定式化

本報では、相対変位場を線形とする三角形平面要素を用いて有限要素解析を行う。なお、相対変位を变形前後の各節点座標で表現し、膜材を直交異方弾性体として工学歪により応力を定義する。ただし、ここでの膜応力とはシェル理論と同様に面内の合応力を表す。また、平面に展開された無張力状態の膜帯の形状を变形前形状、膜帯を連結し、初期張力や外力の導入した後の曲面釣合形状を变形後形状と呼び、図-1にそれを示す。これにより仮想仕事の原理から变形前形状を既知、变形後形状を未知として釣合方程式を導く。さらに、この釣合方程式を満たす变形前後の各節点座標の組合せの中から、設計膜応力分布に非常に近い膜応力分布を示す組合せを抽出するために以下の最適化問題を定義する。

目的関数：膜応力と設計膜応力との差の2乗和 \Rightarrow 最小化

制約条件：釣合方程式

この最適化問題を直接に解けば、本報での目的は達成されるが、变形前後の形状をともに未知とすることは従属変数を独立変数として扱うことを意味し、解析不能となることが予測される。従って、本報では制約条件として变形前後の節点座標に関する修正量ノルムを指定

する条件式を付加する。これは、ある釣合状態に対してその近傍に位置する別の釣合状態の中から設計膜応力分布により近い膜応力分布を示す釣合状態を求めることを意図する条件である。この制約条件を付加した最適化問題を繰り返し解くことによって、設計条件に近い解を徐々に求めることが可能となる。また、最適化手法としては、非線形最適化問題に対して非常に有効なSQP法¹⁵⁾を適用する。

また、膜帯境界部分の節点の結合により生じる裁断形状での総節点数と曲面形状での総節点数に差については变形前後の各要素で節点番号の対応をとっており、図-2にそれを示す。

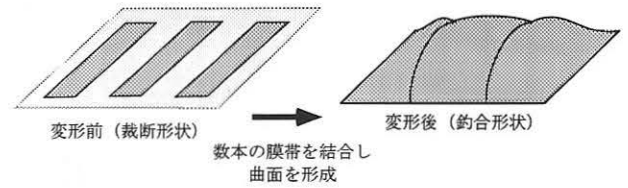


図-1: 变形前形状(裁断形状)と变形後形状(釣合形状)

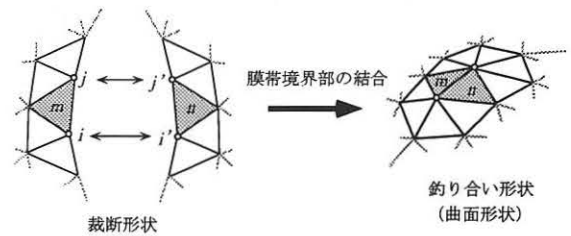


図-2: 裁断形状の境界部ならびに釣合形状での要素と節点の対応

3.1. 釣合形状を求めるための定式

ここでは、变形前形状を既知、变形後形状を未知として釣合方程式を導く。図-3に示すように $R = (X, Y, 0)$ は变形前形状、 $\hat{R} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ は变形後形状を表す全体座標系での節点ベクトルである。なお、部材が平面膜であることから变形前形状のZ座標を常に $Z = 0$ と拘束し、X, Y軸をそれぞれ横系、縦系方向としている。また、变形前の状態ではX, Y軸と \hat{X}, \hat{Y} 軸を一致させている。このとき、諸量の表記を以下に定義する。

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= \hat{R}_j - \hat{R}_i, & \hat{L}_{ij} &= |\hat{R}_{ij}| \\ R_{ij} &= R_j - R_i, & L_{ij} &= |R_{ij}| \end{aligned}$$

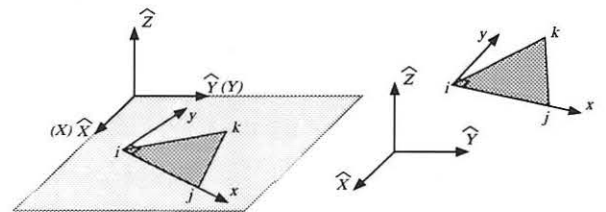


図-3: 裁断形状(左)と釣合形状(右)での三角形平面要素

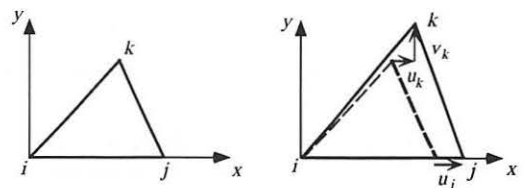


図-4: 要素埋め込み座標系での変位表現

$\hat{X}\hat{Y}$ 平面上に存在する三角形要素において荷重や初期張力の導入により剛体変位と相対変位が生じるが、本研究では、図-4に示す要素埋め込み座標により相対変位を表現し、この相対変位に関する工学歪みを用いて各要素の応力を定義する。このとき、 i 点を座標原点とすれば各節点の相対変位は u_j, u_k, v_k であり、次式で表現される。

$$u_j = \hat{L}_{ij} - L_{ij} \quad (1)$$

$$u_k = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{ik}}{\hat{L}_{ij}} - \frac{\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{R}_{ik}}{L_{ij}} \quad (2)$$

$$v_k = \frac{\hat{S}_e}{\hat{L}_{ij}} - \frac{S_e}{L_{ij}} \quad (3)$$

ただし、 $\hat{S}_e = |\hat{\mathbf{R}}_{ij} \times \hat{\mathbf{R}}_{ik}|$, $S_e = |\mathbf{R}_{ij} \times \mathbf{R}_{ik}|$ である。

