

膜構造物の静的載荷時の剛性を考慮した 初期応力・裁断膜形状最適化

大崎 純*1, 山川 誠*2

梗 概

骨組で支持された膜構造物に対し、静的剛性の指標としての外力作用時の仕事量(コンプライアンス)を考慮し、可展条件を用いた2段階の応力・裁断膜形状最適化手法を提案する。有限要素法を用いて離散化された膜面の初期釣合い形状とそれに対応する応力を最適化するとき、応力と釣合い形状を独立な設計変数と考え、設計変数が多くなり、最適解への収束性が悪くなる。そこで、本論では、2段階設計法の上位レベルの問題として、節点座標と目標応力レベルのみを設計変数とした「コンプライアンス最小化問題」を考える。このとき、各要素の応力は、コンプライアンス最小化問題で決定される形状の下での応力レベルからの偏差量を最小化する下位レベルの「応力分布最適化問題」によって決定する。この過程で、曲面が平面裁断膜から形成されるための可展条件を用いるため、得られた応力と形状の実現性が保証され、裁断膜形状を容易に求めることができる。

1. 序

骨組構造物やトラスの構造設計法と比較して、膜構造物の設計法は十分に確立されているとは言い難い。通常、膜構造物の設計では、まず、境界形状及び自己釣合い時初期応力分布を与え条件とし、その釣合い形状を求める原形曲面解析により、内部形状が決定される[1-6]。初期応力としては、等張力分布を与える例が多いが、その場合には、内部形状の自由度が極めて小さくなる。釣合い形状は、シェル構造物の応力分布最適化や[7]、force density method [8]を拡張した方法[9-11]によって求めることも可能である。原形曲面が得られると、測地線方向に裁断線を決定することができる[12-14]。しかし、デザイナーの希望する形状が等張力曲面と大きく異なる場合、その形状を実現する上での応力を変更するための合理的な指針を得ることは、困難である。

膜構造物は、平面形状を有する裁断膜を張り合わせて構成されるため、釣合い形状は、平面状態を初期値とした非線形形状解析によって求められなければならない。坪田ら[15]は、無応力状態での裁断膜を与えて、張力導入時の膜応力及び釣合い形状を求める初期釣合い形状解析法を提案した。また、裁断膜の境界付近の要素の応力を指定して、内部節点の位置及び内部要素の応力を未知数とし、応力が指定値に近いような裁断膜形状を求める手法を提示した[16]。しかし、上記手法では、非線形釣合い形状解析を繰返し実行しなければならない。

一方、大崎ら[17]は、三角形一様応力の有限要素を用いてモデル化された膜構造物に対し、デザイナーによって指定された初期釣合い形

状を実現し、かつ初期応力が指定値に近いような裁断膜形状及び最適応力を求める逆問題型の形状指定設計法を提案した。本手法を用いると、最も望ましい応力分布に近い最適応力と、それを得るための最適裁断図を、繰返し非線形形状解析を行わずに直接的に求めることができる。さらに、初期釣合い状態での有限要素の節点位置を変数とし、上記形状指定設計法を用いて得られる最適応力及び最適裁断膜形状の感度解析を実行することにより、初期釣合い形状がデザイナーの指定した形状に近く、かつ応力の指定値からの偏差量が小さいような裁断膜形状を求めるトレードオフ設計法を提案した。しかし、その手法では、応力分布を決定する際に、風荷重、雪荷重などの付加荷重に対する剛性が考慮されていない。

膜構造物は柔な構造物であり、面外力に対する変形が大きいため、通常幾何学的非線形性を考慮して応答量を評価する。したがって、静的外力に対する応答量は、釣合い形状のみならず、初期応力にも依存する。そのため、現在用いられている設計法では、外力作用時の変形及び応力変化が大きいため、目標応力分布を変更して、非線形形状解析を再度実行しなければならない。しかし、目標応力の変更方法についての指標が明らかでないため、このような設計法は極めて非効率である。Uetani *et al.* [18]は、形状が指定分布に近くなるように応力比を決定し、さらに、静的外力に対する最大変位が上限値以下となるような応力レベルを求める手法を提案した。しかし、その手法では、設計変数の自由度が極めて小さく、可展条件[17]も考慮されていない。

