

石鹼膜有限要素構造を先行状態とする

膜構造初期形状決定に関する考察

劉 磊^{*1}

帯屋洋之^{*2}

井嶋克志^{*3}

後藤茂男^{*4}

梗 概

すでに、任意の内圧を受ける任意の境界の石鹼膜形状の決定には、幾何剛性のみの等張力有限要素（石鹼膜有限要素）構造としての接線剛性法による解析法が極めて有効であることが立証されている。

しかしながら、得られた解は、等張力曲面として十分な収束状態を示しても、平面有限要素に起因する不可避的な残差不平衡力を有しており、このような状態を実剛性を持つ膜構造の初期形状決定のための先行状態とした場合、残差不平衡力は、前提とする等張力からの張力偏差へと変換され、若干の形状変化を発生することになる。

本研究は、これらの張力偏差と形状変化が実用的に十分に小さいことを検証し、石鹼膜形状解析において確実に0へと収束する不平衡力の法線方向成分を収束判定の指標とすることにより、実膜張付へと移行する曲面形状の収束段階決定の理論的整合性を得ることを目的とするものである。

1. まえがき

有限の大きさの平面要素を用いての等張力曲面構造解析においては、全要素等張力という条件下では、全節点の不平衡力が完全に0となる厳密な平衡状態は存在せず、各節点における法線方向の不平衡力は0に収束しても曲率が急変する部分の接平面方向の不平衡力は、最初の数回で激減した後は漸減傾向を示し、一定値以下となることはないが、以降の反復では、解曲面はほとんど変化しなくなる現象が見られる。

このような状態を先行状態として、実剛性のある膜構造の初期形状決定解析へ移行した場合、これらの不平衡力は急激に0へと収束し、微小な節点変位と要素変形により、新たな平衡状態が得られるが、石鹼膜による先行状態からの曲面形状の変化と各要素間の前提とした等張力からの張力偏差が発生することになる。

従って、石鹼膜有限要素を用いた接線剛性法による膜構造の初期形状解析手法の実用性の検証には、先行

石鹼膜形状からの形状変化と不可避的に発生する張力偏差が、十分に小さいことを立証することが重要となる。

また、接線剛性法の石鹼膜構造の形状解析においては、最大不平衡力は数回の反復以降は漸減傾向を示すので、どの反復段階で実膜張付へと移行するかという明確な判断条件としては問題があり、必要以上の反復は、曲率の急変部分の節点が曲面内方向で周辺部へと拡散移動するのみで、有限個数の節点による曲面形状の策定という観点からは、各節点の不均等な配置が次第に顕著となるので好ましくないことはあきらかである。

本研究では、いくつかの試算の結果、最大不平衡力の合力の残差が安定すれば、どの段階からでも実膜張付による膜構造の初期形状解析へと移動しても、石鹼膜による先行形状からの形状変化、張力偏差とも実用的に十分に容認できる値となることを実証するとともに、各反復段階における、不平衡力の法線方向成分を

*1 佐賀大学大学院工学系研究科博士課程

*2 佐賀大学理工学部建設工学科助手

*3 佐賀大学理工学部建設工学科助教授

*4 佐賀大学理工学部建設工学科教授

求め、その最大値の収束を以て石鹼膜の収束と見なし、実膜解析移行への条件とすることを提案している。

このことは、不平衡力の法線方向の成分が収束すれば解曲面の面外方向への変化はなくなり、接平面方向の残差不平衡力は、節点の面内移動要因となるのみで、解としての曲面変化は微小となることから妥当であり、統一理論による膜構造の汎用解析法として、初期形状策定のための合理性のあるアルゴリズムを作成することが可能となった。