本研究では、要素埋め込み座標 (x, y) に関して相対変位は線形とするので、式(1), (2), (3)より相対変位 $u(x, y), v(x, y)$ は次式となる。

$$u(x, y) = \left(\frac{\hat{L}_{ij}}{L_{ij}} - 1 \right) x + \frac{1}{S_e} \left(\frac{L_{ij}}{\hat{L}_{ij}} \hat{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{ik} - \frac{\hat{L}_{ij}}{L_{ij}} \mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{R}_{ik} \right) y \quad (4)$$

$$v(x, y) = \left(\frac{\hat{S}_e}{S_e} \frac{L_{ij}}{\hat{L}_{ij}} - 1 \right) y \quad (5)$$

本研究では、工学歪みを用いることから要素埋め込み座標系での相対変位と歪みの関係式は式(4), (5)より次式で表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\hat{L}_{ij}}{L_{ij}} - 1 \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\hat{S}_e}{S_e} \frac{L_{ij}}{\hat{L}_{ij}} - 1 \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{S_e} \left(\frac{L_{ij}}{\hat{L}_{ij}} \hat{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{ik} - \frac{\hat{L}_{ij}}{L_{ij}} \mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{R}_{ik} \right) \quad (8)$$

また、面内の剛体回転について、変形前後における横糸、縦糸方向と要素埋め込み座標との成す角に変化はないと仮定すれば、図-5に示す横糸、縦糸方向と要素埋め込み座標との関係が成り立つ。このとき、座標変換、相対変位の変換は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $\cos \varphi = \frac{X_j - X_i}{L_{ij}}$, $\sin \varphi = \frac{Y_j - Y_i}{L_{ij}}$ である。

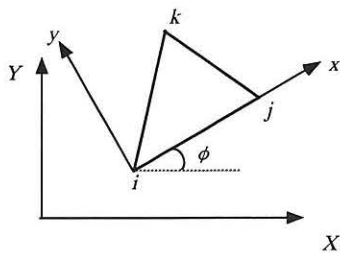


図-5: 裁断形状に関する全体座標と要素埋め込み座標との関係

式(6), (7), (8)と同様に横糸、縦糸方向の工学歪みは次式で表される。

$$\varepsilon_X = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad (11)$$

式(6)~(11)より横糸、縦糸方向の工学歪みと要素埋め込み座標系での工学歪みとの関係は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

この式(12)より仮想歪みを導く。一般の構造解析では変位を解析対象とすることから仮想変位により仮想歪みを表現する。しかし、ここでは変形前後の形状が重要となることから変形前後の節点ベクトルを用いて相対変位を表現している。このことを考慮し、変形後形状のみを未知として仮想歪みを次式で表す。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_X & \delta \varepsilon_Y & \delta \gamma_{XY} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x & \delta \varepsilon_y & \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} [T]^T \\ &= \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{R}}_i^T & \delta \hat{\mathbf{R}}_j^T & \delta \hat{\mathbf{R}}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_i}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_i}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_i}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_j}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_j}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_j}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} [T]^T \\ &= \delta \hat{\mathbf{R}}_e^T [C] [T]^T \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $\delta \hat{\mathbf{R}}_e^T = [\delta \hat{\mathbf{R}}_i^T \quad \delta \hat{\mathbf{R}}_j^T \quad \delta \hat{\mathbf{R}}_k^T]$ である。

また、膜材を直交異方弾性体と見なせば、要素膜応力 σ_e は次式となる。

$$\sigma_e = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = t [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = t [D] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ただし、 t : 膜の厚さ

$$[D] = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_X & \nu_y E_X & 0 \\ \nu_x E_Y & E_Y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_x \nu_y) G \end{bmatrix} \quad \text{である。}$$

以上より変形前形状を参照した場合の内部仮想仕事は次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \sum_e \int_{\Omega_e} [\delta \varepsilon_X \quad \delta \varepsilon_Y \quad \delta \gamma_{XY}] \sigma_e dS \\ &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{R}}_e^T \frac{t S_e}{2} [C] [T]^T [D] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 Ω_e : 変形前の要素の面積分領域

dS : 変形前の要素における微小面積 である。

これに対して、内圧を外力とした場合の外部仮想仕事は、内圧方向が変形後形状に依存することから変形後形状を参照して次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_e \int_{\hat{\Omega}_e} \delta \hat{\mathbf{R}}_e^T p \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}} \end{Bmatrix} d\hat{S} \\ &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{R}}_e^T \frac{p}{6} \begin{Bmatrix} \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 $\hat{\Omega}_e$: 変形前の要素の面積分領域