*1 京都大学大学院工学研究科 助教授

*2 京都大学大学院工学研究科 大学院生

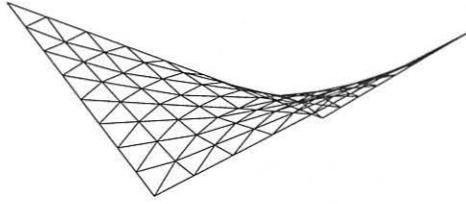


図 1: HP 型膜構造物の有限要素分割例

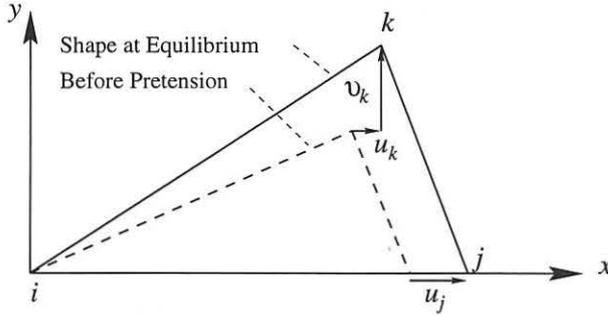


図 2: 局所座標系とそれに対応する節点変位の定義

本論では、静的剛性の指標として、外力作用時の仕事量(コンプライアンス)を考慮し、可展条件を用いた2段階の応力・形状設計法を提案する。

2. 釣合い条件と可展条件

本節では、次節で用いる基礎式と記号の定義のため、初期釣合い状態で満たされるべき条件を示し、膜面が平面裁断膜から構成されるための可展条件 [17] の概要を述べる。

図 1 に示すように、膜面を一樣ひずみの三角形有限要素を用いてモデル化する。三角形要素の3つの節点を i, j, k とし、節点 i を原点として局所座標 $\mathbf{x} = (x, y)$ を、張力導入後の釣合い状態に対して図 2 のように設定する。

ベクトルあるいは行列の転置を $()^T$ で表わし、局所座標系に関する要素ひずみベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ とすると、 x, y 方向ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 及びせん断ひずみ γ_{xy} は要素内で一定である。面内の節点変位の自由度は6であるが、相対変位のみで要素の変形状態は記述できるため、節点 i の x, y 方向変位及び、節点 j の y 方向変位を拘束したモデルを考える。このとき、節点変位ベクトル \mathbf{u}^e は

$$\mathbf{u}^e = \{u_j, u_k, v_k\}^T \quad (1)$$

で表わされる。 u_j, u_k 及び v_k の定義は図 2 に示したとおりである。 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と \mathbf{u}^e の関係を次式で表わす。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}\mathbf{u}^e \quad (2)$$

ここで、三角形要素の面積を A とすると、 \mathbf{C} は

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_k - y_i & y_i - y_j & 0 \\ 0 & 0 & x_j - x_i \\ x_i - x_k & x_i - x_j & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (3)$$

で定義され [19]、 (x_i, y_i) は節点 i の局所座標である。節点 j, k についても同様である。

膜材料は一般に直交異方性体であり、弾性係数が最大及び最小となる主方向は、局所座標系とは必ずしも一致しない。しかし、以下では

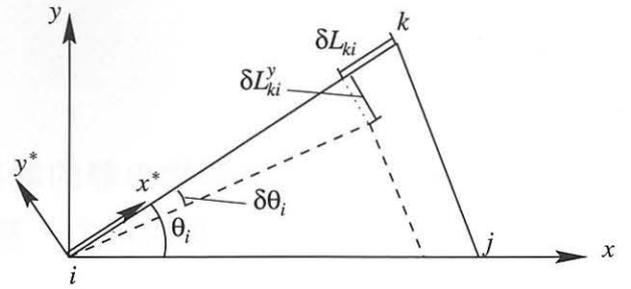


図 3: 辺長変化及び角度変化の定義

簡単のため、釣合い状態での局所座標が主方向に一致するものとする。本論で提案する手法は、主方向と局所座標との変換を考慮した場合にも拡張できる。

x, y 方向の応力を σ_x, σ_y とし、せん断応力を τ_{xy} とする。また、 x, y 方向の弾性係数を E_x, E_y とし、 $E_x > E_y$ とする。せん断弾性係数を G 、ポアソン比を ν_{xy}, ν_{yx} とし、

$$\mu = E_x/E_y, \quad \kappa = G/E_y \quad (4a, b)$$

の記号を用いると、 $\boldsymbol{\sigma}^e$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ の関係は

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E_y}{1 - \mu\nu_{xy}^2} \begin{bmatrix} \mu & \mu\nu_{xy} & 0 \\ \mu\nu_{xy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa(1 - \mu\nu_{xy}^2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

のようになる [19]。ここで、 ν_{xy} と ν_{yx} の間には、 $E_y\nu_{yx} = E_x\nu_{xy}$ の関係が成り立つ。

等価節点力 \mathbf{f}^e と $\boldsymbol{\sigma}^e$ の関係は、

$$\mathbf{f}^e = t\mathbf{A}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\sigma}^e \quad (7)$$

で表わされる。ここで、 t は膜の厚さである。(7) を通常の有限要素法の手法を用いて重ね合わせることににより、系全体の釣合い式

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} \quad (8)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{P} 及び $\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれ系全体の外力ベクトル及び応力ベクトルである。また、 \mathbf{B} は釣合い行列であり、自己釣合い状態では $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ である。

