

膜の材料非線形性を考慮した応力・変形解析

— 構成則に直交異方性弾性体と織構造格子モデルを用いた場合の比較 —

加藤史郎*¹
吉野達矢*²

梗概

著者らは、膜材料の材料非線形性を表現するために、織構造格子モデルに基づいた構成則を、また、幾何学的非線形性を考慮した応力・変形解析を行うために、8節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素解析手法を提案してきた。そこで、本報では、構成則として直交異方性弾性体のモデルと織構造格子モデルを用いて応力・変形解析を行い、両者の結果を比較する。3kgf/cmあるいは5kgf/cmの初期張力が導入された偏平HP膜構造物に外力として積雪荷重が作用する場合を想定し、2つの構成則の違いによって載荷時の応力分布がどのように異なるか、また、除荷後の初期張力がどのように異なるかについて述べる。

1. 序

膜材料の応力・ひずみ関係は、非線形性が強いことから、また、膜材料を用いて形成された曲面は比較的変形が大きいことから、材料非線形性と幾何学的非線形性を考慮する必要がある。しかし、通常の設計では、材料線形・幾何学的非線形として解析されている場合が多い。したがって、実際の膜構造物に生じる応力等を正確に表現できていない可能性が考えられることから、この点を考慮した研究が続けられてきた。この経緯は石井^{1,2)}による研究・解説により的確にまとめられている。

膜の材料非線形性を考慮した応力・変形解析には次の研究がある。織布を立体トラスとしての弾性体でモデル化し、FEMで平面膜を解析した南ら³⁾の研究、ほぼ南と同様な方法でFEMを用いて、平面膜とHP曲面膜を解析した西川ら^{4,5)}の研究、引張にのみ抵抗する糸と弾塑性特性を有するコーティング織布のモデルを用いて亀裂の進展を分析した小松⁶⁾の研究、織布を単純な立体的線材に簡略化し、シリンダー形状の膜を解析した萱嶋・石井⁷⁾の研究、応力・ひずみ関係を多段線

形近似し、面外力を受ける矩形平面膜をフーリエ級数で解析した南⁸⁾の研究、また、多段線形近似方式をFEMへ導入し、面外力を受けるHP曲面膜へ適用した日野・石井⁹⁾の研究などがあげられる。

一方、(社)日本膜構造協会により、1993年に膜材料面内剪断剛性試験方法¹⁰⁾が、1995年に膜材料弾性定数試験方法¹¹⁾が制定された。これにより、膜材料を直交異方性弾性体として解析する標準的な方法が示された。ただし、この弾性定数の使用に当たっては、安定した初期張力状態が形成された膜構造に外力が作用する場合¹²⁾を想定している。

著者らは、応力・ひずみ関係の非線形性を表現することを目的として次に示す研究を行ってきた。B. Meffertら¹³⁾により提案されているモデルに準拠した織構造格子モデル¹⁴⁾を提案した。次に、より適合度の高いモデルとして、H. J. Schock¹⁵⁾により提案されているモデルに準拠した織構造格子モデル¹⁶⁾を提案した。このモデルでは、膜材料が繰り返し載荷を受ける場合^{17,19)}や膜材料に作用する応力の比が載荷ごとに変化する場合^{18,19)}においても実験結果の応力・ひずみ関係を表

*1 豊橋技術科学大学建設工学系・教授，工博

*2 豊橋技術科学大学機械・構造システム工学専攻・大学院生，工修

現できることを示した。さらに、H. J. Schock のモデルに基づいた織構造格子モデル¹⁶⁾を8節点アイソパラメトリック曲面要素を用いた有限要素解析手法²⁰⁾に導入し、材料非線形性を考慮した応力・変形解析例として、2軸引張試験のシミュレーション²¹⁾を行った。

また、膜構造の形状解析および応力・変形解析を行うことを目的として次に示すことを行ってきた。定ひずみ三角形要素に織構造格子モデル¹⁶⁾を導入し、面外力の載荷と除荷を受けるカテナイド曲面の応力・変形解析^{22,23)}を行った。しかし、三角形定ひずみ要素は応力分布の不均一性などの問題が生じることがあることから、応力の解析精度のより高い8節点アイソパラメトリック要素を用いた増分型剛性方程式の誘導²⁰⁾を行った。解析例として等張力および異方張力曲面の形状解析を行った。