$d\hat{S}$: 変形後の要素における微小面積

p : 空気膜構造などでの内圧

$\hat{\mathbf{n}}$: 変形後の要素の単位法線ベクトル

$$\hat{S}_e = \hat{R}_{ij} \times \hat{R}_{ik} \quad \text{である.}$$

一般の構造解析では、変形前形状が既知であることからまとめて変形前を参照することが多い。しかし、式(16)では、内圧方向として変形後を形状での各要素の法線方向参照して仮想仕事を表した。これは、内圧を外力としていることから形状に従って外力方向が変化すること、曲面形状が初期張力導入過程で得られることによる。さらに、変形前後のどちらを参照しても仮想仕事は等価となることから仮想仕事の原理より次式が成り立つ。

$$\delta\Phi = \delta W \quad (17)$$

以上の式(15)、(16)、(17)より力の釣合方程式として次式が得られる。

$$\frac{tS_e}{2} [C] [T]^T [D] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{p}{6} \begin{Bmatrix} \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \end{Bmatrix} = 0 \quad (18)$$

これにより剛体変位を除去し、相対変位に関する膜構造での釣合方程式が導かれた。この方程式(18)により変形前形状が与えられれば変形後形状が求められることとなる。しかし、本研究では、この釣合方程式を満たす無数の変形前後の形状の中から膜構造の裁断形状と曲面釣合形状として十分なものを求めることが目的である。従って、この方程式について変形前後の形状をどちらも未知量として解析を行う。

3.2. 膜応力に関する最適化問題の定式

各節点について、変形前形状には2自由度、変形後形状には3自由度を与え、膜構造の裁断形状と曲面釣合形状として、より望ましい解を求めるためにここでは各要素の膜応力 σ_e と設計膜応力 σ_{e0} との差の2乗和を目的関数として以下の最適化問題を定義する。

$$\text{目的関数: } \Phi = \sum_e \frac{1}{2} (\sigma_e - \sigma_{e0})^T (\sigma_e - \sigma_{e0}) \Rightarrow \text{最小化} \quad (19)$$

制約条件:

$$\sum_e \left(\frac{tS_e}{2} [C] [T]^T [D] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{p}{6} \begin{Bmatrix} \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \\ \hat{S}_e \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (20)$$

釣合方程式を満足する変形前後の形状は無数に存在するために、ここでは、最適化問題として膜応力に関する最小2乗近似式を目的関数とし、対象とする解領域の絞り込みを図っている。しかし、それでも、この最適化問題のままでは解を一意に決定するための条件に欠けることが考えられる。従って、本研究では、次式の制約条件を付加することで安定した求解過程の実現を目指す。

$$\text{制約条件: } \frac{1}{2} (\Delta \hat{R}^T \Delta \hat{R} + \Delta R^T \Delta R - d_0^2) = 0 \quad (21)$$

ただし、 ΔR , $\Delta \hat{R}$: ある解から次の解までの
変形前後の節点の増分ベクトル
 d_0 : 増分ベクトルのノルムの指定値 である。

この制約条件の導入によって、ある釣合状態から一定の距離だけ離れた領域に存在する別の釣合状態の中から設計膜応力分布により近い膜応力分布を示す釣合状態が求められる。従って、この最適化問題の繰り返し解析により目的解を円滑に求めることが期待できる。なお、本研究では、非線形最適化手法として非常に有効なSQP法を適用している。

4. 数値解析

4.1. 解析条件

本報では、図-6に示すHP曲面の形成を可能とする境界をHP境界と呼び、この境界に対して初期張力のみで形成される膜曲面と矩形境界に対して内圧と初期張力を与えて形成される膜曲面を解析対象とする。このとき、HP境界の解析モデルでは境界の高さ、膜帯の枚数に関してそれぞれ比較するために表-1のように設定している。また、全解析モデルの解析において設計膜応力分布として5(kgf/cm)の等応力分布を与え、式(14)で用いる膜の材料定数を表-2に示し、さらに初期裁断形状と要素分割ならびに節点ベクトルの拘束状態を図-6に示す。本解析では、図-6に示すように裁断形状の境界部分の節点ベクトルを未知とし、内部の節点ベクトルは既知として予め与えた位置に固定する。これは、内部節点の位置によって膜応力分布が大きく左右されることはないであろうという予測と解析自由度の低減を考慮してのことである。全解析モデルの曲面釣合形状解析において、境界形状の対称性により全体の4分の1の部分解析対象とし、対称軸となる境界部分の節点ベクトルには、それに対応する自由度を与えている。また、裁断形状についても曲面形状に対応する膜帯のみを解析する。また、内圧 p について、HP境界モデルでは $p=0$ (kgf/cm²)、矩形境界モデルでは最初の $p=0$ (kgf/cm²)から解析過程に従って順次、増加させている。図-21~24に示す矩形境界での解析結果は $p=0.02$ (kgf/cm²)のときのものである。

表-1: 各解析での諸量

解析モデル	要素	節点(前)	節点(後)	a(cm)	h(cm)	膜帯(枚)
HP境界1	100	72	66	500.0	100.0	2
HP境界2	100	72	66	500.0	400.0	2
HP境界3	100	72	66	500.0	400.0	3
矩形境界	100	72	66	500.0	—	2