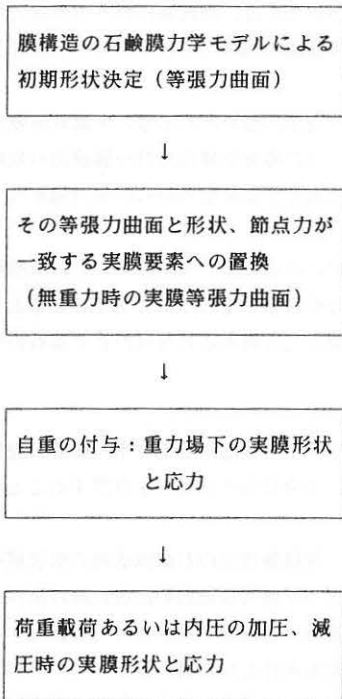


図-1 膜構造形状決定、構造解析プログラムの流れ図

2. 三角形石鹼膜要素の接線剛性方程式について

共通座標系に関する要素の節点ベクトルを U 、要素座標系に関する要素ベクトル S として平衡力条件式を

$$U = \alpha S \quad (1)$$

と表せば、その微小変動量の関係より、石鹼膜や軸力線構造に見られるような、要素力剛性のない幾何剛性のみで要素力が一定の場合

$$\delta U = \delta \alpha S = K_c \delta u \quad (2)$$

要素の接線剛性方程式が得られる。

三角形の頂点 i に対応する辺に沿う張力 N_i は、等張力を σt 、その垂線の長さを a_i 、垂線の足の左右の辺長を c_i 、 d_i (図-1) とすれば、

$$N_i = \sigma t (a_i - c_i / a_i) / 2 \quad (3)$$

となる。

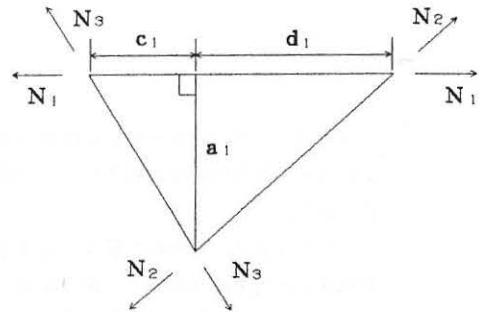


図-2 辺方向の節点力

三角形要素の辺張力 N_1 、 N_2 、 N_3 による接線幾何剛性マトリックスは三辺をそれぞれ軸方向力部材と考えたときのトラスブロックの接線幾何剛性マトリックスと全く同一となる。

すなわち、辺 i の共通座標系に対する方向余弦を α_i 、 β_i 、 γ_i とすれば、その一端をを固定した軸方向力部材としての接線幾何剛性マトリックスは

$$K_i = N_i / l_i \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i^2 & -\alpha_i \beta_i & -\alpha_i \gamma_i \\ -\alpha_i \beta_i & 1 - \beta_i^2 & -\beta_i \gamma_i \\ -\alpha_i \gamma_i & -\beta_i \gamma_i & 1 - \gamma_i^2 \end{bmatrix}_i \quad (5)$$

となり、これを用いて、式(2) 三角形要素の接線剛性方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 + K_3 & K_3 & K_2 \\ K_3 & K_1 + K_3 & K_1 \\ K_2 & K_1 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. 内圧による面外節点力と不平衡力の法線方向成分

一定内圧を受ける空気膜の節点外力は、一要素に作用する内圧を3つの節点に等分したかたちのベクトル積を、各節点についてかね合わせるにより算定できる。

$$P = (u_2 - u_1) \times (u_3 - u_1) p / 6 \quad (6)$$

また、空気膜構造に作用する内圧を節点外力として離散化した場合、曲面形状に追従する非保存力となるため、各反復過程における不平衡力を、曲面の法線方向と接平面内方向に分解して等張力曲面解析における収束過程を考察することは、極めて有用である。