次に、三角形要素の角度及び辺長の変化を $\boldsymbol{\sigma}^e$ を用いて表わし、張力を解放したときに裁断膜が平面形状をなすための条件(可展条件)を導く。

図 3 に示すように、釣合い形状での節点 i を原点として、辺 ik の方向の座標を x^* 、それと垂直な座標を y^* とする。 (x, y) 座標系から (x^*, y^*) 座標系への変換行列を \mathbf{T}^{ki} とする。 \mathbf{T}^{jk} についても同様である。以下では、 \mathbf{T}^{ik} 及び \mathbf{T}^{jk} の第 r 行 s 列成分をそれぞれ T_{rs}^{ik} 及び T_{rs}^{jk} で表わす。

辺 ij, jk, ki の釣合い形状での長さをそれぞれ L_{ij}, L_{jk}, L_{ki} とし、張力導入による辺 ki の長さの変化を、図 3 に示したように δL_{ki} とする。他の辺についても同様である。ここで、微小変形の仮定により、 $\delta L_{ij} \ll L_{ij}$ 等が成立するものとし、釣合い形状での節点 i において、辺 ij と辺 ki のなす角度を θ_i とする。図 3 に示したように、張力解放後の節点 k と x^* 軸の距離を δL_{ki}^y とする。微小変形の仮定より、 $\delta\theta_i$ は

$$\delta\theta_i = \frac{\delta L_{ki}^y}{L_{ki}} \quad (9)$$

により計算できる。 $\delta\theta_j$ 及び $\delta\theta_k$ についても同様である。

以上より、張力を解放したときの辺長及び角度の減少量を正とすると、辺長変化量及び角度変化量と節点変位の関係は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \delta L_{ki} &= -T_{11}^{ki} u_k - T_{12}^{ki} v_k \\ \delta L_{jk} &= T_{11}^{jk} u_j - T_{11}^{jk} u_k - T_{12}^{jk} v_k \\ \delta L_{ij} &= -u_j \end{aligned} \quad (10a-c)$$

$$\begin{aligned} L_{ki} \delta\theta_i &= -T_{21}^{ki} u_k - T_{22}^{ki} v_k \\ L_{jk} \delta\theta_j &= T_{21}^{jk} u_j - T_{21}^{jk} u_k - T_{22}^{jk} v_k \\ \delta\theta_k &= -\delta\theta_i - \delta\theta_j \end{aligned} \quad (11a-c)$$

(10a-c)及び(11a-c)より、張力を解放したときの角度及び辺長の変化量を、節点変位の1次式で表現することができる。 (10a-c)及び(11a-c)をまとめて次のように書く。

$$\delta \mathbf{L}^e = \mathbf{G}^e \mathbf{u}^e \quad (12)$$

$$\delta \Theta^e = \mathbf{H}^e \mathbf{u}^e \quad (13)$$

(2),(5),(12),(13)より、辺長及び角度の変化量と要素応力の関係は次のように書ける。

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e \quad (14)$$

$$\delta \Theta = \mathbf{H} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e \quad (15)$$

膜応力を取り除いたときに、各要素を結合してすき間のない、かつ重複することのない裁断膜が形成されるための条件は、内部節点まわりの角度の総和が 2π となること及び、膜要素間の辺長が適合することによって表現できる。支持構造物に接続する境界上ではこの条件を満たす必要はない。また、裁断上では辺長の適合条件のみを満たす必要があるものとする。以上より、可展条件を応力の線形関係式で次のように表わすことができる。

$$\text{辺長適合条件式} \quad \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\text{角度適合条件式} \quad \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad (17)$$

3. 静的剛性を考慮した形状・応力最適化手法

要素の面外変形も考慮した、9自由度の節点変位ベクトルに関する線形剛性行列を \mathbf{K}_d^e とする。また、ラグランジュ型の定義を用いると、初期応力にもなう幾何剛性行列は、次式で定義される [20, 21]。

$$\mathbf{K}_G^e = t A \mathbf{C}_d^T \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_d \quad (18)$$

ここで、 \mathbf{C}_d は要素節点変位と変位勾配を関係づける行列であり、次式で定義される。

$$\mathbf{C}_d = \frac{1}{2A} [\mathbf{C}_{di} \quad \mathbf{C}_{dj} \quad \mathbf{C}_{dk}] \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_{di} = \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & 0 \\ x_k - x_j & 0 & 0 \\ 0 & y_j - y_k & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 \\ 0 & 0 & y_j - y_k \\ 0 & 0 & x_k - x_j \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_{dj} = \begin{bmatrix} y_k - y_i & 0 & 0 \\ x_i - x_k & 0 & 0 \\ 0 & y_k - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_k & 0 \\ 0 & 0 & y_k - y_i \\ 0 & 0 & x_i - x_k \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{C}_{dk} = \begin{bmatrix} y_i - y_j & 0 & 0 \\ x_j - x_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & 0 & y_i - y_j \\ 0 & 0 & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (23)$$