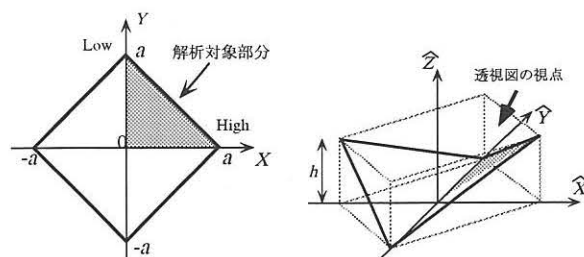


図-6: 左: 境界平面図(モデル1~4), 右: 境界透視図(モデル1~3)

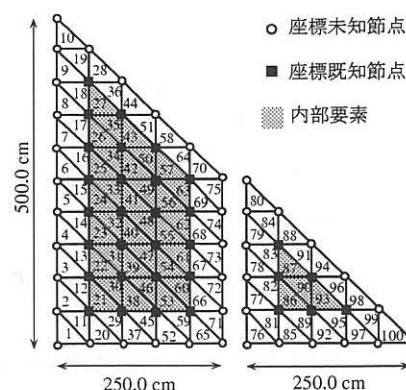


図-7: 初期裁断形状での要素分割ならびに要素番号(モデル1, 2)

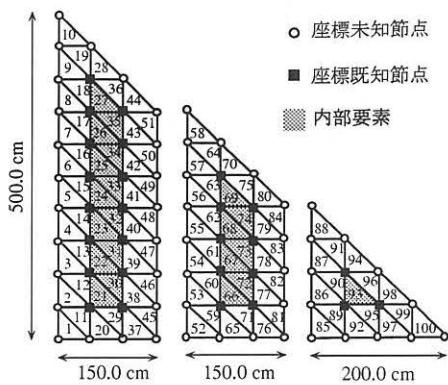


図-8: 初期裁断形状での要素分割ならびに要素番号(モデル3)

表-2: 解析に用いた材料定数

膜の厚さ t	0.08 cm
ヤング係数 E_X	2725.0 kgf/cm ²
ヤング係数 E_Y	8225.0 kgf/cm ²
せん断係数 G	712.5 kgf/cm ²
ポワソン比 ν_X	0.29
ポワソン比 ν_Y	0.87

* この数値は文献^{11) 12)}から引用している。

4.2. 解析結果

表-1に示す3例のHP境界モデルと1例の矩形境界モデルに関する解析結果をそれぞれ曲面釣合形状, 裁断形状, 膜応力分布の順で図-9~24までに示す。特に膜応力分布については, X (横系), Y (縦系)方向に関してそれぞれ変形前の XY 平面に応力値を射影して表示している。なお, その図中の各数値は以下のことを示す。

- σ_{\max} 最大膜応力値 σ_{\min} 最小膜応力値
- $\bar{\sigma}$ 膜応力の平均値 $\hat{\sigma}$ 膜応力の標準偏差
- $\hat{\sigma}_0$ 設計膜応力に対する実際の膜応力の分散の平方根
- $\bar{\sigma}_X = E(\sigma_{e_X})$ $\bar{\sigma}_Y = E(\sigma_{e_Y})$
- $\hat{\sigma}_X = \sqrt{E(\sigma_{e_X}^2) - \bar{\sigma}_X^2}$ $\hat{\sigma}_Y = \sqrt{E(\sigma_{e_Y}^2) - \bar{\sigma}_Y^2}$
- $\hat{\sigma}_0 = \sqrt{E(\sigma_e^2) - \sigma_{e0}^2}$

ただし, $E(\sigma_e) = \frac{1}{m} \sum_e \sigma_e$ (m : 要素数)

σ_{e0} : 各要素の設計膜応力値

添字 X, Y : X (横系), Y (縦系)方向に関して統計処理したことを示す。

図-25では, HP境界モデル1の初期裁断形状での膜応力分布と最終裁断形状での膜応力分布の比較を各要素毎に行い, 図-26では, 同様の比較を主膜応力分布について行っている。さらに, 図-27では, HP境界モデル2と3で同じ境界形状に対して膜帯数が異なる場合について膜応力分布を比較し, 図-28では同様に主膜応力分布について比較している。各図の横軸は要素番号を示すが, HP境界モデル2については図-7, HP境界モデル3については図-8に示す要素番号にそれぞれ対応する。