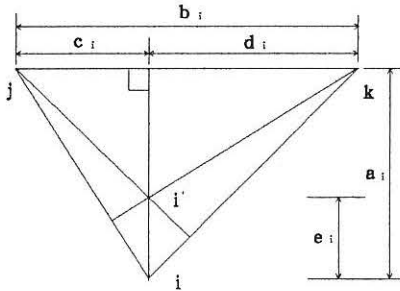


図-3 三角形要素の基本寸法

図-3のような三角形要素において、 $j \rightarrow k$ の方向余弦を α_i 、 $i \rightarrow i'$ の方向余弦を β_i とすれば、この要素に関する法線方向余弦は式(8)のように表すことができる。

$$\gamma_i = \alpha_i \times \beta_i \quad (7)$$

$$D_i = \gamma_i / |\gamma_i| \quad (8)$$

よって、各節点における不平衡力の法線方向成分は、その節点において重ね合わされた全方向の不平衡力を、法線方向余弦 D を重ね合わせた節点法線ベクトルで変換することより算定できる

4. 石鹼膜三角形要素により形成される曲面形状

三角形要素24個による正六角形ドーム

正六角形の一辺を4m、単位幅膜張力を $\sigma t = 25.0$ kgf/mとして、内圧を 10.0 kgf/m²与えて等張力曲面を求めた。

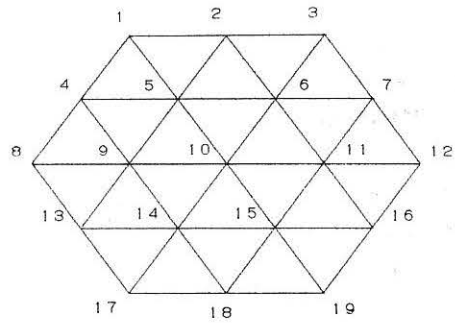


図-4 正六角形ドームの節点番号

表-1 収束過程と最大不平衡力 (kgf)

反復回数	辺張力幾何剛性	
	UF_1	UF_2
1	34.641	34.641
2	5.242	5.218
3	0.978	0.956
4	0.747	0.182
5	0.743	0.031
6	0.744	0.005
7	0.744	0.001
8	0.744	0.000
9	0.744	0.000

表-1は収束過程の全方向(UF_1)と法線方向(UF_2)の最大不平衡力を示している。

等張力曲面を有限個の三角形平面石鹼膜要素で近似する場合には、理論的には不平衡力は漸減して定値に収束しても0には成り得ないのだが、本手法によれば、有意性を持つ法線方向成分の不平衡力が確実に0に収束していることが分かる。

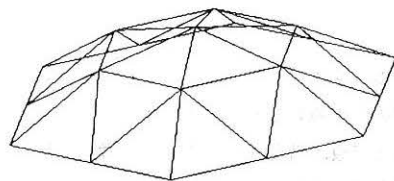


図-5 正六角形ドームの収束形状

5. 要素力剛性の付与による残差不平衡力の要素張力
偏差への変換

要素剛性のない石鹼膜においては、等張力である石鹼膜応力 σ とその時点の要素寸法によって要素力は決まっても無応力時の寸法というものは存在しない、したがって、実膜要素の要素力剛性を無応力時の寸法を基準とする接線剛性と仮定すれば、置き換えるべき石鹼膜要素と要素力を等しくする実膜要素の応力 σ_0 及びひずみ ε は

$$\sigma_0 = (1 + \varepsilon) \sigma \quad (11)$$

$$\varepsilon = (1 - \nu) \sigma_0 / E \quad (12)$$

より求めなければならない。

1) 実膜要素の張り付け

ここでは正六角形を96分割した場合について石鹼膜としての等張力曲面計算を行い、その反復回数 $n = 1, 2, \dots, 10$ の各段階で等方性で弾性係数と膜厚さの積が $E t = 0.125 \text{tf/m}$ 、ポアソン比が0.6となる膜要素を石鹼膜要素と置き換え、膜構造としての無重力時の形状を求めた。

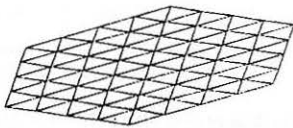


図-6 初期形状

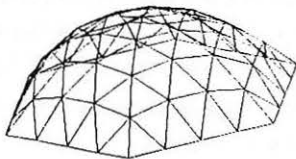


図-7 収束形状

表-2の $n=0$ の縦列は、置換前の石鹼膜構造(幾何剛性のみ)としての不平衡力の収束形状、横列はその各収束段階を先行状態とする膜要素置換後の収束状況を示したもので、許容不平衡力は 0.001kgf としている。