自己釣合い状態にある膜面に、風荷重や雪荷重を表わす節点荷重ベクトル \mathbf{P} を作用させたときの節点変位ベクトルを \mathbf{U} とする。このとき、付加変位が微小であるという仮定の下で、 \mathbf{U} は次の線形近似式で計算できる。

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G] \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{K}_L 及び \mathbf{K}_G は、それぞれ \mathbf{K}_L^e 及び \mathbf{K}_G^e を重ね合わせて得られる系全体の線形剛性行列及び幾何剛性行列であり、 \mathbf{K}_G は $\boldsymbol{\sigma}$ の関数である。

コンプライアンス W は、付加荷重による外力仕事あるいは必ずみエネルギーの2倍であり、次式で定められる。

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{U}^T \mathbf{P} \\ &= \mathbf{U}^T [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G] \mathbf{U} \end{aligned} \quad (25)$$

W が小さいことは、作用荷重に対する変形が小さいことを意味する。したがって、 W は釣合い状態における静的剛性の指標と考えられる。

膜構造物の初期形状と応力を、静的剛性を考慮して最適化するとき、応力と形状を独立な設計変数と考え、設計変数が多くなり、最適解への収束性が悪くなる。そこで、有限要素の節点座標と目標応力レベルのみを設計変数とした「コンプライアンス最小化問題」を考える。このとき、各要素の応力は、コンプライアンス最小化問題で決定される形状の下での応力レベルからの偏差量を最小化する「応力分布最適化問題」によって決定するものとする。このような2段階の最適化手法を用いることにより、収束性を向上させることができる。

第 i 要素の x, y 方向応力及びせん断力を、それぞれ σ_{xi}, σ_{yi} 及び τ_{xyi} とし、応力分布最適化問題を次のように定式化する。

応力分布最適化問題

境界と内部の節点座標、裁断線及び目標応力レベル σ_{xo}, σ_{yo} が与えられたとき、釣合い条件(8)及び可展条件(16), (17)を満たし、偏差量

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \{ (\sigma_{xi} - \sigma_{xo})^2 + (\sigma_{yi} - \sigma_{yo})^2 + \tau_{xyi}^2 \} \quad (26)$$

を最小化する最適応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ を求めよ。

ここで、 m は要素数であり、せん断力は0に近いのが望ましいものとする。

釣合い式(8)及び可展条件(16), (17)は応力の線形関係式なので、これらをまとめて

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} \quad (27)$$

のように表わし、次のようなラグランジュ関数を定義する。

$$\Pi = R + \lambda^T \{\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{d}\} \quad (28)$$

ここで、 λ はラグランジュ乗数ベクトルである。このとき、最適応力ベクトル $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は、次の停留条件を解くことにより求められる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (30)$$

目的関数 R は応力の2次式であり、制約条件は応力の1次式なので、停留条件(29), (30)は応力の1次式である。以上より、次の最適性条件が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位行列であり、 $\boldsymbol{\sigma}_0$ は目標応力をならべたベクトルである。線形連立方程式である最適性条件(31)を一度解くだけで最適応力分布が得られるため、この過程での計算量は極めて少ない。また、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は、指定値 $\mathbf{X}_I, \sigma_{x0}, \sigma_{y0}$ を定めることに決定されるため、それらの関数である。

次に、応力と応力レベルに関する制約条件の下で、コンプライアンスを最小化するような内部節点座標と応力レベルを求めめるための問題を考える。応力に対する指定された上限値及び下限値をそれぞれ $(\)^U$ 及び $(\)^L$ で表わし、「応力分布最適化問題」の最適応力の各成分を $(\)$ で表わすと、「コンプライアンス最小化問題」は次のように定式化できる。

コンプライアンス最小化問題

境界形状及び裁断線が与えられたとき、「応力分布最適化問題」の最適応力および応力レベル和に関する制約条件

$$\sigma_x^L \leq \bar{\sigma}_{xi} \leq \sigma_x^U, \quad \sigma_y^L \leq \bar{\sigma}_{yi} \leq \sigma_y^U, \quad (32)$$

$$|\bar{\tau}_{xyi}| \leq \tau_{xy}^U \quad (33)$$

$$\sigma_{x0} + \sigma_{y0} \leq \sigma_0^U \quad (34)$$

を満たし、(25)で定められるコンプライアンスを最小化する σ_{x0}, σ_{y0} 及び内部節点座標ベクトル \mathbf{X}^I を求めよ。

この設計問題は非線形最適化問題であり、感度係数を用いた最適化アルゴリズムに基づき最適解を求めめるため、以下では、目的関数及び制約条件の設計変数に対する感度係数を求めるための式を導く。まず、目的関数であるコンプライアンスを次式のように変形する。

$$W = 2 \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G] \mathbf{U} \right) \quad (35)$$