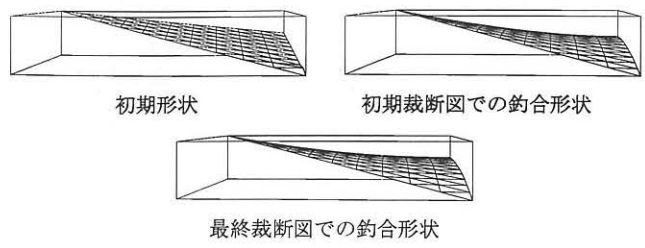


図-9: HP境界1: 曲面釣合形状

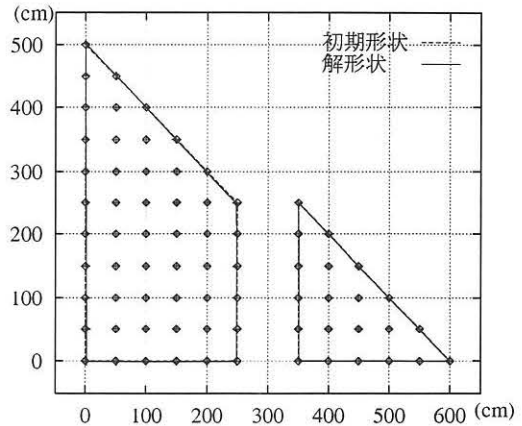


図-10: HP境界1: 裁断形状

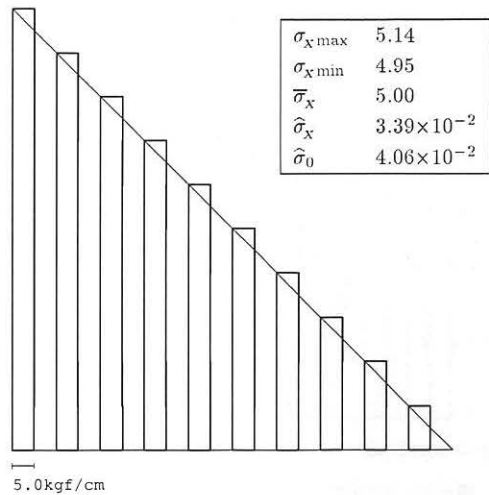


図-11: HP境界1: 最終裁断図に対する膜応力分布 (σ_X)

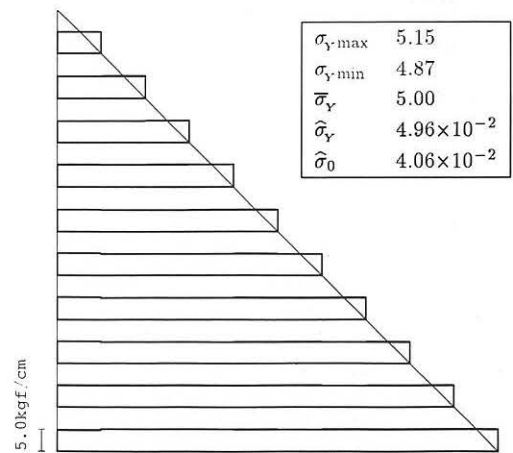


図-12: HP境界1: 最終裁断図に対する膜応力分布 (σ_Y)