表-2 実膜要素置換後の収束状況(kgf)

n	0		1	2	3
	全方	接線方			
δF_0	10.825	10.825			
δF_1	4.527	4.527	1.200	0.091	0.009
δF_2	1.309	0.946	0.181	0.020	0.004
δF_3	0.905	0.222	0.058	0.007	0.000
δF_4	0.905	0.045	0.045	0.005	0.000
δF_5	0.896	0.020	0.040	0.005	0.000
δF_6	0.884	0.009	0.035	0.003	0.000
δF_7	0.870	0.004	0.031	0.003	0.000
δF_8	0.856	0.002	0.028	0.002	0.000
δF_9	0.842	0.000	0.025	0.002	0.000
δF_{10}	0.827	0.000	0.023	0.002	0.000

表-3 節点の最大移動と最大応力偏差

n	Δw (mm)	$(\sigma t)_1$ kgf/m	$(\sigma t)_2$ kgf/m	$(\sigma t)_1 - (\sigma t)_2$ (kgf/m)
1	98.58	31.77	29.88	1.89
2	24.10	28.29	27.83	0.46
3	9.90	27.12	26.95	0.17
4	7.50	27.01	26.83	0.18
5	5.76	26.97	26.79	0.18
6	4.67	26.95	26.76	0.19
7	4.60	26.93	26.74	0.19
8	4.00	26.92	26.73	0.19
9	3.60	26.92	26.71	0.19
10	3.20	26.91	26.71	0.20

また、表-3はそれぞれの膜構造としての収束状態における先行状態からの節点の最大移動量 Δw (mm)、各要素の最大及び最小主張力 $(\sigma t)_1$ 、 $(\sigma t)_2$ を示したものである。なおこの場合、石鹼膜の単位幅膜張力 25.0kgf/m に対する実膜構造としての張力は式(11)、(12)より $\sigma_0 t = 27.91 \text{kgf/m}$ となる。

膜構造の無重力時の完成形状測定のための幾何剛性
のみの石鹸膜形状計算の反復回数は、不平衡力が急減
して安定するせいぜい4回位で十分であり、すなわち
不平衡力の法線方向成分が収束すれば、節点は等張力
曲面上にあり正解値とすることができる。

これより膜要素剛性を付与して1~2回の反復では
ほぼ均一な主張力の目的状態が得られていることがわか
る。

この計算例より、石鹸膜形状解析において確実に0
へと収束する不平衡力の法線方向成分を収束判定を行
った後、実膜張り付へと移行することは極めて合理であ
ることがわかった。

2) 要素剛性の付与による残差不平衡力の要素張力
偏差への変換

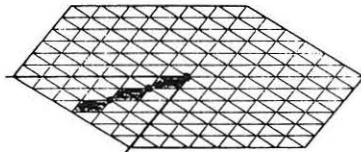


図-8 初期平面形状

図-8のような初期平面に対して膜張力25.0 kgf/m、
内圧12.0kgf/m²として、等張力曲面を求めたのちの実
膜要素の張り付け、平衡力（収束誤差）と応力偏差、
平衡力（収束誤差）と節点変位、反復回数と応力偏差、
反復回数と節点変位の関係を調べた。

6分割 単位膜張力25.0kgf/m、内圧12.0kgf/m²
反復回数に対応する応力偏差(kgf/m)

要素 番号	反 復 回 数				
	1	2	3	4	5
6	2.13	0.6	0.29	0.29	0.3
16	0.47	0.07	0	0.02	0.02
24	1.76	0.39	0.08	0.00	0.01
30	0.67	0.21	0.05	0.04	0.05
34	0.21	0.03	0	0.01	0.01
36	0.02	0	0	0	0