\mathbf{X}_I の1つの成分あるいは1つの応力レベルに関する微分を $(\)'$ で表わす。(35)を設計変数で微分し、(24)を用いることにより、目的関数の感度係数は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} W' &= 2 \left\{ \mathbf{U}^T (\mathbf{P} - [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G] \mathbf{U}) - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T [\mathbf{K}'_L + \mathbf{K}'_G] \mathbf{U} \right\} \\ &= -\mathbf{U}^T [\mathbf{K}'_L + \mathbf{K}'_G] \mathbf{U} \end{aligned} \quad (36)$$

\mathbf{K}_L は \mathbf{X}_I の関数であり、 \mathbf{K}_G は \mathbf{X}_I と $\boldsymbol{\sigma}$ の関数である。また、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力最適化問題の最適応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ として定義され、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ が \mathbf{X}_I の関数であることを用いると、(36)より、 \mathbf{X}_I の第 i 成分 X_{Ii} に関する感度係数は、

$$\frac{\partial W}{\partial X_{Ii}} = -\mathbf{U}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial X_{Ii}} + \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial X_{Ii}} + \sum_{j=1}^{3m} \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \bar{\sigma}_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_j}{\partial X_{Ii}} \right] \mathbf{U} \quad (37)$$

のようになる。ここで、 $\bar{\sigma}_j$ は $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ の第 j 成分である。また、応力レベル σ_{x0} および σ_{y0} に関する感度係数は、 \mathbf{K}_L が $\boldsymbol{\sigma}$ に依存しないため、

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{x0}} = -\mathbf{U}^T \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \bar{\sigma}_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_j}{\partial \sigma_{x0}} \right] \mathbf{U} \quad (38)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{y0}} = -\mathbf{U}^T \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \bar{\sigma}_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_j}{\partial \sigma_{y0}} \right] \mathbf{U} \quad (39)$$

を用いて計算できる。

「応力分布最適化問題」の停留条件(31)を X_{Ii} で微分して整理することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial X_{Ii}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial X_{Ii}} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial X_{Ii}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial X_{Ii}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial X_{Ii}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \lambda \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

応力分布最適化問題の最適解 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ とそれに対応するラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ が得られているとき、 \mathbf{Q} と \mathbf{X}_I の関係は定義されているため、(40)を解いて $\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial X_{Ii}}$ を計算することができる。ここで、(40)の左辺の行列は、(31)を解いた段階でLU分解されているため、この段階での計算量は極めて少ない。

同様に、停留条件(31)を σ_{x0}, σ_{y0} でそれぞれ微分することにより次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \sigma_{x0}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{x0}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial \sigma_{x0}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \sigma_{y0}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{y0}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial \sigma_{y0}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

線形連立方程式(41), (42)を解くことにより $\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \sigma_{x0}}, \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \sigma_{y0}}$ が得られ、応力レベル σ_{x0}, σ_{y0} に対する目的関数の感度係数(38), (39)を求めることができる。

感度係数が得られると、数理計画法の1つの手法を用いて、コンプライアンスを最小化する内部節点座標と目標応力レベルを求めることができる。

4. 例題

スパン800 cm, ライズ320 cmの骨組で支持された対称なHP膜構造物を考える。ここで、 x, y 方向弾性係数はそれぞれ8225.0, 2725.0 kgf/cm², せん断弾性係数は712.5 kg/cm², ポアソン比は0.3とし、膜厚を0.08 cmとする。また、 $\sigma_x^L = \sigma_y^L = 20.0$ kgf/cm², $\sigma_x^U = \sigma_y^U = 200.0$ kgf/cm², $\tau_{xy}^U = 5$ kgf/cm², $\sigma_0^U = 125.0$ kgf/cm²とする。設計変数は、