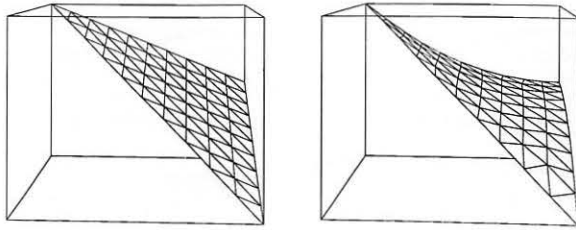


図-13: HP 境界 2: 左: 初期形状, 右: 最終裁断面での釣合形状

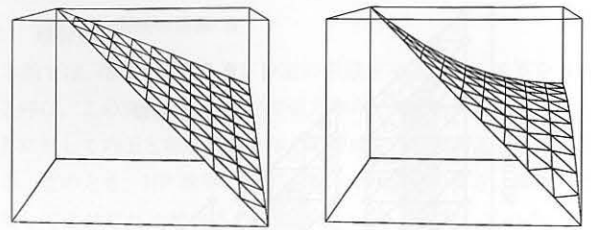


図-17: HP 境界 3: 左: 初期形状, 右: 最終裁断面での釣合形状

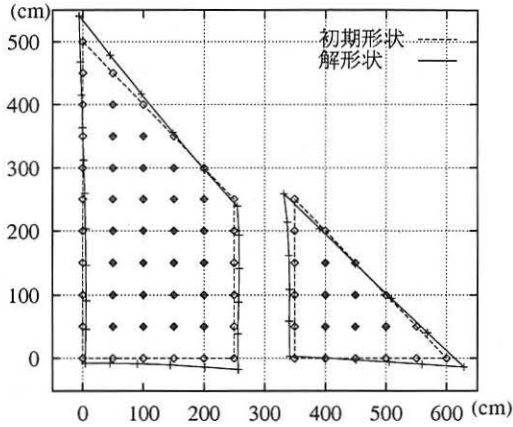


図-14: HP 境界 2: 裁断面形状

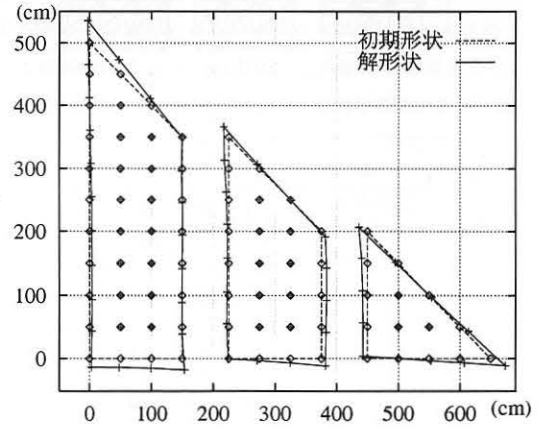


図-18: HP 境界 3: 裁断面形状

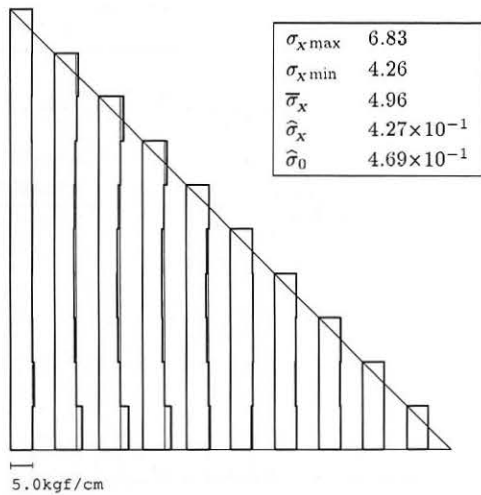


図-15: HP 境界 2: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_x)

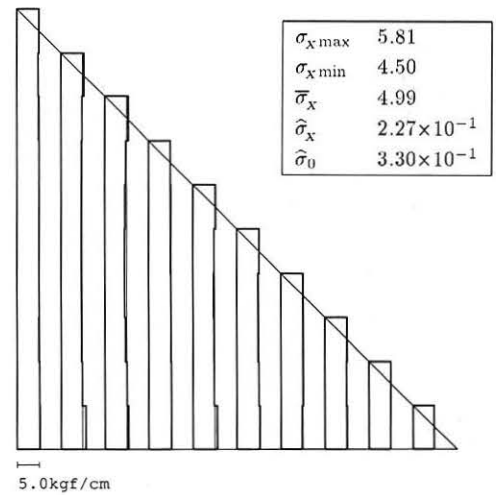


図-19: HP 境界 3: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_x)

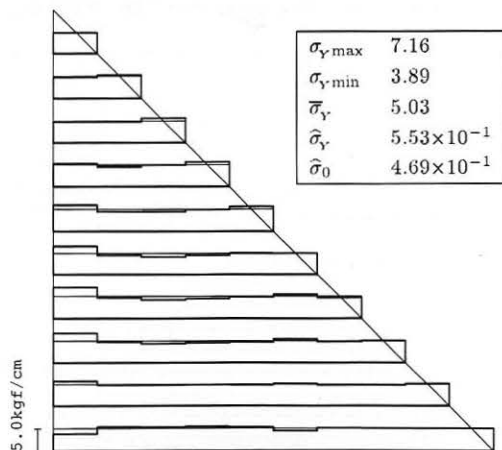


図-16: HP 境界 2: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_y)

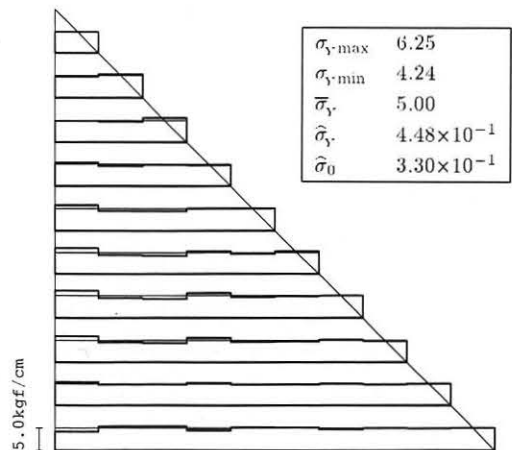


図-20: HP 境界 3: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_y)

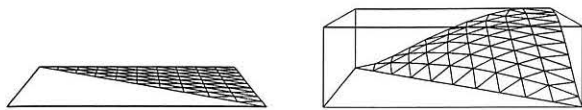


図-21: 矩形境界: 左: 初期形状, 右: 最終裁断面図での釣合形状

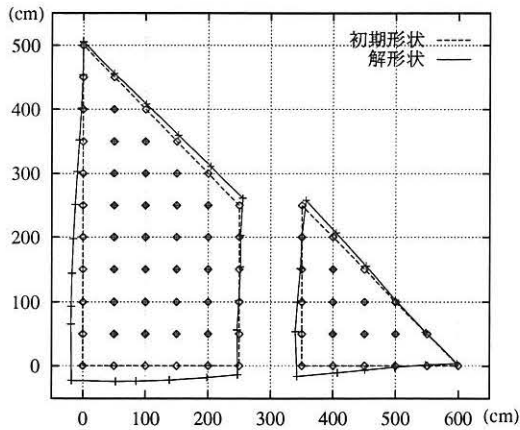


図-22: 矩形境界: 裁断面形状

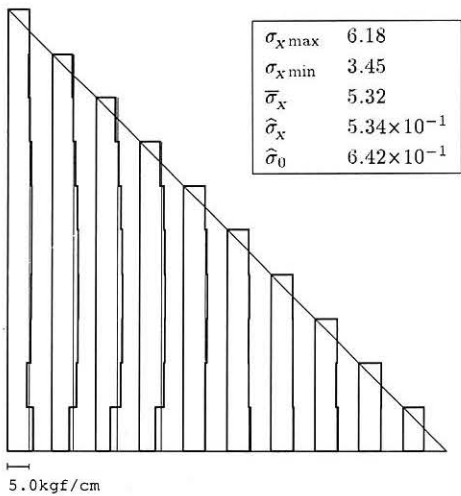


図-23: 矩形境界: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_x)