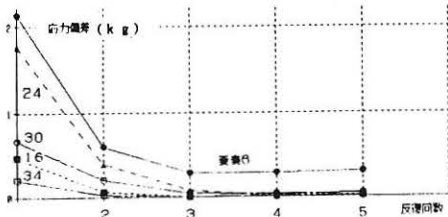


図-9 反復回数と応力偏差

図-9によれば、等張力曲面解析における反復回数

が、2回までの範囲では、実膜張り付け後の応力偏差
の値、ばらつき共に大きい、3回以後は隅角付近節
点を除き、応力偏差は小さくなり、ばらつきがなくな
っていることがわかる。

6分割 単位膜張力25.0kgf/m、内圧12.0kgf/m²
反復回数に対応する節点変位(cm)

節点 番号	反 復 回 数				
	1	2	3	4	5
16	0.1034	0.0229	0.0063	0.0026	0.0016
24	0.0956	0.0233	0.0077	0.0042	0.0031
28	0.0839	0.0230	0.0080	0.0047	0.0036

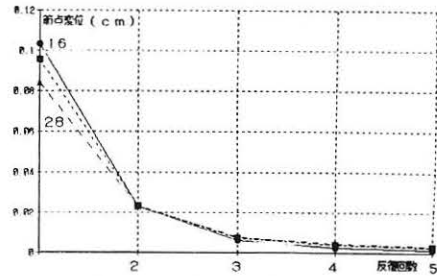


図-10 反復回数と節点変位

図-10に示したように石鹸膜構造が1、2回までの
反復計算で実膜要素を張り付けても節点変位が大きく、
3回以上反復計算すれば、実膜要素の張り付け後、節
点の変位が小さくなるのがわかる。

残差不平衡力に対応する応力偏差(kgf/m)

要素 番号	不 平 衡 力 (kgf)				
	2.487	0.796	0.282	0.279	0.277
6	2.13	0.6	0.29	0.29	0.3
16	0.47	0.07	0	0.02	0.02
24	1.76	0.39	0.08	0.00	0.01
30	0.67	0.21	0.05	0.04	0.05
34	0.21	0.03	0	0.01	0.01
36	0.02	0	0	0	0

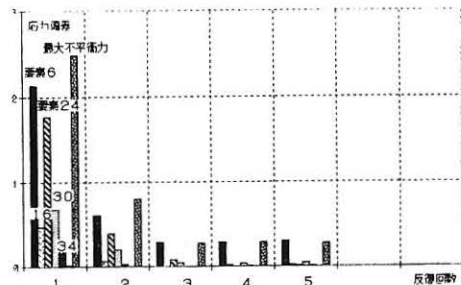


図-11 収束誤差(不平衡力)と応力偏差

図-11に示したように、石鹸膜構造の法線方向不平衡力が収束しない状態で、実膜要素を張り付けると、実膜の応力偏差が大きい、石鹸膜構造の法線方向不平衡力が収束すれば、実膜張り付け後実膜の応力偏差が小さくなるのがわかる。

3) 計算例

(1) 周辺固定されたH形を三角形要素分割で、膜張力 20.0 kgf/m として、内圧 15.0 kgf/m^2 を与えた石鹸膜の収束形状より、弾性係数と膜厚さの積が $E t = 0.14 \text{ tf/m}$ 、ポアソン比が 0.4 となる膜要素を石鹸膜要素と置き換え、膜構造としての無重力時の形状と自重及び外力下での形状を求めた。

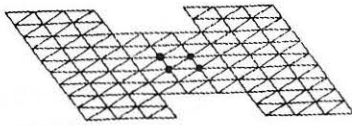


図-12 初期形状

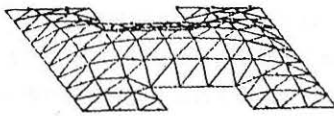


図-13 無重力時実膜曲面形状

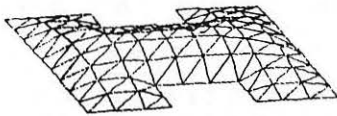


図-14 重力作用時実膜曲面形状

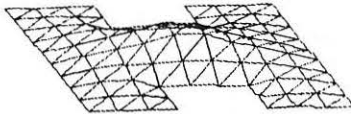


図-15 自重と荷重作用時実膜曲面形状

H形無重力時実膜形状(図-13)を先行状態として、膜自重力 10 kgf/m^2 を与え、節点43, 44, 49, 50に垂直方向力 8 kg を与え、図-14のような収束形状を得ることができた。