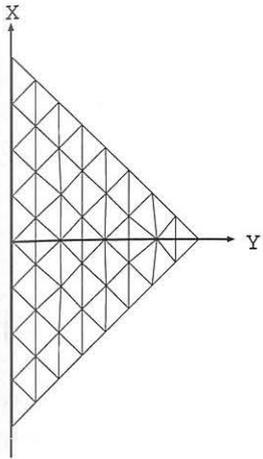


図 4: 平面図

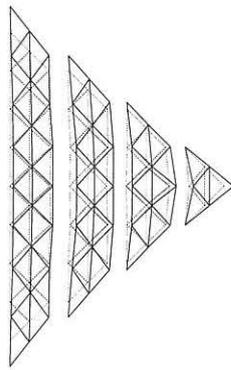


図 5: 裁断面

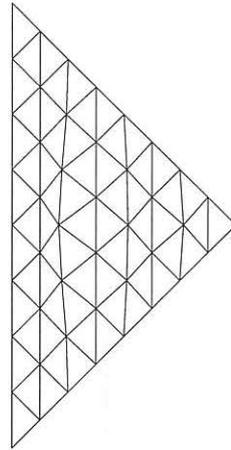


図 9: 平面図

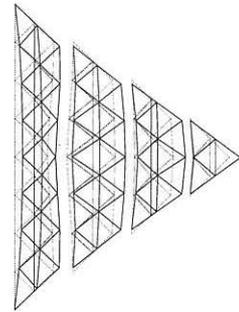


図 10: 裁断面

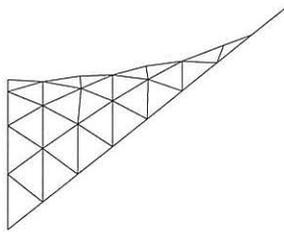


図 6: 立面図

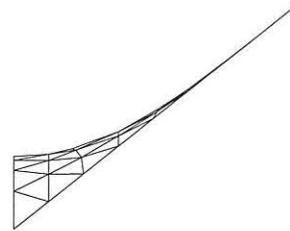


図 11: 立面図

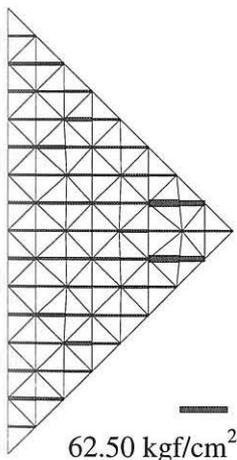


図 7: x (縦糸) 方向応力

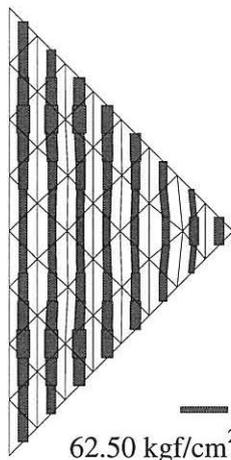


図 8: y (横糸) 方向応力

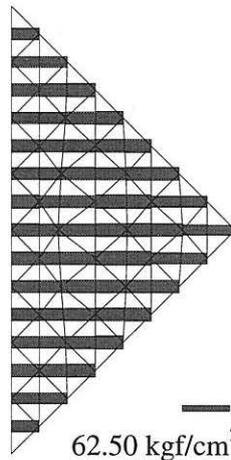


図 12: x (縦糸) 方向応力

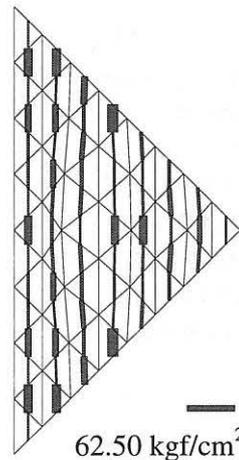


図 13: y (横糸) 方向応力

内部節点の Z 座標と裁断線上節点の Y 座標とする。さらに、コンプライアンス最小化問題の解は、逐次 2 次計画法を用いて求めた。

鉛直方向の節点荷重を 100.0 kgf としたときの最適自己釣合い状態及び裁断面を図 4~8 に示す。また、最適解における諸量を、表 1, 2 の Case (a) に示す。ここで、 $\sigma_{x_0} = 20.0, \sigma_{y_0} = 105.0 \text{ kgf/cm}^2$ であり、剛性を高めるためには、弾性係数の小さい y 方向 (横糸方向) の応力を大きくすることが有効である。

最適解の特性を考察するために、以下の 2 つの最適解での諸量を表 1, 2 の (b), (c) に示す。

Case (b) $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 62.5 \text{ kgf/cm}^2$ に固定したときの最適解。

Case (c) コンプライアンスは考慮せず、 $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 62.5 \text{ kgf/cm}^2$ とし、応力偏差量を最小化する等張力曲面に近い最適形状。

Case (a), (c) を比較すると、 x, y 方向の両方を含めた平均応力はほぼ等しいが、(a) でのコンプライアンスは (c) の場合よりかなり小さい値となる。ゆえに、本手法を用いれば、等張力曲面とするよりも剛性の高い自己釣合い状態が得られる。Case (a), (b) を比較すると、(a) では (b) の場合よりも平均応力が小さいにもかかわらず、コンプライアンスが小さい値をとり、なおかつ応力の標準偏差も小さい値をとる。ゆ

表 1: 最適解でのコンプライアンスと応力の平均値

Case	コンプライアンス (kgf · cm)	x 方向平均 (kgf)	y 方向平均 (kgf)	平均 (kgf)
(a)	9875.0	27.773	101.66	64.718
(b)	10343.8	38.109	109.93	74.020
(c)	21009.0	62.633	62.430	62.531
(d)	10580.0	130.19	41.526	85.856
(e)	12890.4	29.338	62.208	45.773