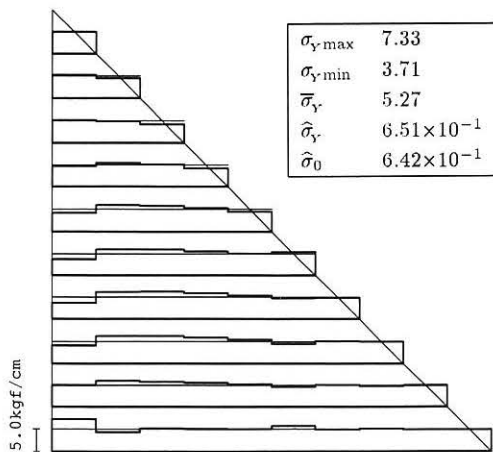


図-24: 矩形境界: 最終裁断面に対する膜応力分布 (σ_y)

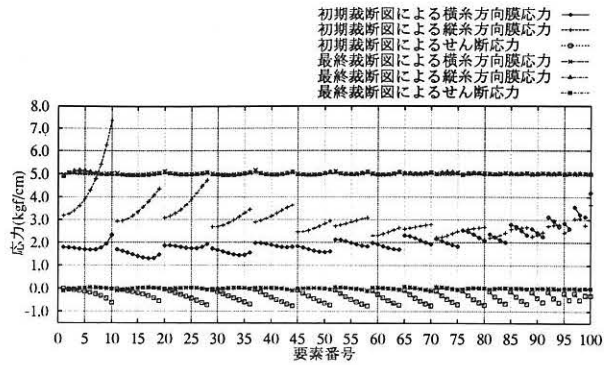


図-25: HP 境界 1: 初期裁断面図と最終裁断面図との膜応力分布の比較

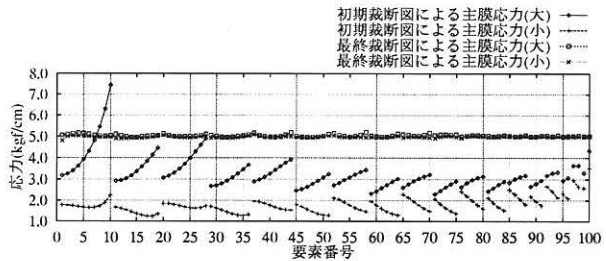


図-26: HP 境界 1: 初期裁断面図と最終裁断面図との主膜応力分布の比較

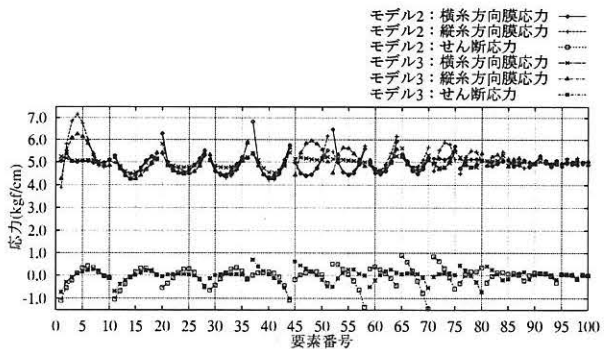


図-27: HP 境界 2, 3: 最終裁断面図に対する膜応力分布の比較

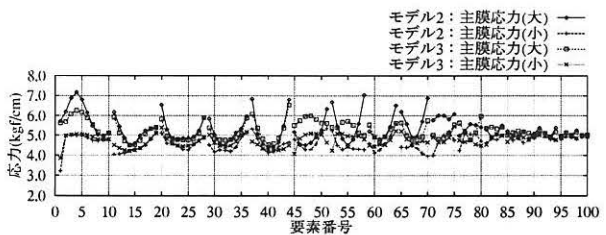


図-28: HP 境界 2, 3: 最終裁断面図に対する主膜応力分布の比較

4.3. 考察

図-11, 12や図-25, 26を見ると, HP 境界モデル1のように曲面釣合形状が平面と大差ない場合は, 得られた最終裁断面形状と初期裁断面形状との差異が微小であるにも関わらず, 最終裁断面形状を用いた方が設計膜応力分布により近い膜応力分布を示すことが明らかとなった。

これに対して, 図-15, 16, 19, 20, 23, 24や図-27, 28などからHP 境界モデル2, 3や矩形境界モデルのように平面と大きく異なる曲面釣合形状が得られる場合は, 特に裁断面膜帯の結合部分を中心に設計膜応力分布と最終裁断面形状に対する膜応力分布との間で若干の差が見られる。これは限られた枚数の膜帯で曲面を平面展開しているために設計膜応力分布に対する近似の限界が現れていると考えられるが,

図-27, 28 で HP 境界モデル 2 と 3 との膜応力分布を詳細に比較すると膜帯数を増やすことによって膜応力値のばらつきが改善されていることが分かる。従って、膜帯の枚数の増加に伴ってこのばらつきは減る傾向にあると予測される。しかし、膜材の幅やコストなどの制限から膜帯の枚数が決定されるので、曲面を平面展開することの限界と膜応力値のばらつきは不可避となる。以上のことを考慮して図-25, 26, 27, 28 を見ると、本解析では各設定条件に応じて膜応力値のばらつきの幅ができる限り小さく抑えられた結果が得られていると判断する。