表-4

最大不平衡力 (kgf)		
反復回数 r	H 形	
	石鹸膜 (法線)	実 膜
0	2.400	0.3870
1	0.722	0.0006
2	0.398	
3	0.097	
4	0.008	

表-5

最大不平衡力 (kgf)		
反復回数 r	H 形	
	自重作用	荷重作用
0	0.477	8.000
1	0.068	25.796
2	0.014	3.623
3	0.002	0.380
4		0.012

(2) 周辺固定された十字形を三角形要素分割で、膜張力 20.0 kgf/m として、内圧 15.0 kgf/m^2 を与えた石鹸膜の収束形状より、弾性係数と膜厚さの積が $E t = 0.14 \text{ tf/m}$ 、ポアソン比が 0.4 となる膜要素を石鹸膜要素と置き換え、膜構造としての無重力時の形状と自重及び外力下での形状を求めた。

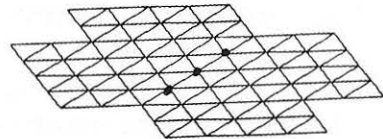


図-16 初期形状

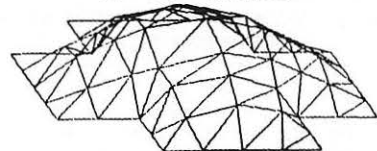


図-17 無重力時実膜曲面形状

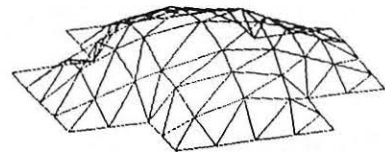


図-18 重力作用時実膜曲面形状

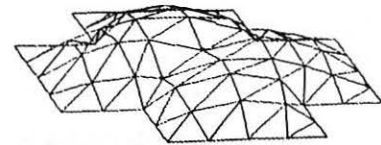


図-19 自重と荷重作用時実膜曲面形状

十字形無重力時実膜形状 (図-17) を先行状態として、膜自重 6 kgf/m^2 を与え、節点 25, 33, 41 に垂直方向力 15 kg を与え、図-17 のような収束形状を得ることができた。

表-6

最大不平衡力 (kgf)		
反復回数 r	十字形	
	石鹸膜 (法線)	実膜
0	5.400	0.642
1	2.458	0.020
2	0.904	0.003
3	0.083	
4	0.012	

表-7

最大不平衡力 (kgf)		
反復回数 r	十字形	
	自重作用	荷重作用
0	0.685	15.000
1	0.107	4.856
2	0.013	1.484
3	0.002	0.554
4		0.031

(3) 周辺固定された菱形を三角形要素分割で、膜張力 20.0 kgf/m として、内圧 12.0 kgf/m^2 を与えた石鹸膜の収束形状より、弾性係数と膜厚さの積が $E t = 0.15 \text{ tf/m}$ 、ポアソン比が 0.45 となる膜要素を石鹸膜要素と置き換え、対角線に線材要素を与え、膜構造としての無重力時の形状を求めた。



図-20 初期形状

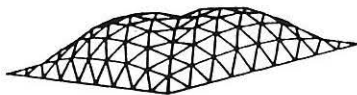


図-21 菱形無重力時実膜曲面形状

表-8

最大不平衡力 (kgf)		
反復回数 r	菱形	
	石鹸膜 (法線方向)	実膜
0	5.774	0.357
1	1.301	0.011
2	0.442	0.001
3	0.078	
4	0.017	

6. 結言

接線剛性法によれば、三角形膜要素に関する接線剛性方程式の接線幾何剛性部分のみを用いることにより、全要素について張力一定となる石鹸膜等張力曲面を求めることができる。従って、等張力曲面解析による形状決定より、実剛性を持つ膜要素の付与、各種荷重に対する変位応答解析に至る一連の流れを、すべて同一のアルゴリズムで処理することが可能となり、実用的な汎用膜構造解析プログラムを明解な理論構成のもとに構築することができる。