そこで本研究では、構成則に直交異方性弾性体¹¹⁾と材料非線形性を考慮した織構造格子モデル¹⁶⁾の2つを用い、初期張力が3kgf/cmと5kgf/cmのHP曲面に対し、積雪荷重を想定した面外力が作用する応力・変形解析を行う。面外力の載荷後の形状、除荷後の形状および初期張力の変化を2つの方法で求め、それらがどのように異なるかについて比較を行う。ただし、直交異方性弾性体の構成則に用いる各定数は、日本膜構造協会が定める2つの試験方法^{10,11)}に基づいて得られた値¹⁹⁾を用いる。織構造格子モデルにはH. J. Schock のモデルに基づいた構成則¹⁶⁾を用い、モデルを構成する各部分材の諸定数は文献19)で示す値を用いる。なお、応力・変形解析には8節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法²⁰⁾を用いる。

2 膜材料の構成則

本報では、恒久建築物に使用されるA種の膜材料を対象とする。解析に当たり、膜材料の応力・ひずみ関係を(1)直交異方性弾性体と仮定した構成則と(2)織構造格子モデルを用いた構成則の2つを用いる。

2.1 直交異方性弾性体

2.1.1 直交異方性弾性体の構成則

縦糸と横糸のひずみを ε_ξ , ε_η 、縦糸と横糸がなす角度の変化量である剪断ひずみを γ で表す。このひずみに対応する応力(断面力)を N_ξ , N_η , $N_{\xi\eta}$ とすると、直交注) 膜材料では応力をkgf/cmで表わすことが慣用となっているのでここではそれに従った。

異方性弾性体の構成則は次式となる。

$$\begin{aligned} N_\xi &= E_{11} \cdot \varepsilon_\xi + E_{12} \cdot \varepsilon_\eta \\ N_\eta &= E_{21} \cdot \varepsilon_\xi + E_{22} \cdot \varepsilon_\eta \\ N_{\xi\eta} &= G \cdot t \cdot \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_\xi \cdot t}{v} \quad , \quad E_{22} = \frac{E_\eta \cdot t}{v} \\ E_{12} &= \frac{v_\eta \cdot E_\xi \cdot t}{v} \quad , \quad E_{21} = \frac{v_\xi \cdot E_\eta \cdot t}{v} \\ v &= 1 - v_\xi \cdot v_\eta \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $E_{21} = E_{12}$ となるので、 $v_\eta \cdot E_\xi = v_\xi \cdot E_\eta$ の条件が必要である。 $E_\xi \cdot t$, $E_\eta \cdot t$ は、縦糸と横糸方向の単位長さあたりの引張剛性を、 v_ξ , v_η は、縦糸と横糸方向のポアソン係数を、 $G \cdot t$ は面内剪断剛性を表している。

2.1.2 直交異方性弾性体の構成則の諸定数の決定

著者らは日本膜構造協会が定める膜構造弾性定数試験方法¹¹⁾と膜材料剪断剛性試験法¹⁰⁾に基づいて実験¹⁹⁾を行い、構成則の諸定数を求めたので、ここにその値を示す。

$$\begin{aligned} E_\xi \cdot t &= 1349.9 \quad (\text{kgf/cm}) \\ E_\eta \cdot t &= 772.1 \quad (\text{kgf/cm}) \\ v_\xi &= 0.919, v_\eta = 0.526 \\ G \cdot t &= 70.0 \quad (\text{kgf/cm}) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 織構造格子モデル¹⁶⁾

2.2.1 単位要素(織構造格子モデル)による構成則

H.J.Schock³⁾により提案されているモデルを拡張した織構造格子モデル(図1)に基づいて構成則の定式化を既報¹⁶⁾において行った。この単位要素は縦糸方向に長さ a_0 、横糸方向に b_0 の長方形である。グラスファイバーで撚り合わされている縦糸と横糸のそれぞれを表すために、縦糸方向にはA部材、AA部材、A部材が、横糸にはB部材、BB部材、B部材がそれぞれ2組ずつ配置されている。縦糸と横糸は、交点Kで束材Vによって結合されているものとする。これらは、主に膜材料の1軸・2軸の特性とクリンプ交換を表すための要素