また、図-26や図-28より、主膜応力が各要素の 2 方向に関して全て正であることから釣合状態の膜曲面においてしわは発生せず、本解析で得られる最終裁断形状に対する釣合状態では純粋な引張力場が実現していると判断できる。さらに、図-21~24に示す結果から外力として内圧を与えた場合も解析可能であることが分かる。

一方、ここで定義している最適化問題では、釣合方程式を制約条件に用いているのでマトリクス・サイズが巨大となることから数値計算に大きな負担が強いられる。しかし、この釣合方程式の感度から成るマトリクスは 0 成分を多く含むことから、プログラミングの段階で工夫することにより計算効率を上げることが可能となる。また、このことによって計算時間や収束性の面で実用上問題ないことを確認している。同時に、ある釣合状態から一定の距離に存在する別の釣合状態について着目するための制約条件を導入することによって、安定した非線形解析が可能となることも確認している。

以上より本解析手法の妥当性と有効性が示せたと判断する。

5. 結語

本報では、1つの最適化問題の中で裁断形状と曲面釣合形状を同時に未知として扱う解析が可能であることと、その解析手法が有効に機能することを示した。今後は、本報で示した解析例以外の複雑な曲面釣合形状を解析対象とする場合に本解析手法を適用し、有効性について議論することや、ケーブルを用いた膜構造物に対する解析手法の確立を念頭においている。さらには、設計条件として膜帯幅の上限やロール状の膜材に対する膜帯の有効面積、ならびに膜曲面に対して有効な裁断方向の選択などを考慮することが可能となる解析の実現を目指す。

参考文献

- 1) E.Haug and G.H.Powell : Analytical Shape Finding for Cable Nets, TENSION STRUCTURES and SPACE FRAMES, Proceedings of IASS Pacific Symposium, Tokyo and Kyoto, Part.2, pp.165-175, 1972
- 2) H. Ohmori, N. Hagiwara, T. Matsui, O. Matsuoka : Numerical Analysis of Minimum Surface by Finite Element Method, 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, Proceedings of IASS Symposium, Madrid Vol.5, 1989
- 3) 鈴木俊男, 半谷裕彦 : 極小曲面の変数低減による有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No.425, pp.111-120, 1991年
- 4) 石井一夫 : 曲面の平面への近似展開-膜構造曲面のカッティング図について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.783-784, 1972年
- 5) 石井一夫 : 膜曲面上の測地線ケーブルネットについて, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.637-638, 1973年
- 6) 石井一夫 : 膜曲面上の曲率線の数値解について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.817-818, 1974年
- 7) 石井一夫 : 膜構造の形状解析 (形状決定の問題) 概説, 膜構造研究論文集'89, 日本膜構造協会, pp.83-107, 1989年
- 8) 安宅信行, 小塚裕一 : 膜構造における膜曲面上の測地線の決定方法について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.2603-2604, 1984年
- 9) 安宅信行, 小塚裕一 : 離散的データで与えられた任意曲面の測地線と Cutting Pattern の決定方法について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1171-1172, 1985年
- 10) 鈴木俊男 : 曲面上の測地線を求める有限要素解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1387-1388, 1993年
- 11) 坪田張二ほか : 最適化手法を用いた膜構造の裁断図解析, 日本建築学会大会構造系論文集, No.395, pp.101-110, 1989年
- 12) 坪田張二 : 膜構造の竣工釣り合い状態と最適裁断図の決定法, 京都大学学位論文, 1992年
- 13) 大崎純, 上谷宏二, 高谷真次 : 逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法, 日本建築学会大会構造系論文集, No.488, pp.107-115, 1996年
- 14) 八木孝憲, 石原寛, 大森博司 : 極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究~非線形解法の検討と収束性に関する考察~, 日本建築学会構造系論文集, No.502掲載予定, 1997年
- 15) 茨木俊秀, 福島雅夫 : 最適化プログラミング, 岩波書店, 1991年

A NEW APPROACH FOR CUTTING PATTERN ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES BY SIMULTANEOUS CONSIDERATION ON BOTH EQUILIBRIUM CONDITION AND INITIAL CONFIGURATION

Takanori Yagi*, Hiroshi Ohmori**

SYNOPSIS

As membrane structures can keep their shapes only through in-plane stresses, determination of the objective shapes of membrane structures has to be carried out appropriately by considering physical conditions. Besides, proposal of the cutting pattern of membrane materials is also important in order to avoid unexpected wrinkling or creep deformation which itself can also cause the wrinkling after certain period passed from the initial introduction of prestressing. In this paper, a new approach for determination of the cutting pattern of membrane structures is proposed where the equilibrium state after deformation is simultaneously considered together with the configuration of the cutting pattern as the state of pre-deformation. Utilizing SQP technique for optimization process, the finite element analysis is performed for several examples, where effectiveness of proposed method is clearly shown.

*Graduate Student, Dept. of Architecture, Graduate School, Nagoya Univ., M.Eng.

**Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Graduate School, Nagoya Univ., Dr.Eng.