表 2: 最適解での応力の標準偏差

Case	x 方向標準偏差 (kgf)	y 方向標準偏差 (kgf)
(a)	11.280	19.647
(b)	21.234	39.848
(c)	5.4382	3.7679
(d)	8.9141	24.558
(e)	6.9912	5.5744

えに、応力レベルも設計変数とすることにより、剛性を高めることができ、なおかつ応力のばらつきを減少させることができる。

次に、弾性係数を変更した以下のような Case (d), (e) を考える。

Case d Case a において x, y 方向弾性係数を逆にした場合、すなわち x, y 方向弾性係数をそれぞれ 2725.0, 8225.0 kgf/cm² とした場合の最適解。

Case e Case a において、繊維方向のせん断力 τ_{xy} だけではなく、最大せん断力をも制約した場合の最適解。

Case (d), (e) の最適解での諸量を表 1, 2 に示す。また、Case (d), (e) の最適自己釣合い状態および裁断図をそれぞれ図 9~13 及び図 14~18 に示す。Case (d) においては $\sigma_{x0} = 105.0, \sigma_{y0} = 20.0$ kgf/cm² となり、表 1 からわかるように、裁断線の方向を変化させていないにも関わらず、弾性係数の小さい x 方向に応力が集中する結果となった。Case (a) の結果も考慮すると、剛性を高めるためには弾性係数の小さい方向の応力を大きくすることが有効であるといえる。

ところで、膜構造物では大きなせん断力が発生しない方が望ましい。そこで、Case (a) のように繊維方向のせん断力を制約するよりも、最大せん断力を制約した方がより望ましいと考えられる。第 i 要素の最大せん断力を τ_i^{\max} とすると、 τ_i^{\max} の絶対値は次式で定義できる。

$$|\tau_i^{\max}| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}}{2}\right)^2 + \tau_{xyi}^2} \quad (43)$$

以上より、Case (e) ではコンプライアンス最小化問題の制約条件 (32)~(34) に加えて次式を与える。

$$|\tau_i^{\max}| \leq \tau_{\max}^U \quad (44)$$

$|\tau_i^{\max}|$ を制約することにより、 σ_{xi} と σ_{yi} との差を制限できる。 $\tau_{\max}^U = 20.0$ kgf/cm² として最適解を求めた結果、目標最適応力レベルの最適値は $\sigma_{x0} = 21.5, \sigma_{y0} = 64.0$ kgf/cm² であり、表 1 より、各繊維方向応力の平均値の差は Case (a) と比べて小さくなっていることが確認できる。

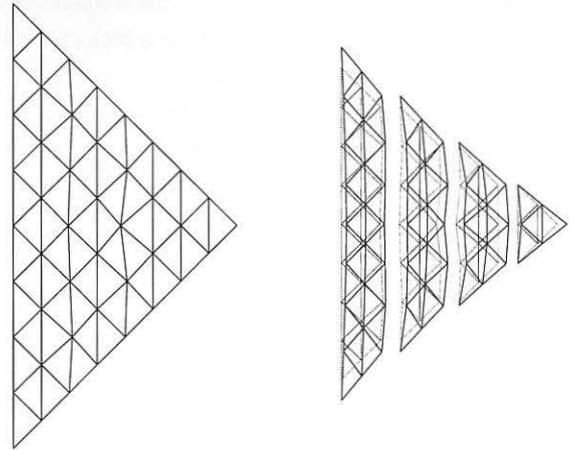


図 14: 平面図

図 15: 裁断面

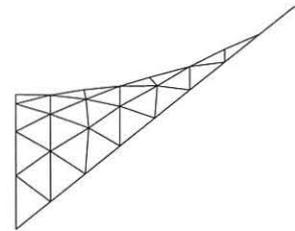


図 16: 立面図

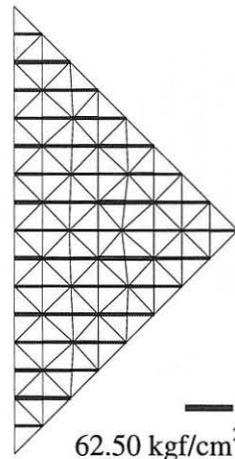


図 17: x(縦糸) 方向応力

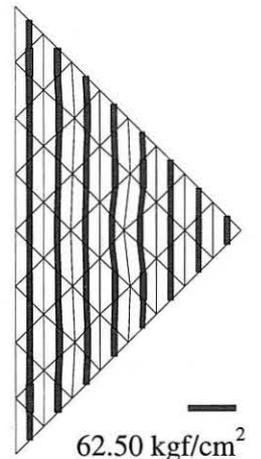


図 18: y(横糸) 方向応力

5. 結論

本論で得られた成果は以下のとおりである。

- 境界形状および裁断線が与えられた膜構造物に対し、静的載荷時の外力仕事(コンプライアンス)を最小化する初期応力と形状を求めるための、2段階の最適化手法を提案した。
- 本手法では、曲面が平面裁断膜より形成されるための可展条件を用いているため、最適裁断形状を直接的に得ることができる。また、指定応力レベルに対する最適応力は、連立1次方程式を解