本研究においては、石鹸膜要素による等張力曲面解析において不可避免的に発生する残留不平衡力、及びこれによって実膜張付後に生じる張力偏差について数値計算により検証を行った。

等張力曲面解析における不平衡力は最初の数回の反復計算で激減した後、漸減傾向を示し、完全に収束しない。これに対し、不平衡力の法線方向成分は全方向に関する不平衡力が漸減傾向に移るのとほぼ同時に完全に収束するため、不平衡力は各節点における接平面方向のみに残留していることになる。このことは、等張力曲面を有限個の平面要素で近似していることに起因するものと考えられ、曲面上の曲率の大きな部分にある節点ほど大きな不平衡力が残留する傾向がみられる。従って、法線方向収束後も反復計算を続行すれば、等張力曲面上を節点が移動するのみで、必要以上の反復はメッシュ分割上の有意性を失うことになる。

また、実膜張付後の張力偏差及び形状変化については、等張力曲面解析において全方向の不平衡力が漸減傾向に移行した後の解を初期形状として用いれば、実用上問題のない十分に小さなものとなることが確認できた。

以上により、内圧を受ける空気膜構造の構造解析に用いる初期形状としては、等張力曲面解析における不平衡力の漸減傾向の移行、あるいは不平衡力の法線方向成分の完全収束を判断基準として得られた解を用いるのが、最も妥当であるとの結論を得た。

さらに、節点外力が曲面形状の変化に依存する法線方向に作用する非保存力となることを考えあわせると、等張力曲面解析では面内方向の変位を拘束し、法線方向のみの1自由度系へ低次元化処理を行うことは極めて合理的であると考えられる。

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費の補助を受けて行ったものである。

(参考文献)

- 1) 後藤茂男、荒牧軍治、井嶋克志、深江葉子：要素剛性分離の手法による等張力曲面の形状解析と膜構造解析、構造工学論文集Vol. 37A, 1991. 3
- 2) 後藤茂男、荒牧軍治、井嶋克志、深江葉子：要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析、構造工学論文集Vol. 37A, 1991. 3
- 3) 後藤茂男：立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化、土木学会論文報告集、No. 335, pp 1-11, 1983

- 4) 帯屋洋之、劉磊、井嶋克志、後藤茂男：等張力曲面解析における接線剛性、膜構造研究論文集 '94, pp1-9, 1994
- 5) 劉磊、帯屋洋之、藤澤、後藤茂男：石鹸膜四面体要素による等張力曲面の形状解析、膜構造研究論文集 '94, pp1-10, 1994
- 6) 正岡典夫、石井一夫：低次四辺形膜要素による形状解析について、膜構造研究論文集 '90, N0. 4
- 7) 正岡典夫、石井一夫：低次四辺形膜要素による応力変形解析、膜構造研究論文集 '91, N0. 5
- 8) 鈴木俊男、半谷裕彦：等張力曲面の数値解析、膜構造研究論文集 '89, N0. 3
- 9) 低平地防災技術研究会：膜構造建築物の現状と展望、1989. 12

A STUDY ON DETERMINATING SHAPE OF THE SOAP FILM AS THE INITIAL SHAPE
OF A MEMBRANE STRUCTURE

Rei RIU*1

Hiroyuki OBIYA*2

Katsushi IJMA*3

Shigeo GOTO*4

SYNOPSIS

It had been proved that the tangent stiffness method was efficiency and useful on determinating shape of the soap film as the initial shape of membrane structures.

In this paper, it shows the realationship between unbalance force or iterate times of initial shape of membrane structure(soap film) and tension deviations or nodal displacements of an membrane structure.

It is important to determinate shape of soap film according volume of unbalance force in the inner repressure direction.

*1 Graduate Student, Saga Univesity

*2 Assistant, Saga University

*3 Associate Professor, Saga University

*4 Prefessor, Saga University