いて得られるため、応力と形状の全てを同時に設計変数とする場合と比べて、本手法は計算時間と収束性の面で優れている。

3. HP 型膜構造物では、弾性剛性を向上させるためには、横糸方向の応力を大きくすることが有効である。
4. 繊維方向のせん断力に関する制約に加えて、最大せん断力の絶対値に関する制約を与えることにより、2方向の応力の平均値の差を小さくすることができる。

謝辞

本研究の一部は、平成8年度能村膜構造技術振興財団の研究助成を受けて実施されたものであり、ここに深く感謝します。また、本研究をまとめるにあたり、貴重な助言をいただいた上谷 宏二博士(京都大学教授)に謝意を表します。

参考文献

- [1] 石井 一夫, 膜構造の形状解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp2599-2600, 1984.
- [2] 大森 博司, 原型曲面の形態解析, 構造形態の解析と創生, 日本建築学会応用力学運営委員会, 構造形態の解析と創生小委員会, pp43-87, 1995.
- [3] 鈴木 俊男, 半谷 裕彦, 極小曲面の変数低減による有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 425, pp111-120, 1991.
- [4] 本間 俊雄, 西村 敏雄, 膜構造の形状決定問題, 建築構造物の設計力学と制御動力学, 応用力学シリーズ 2, 日本建築学会, pp89-123, 1994.
- [5] M. Hinata, M. Shimasaki and T. Kiyono, Numerical solution of Plateau's problem by a finite element method, Math. Comp., Vol. 28, pp45-60, 1974.
- [6] M.R. Barnes, Form-finding and analysis of prestresses nets and membranes, Comp. & Struct., Vol. 30, pp685-695, 1988.
- [7] Z. Sobotka, Optimization of shells for the membrane state, ACTA Technica ČSAV, No. 6, pp745-773, 1989.
- [8] H.-J. Schek, The force density method for form finding and computation of general networks, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 3, pp115-134, 1974.
- [9] R.B. Harber and J.F. Abel, Initial equilibrium solution methods for cable reinforced members, Part I - Formulations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 30, pp263-284, 1982.
- [10] K-U. Bletzinger, Shape optimization by homotopy methods with special application to membrane structures, in: Proc. 6th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA, pp122-129, 1996.
- [11] K-U. Bletzinger, WCSMO-1, Proc. First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, pp563-568, 1995.
- [12] 石井 一夫, 曲面の平面への近似展開, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp783-784, 1972.
- [13] J.L. Meek and K.Y. Tan, Post-formfinding determination of geodesic lines in cutting pattern design for membrane structures, Space Struct., Vol. 2, pp231-239, 1986.
- [14] 安宅 信行, 小塚 裕一, 膜構造における膜曲面の測地線の決定法について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp2603-2604, 1984.
- [15] 坪田 張二, 吉田 新, 黒川 泰嗣, 裁断図をもとにした膜構造物の実初期つり合い状態の解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 373, pp101-110, 1987.
- [16] 坪田 張二, 吉田 新, 最適化手法を用いた膜構造物の裁断図解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 395, pp101-111, 1989.
- [17] 大崎 純, 上谷 宏二, 高谷 真次, 逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法, 日本建築学会構造系論文集, 488号, 1996.
- [18] K. Uetani, E. Fujii and M. Ohsaki, Initial stress field determination of membranes using optimization technique, Proc. ICCSS, Taipei, pp301-306, 1997.
- [19] O. C. Zienkiewicz, マトリックス有限要素法, 培風館, 1984.
- [20] 鷺津 久一郎 他編, 有限要素法ハンドブック, I 基礎編, 培風館, 1981.
- [21] 鷺津 久一郎 他編, 有限要素法ハンドブック, II 応用編, 培風館, 1983.

Optimization of initial stresses and cutting patterns of membrane structures considering stiffness under static loads

Makoto Ohsaki *1
Makoto Yamakawa *2

SYNOPSIS

Optimal cutting patterns and the optimal initial stresses of a frame-supported membrane are found considering the stiffness of the membrane under specified static loads. The explicit developability conditions are used for a curved surface to be reduced to a set of plane cutting patterns after removing the initial stresses. In the first stage of the proposed method, an inverse problem is formulated to directly find prestresses as well as the cutting pattern for specified nodal coordinates and the stress level at the equilibrium shape. Then an optimal shape and stress levels are found for minimizing the external work, where the stresses are found by solving the stress optimization problem in the first stage.

*1 Associate Professor, Kyoto University

*2 Graduate Student, Kyoto University