である。一方、縦糸と横糸で構成される薄いシートの裏と表に塗布されるコーティングの特性を表す部材として、縦糸方向にC部材、横糸方向にD部材、ならびに、斜め材としてE、F部材が配置される。C、D部材は、主にコーティング材の伸び作用に、E、F部材はコーティング材の剪断並びに伸び作用に関連する。コーティング材は、縦糸と横糸に挟まれた領域にも浸潤しているため、縦糸と横糸のなす角の変化に抵抗すると想定される。したがって、H.J.Schock³⁾のモデルでは採用されていないが純剪断を表す剪断抵抗面要素 R_t が仮定されている。これより、膜材全体としての面内剪断作用は、先のE、F部材とこの剪断抵抗面要素 R_t の和で表される。

2. 2. 2 仮想変位の原理による増分型構成式の誘導の概略

構成式の誘導は既報⁴⁾が詳しいので、本報ではその概略を再記するに留める。

縦糸と横糸の仮想増分ひずみを $\delta(\Delta\bar{\epsilon}_\xi)$, $\delta(\Delta\bar{\epsilon}_\eta)$ 、また、仮想剪断ひずみを $\delta(\Delta\gamma)$ とする。この増分ひずみに対応する応力(断面力)を N_ξ , N_η , $N_{\xi\eta}$ とする。ただし、ひずみエネルギー密度は変形後の面積を用いて計算する。

膜材を構成する各部材の仮想増分エネルギーの総和と単位要素の仮想増分エネルギーのとは等しいことから、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & a \cdot b \{ \delta(\Delta\epsilon_\xi), \delta(\Delta\epsilon_\eta), \delta(\Delta\gamma) \} \begin{Bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \\
 & = 4\delta(\Delta\epsilon_A^L \cdot \ell_{0A})N_A + 4\delta(\Delta\epsilon_A^N \cdot \ell_{0A})\sigma_{0A}A_{0A} \\
 & + 4\delta(\Delta\epsilon_B^L \cdot \ell_{0B})N_B + 4\delta(\Delta\epsilon_B^N \cdot \ell_{0B})\sigma_{0B}A_{0B} \\
 & + 2\delta(\Delta\epsilon_{AA} \cdot \ell_{0AA})N_{AA} + 2\delta(\Delta\epsilon_{BB} \cdot \ell_{0BB})N_{BB} \quad (4) \\
 & + 2\delta(\Delta\epsilon_C \cdot \ell_{0C})N_C + 2\delta(\Delta\epsilon_D \cdot \ell_{0D})N_D \\
 & + 2\delta(\Delta\epsilon_E \cdot \ell_{0E})N_E + 2\delta(\Delta\epsilon_F \cdot \ell_{0F})N_F \\
 & + 4\delta(\Delta\epsilon_V \cdot \ell_{0V})N_V + \delta(\Delta\gamma)S \cdot a \cdot b
 \end{aligned}$$

ここで、

式(1)において、 $\delta(\Delta\bar{\epsilon}_\xi)$, $\delta(\Delta\bar{\epsilon}_\eta)$ などは任意であることと、 $\Delta\bar{\epsilon}_\xi$, $\Delta\bar{\epsilon}_\eta$, Δh_ξ , Δh_η に関する項を消去することにより、 $\Delta\epsilon_\xi$, $\Delta\epsilon_\eta$, $\Delta\gamma$ を用いる増分型の構成式が次のように得られる。

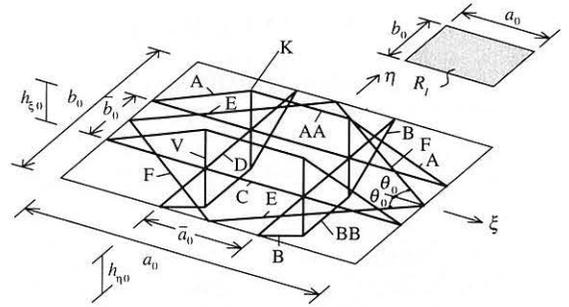


図1 織構造格子モデル

$$\begin{Bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_\xi \\ \Delta\epsilon_\eta \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi\eta 0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{N}_{\xi 0} \\ \bar{N}_{\eta 0} \\ \bar{N}_{\xi\eta 0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ただし、係数の詳細は紙面の都合上省略する。

2. 2. 3 織構造格子モデルを構成する部材の諸定数の決定

文献19)で決定した諸定数を用いるものとし、その値を表1に示す。この諸定数を用いた載荷と除荷に対する応力・ひずみ関係を図2~4に示す。

3. 増分型剛性方程式

増分型剛性方程式の誘導は既報²¹⁾が詳しいので、本報ではその概略を再記するに留める。

3. 1 曲面の表現

曲面を表現するために座標線 ξ , η を用いる。ここで、 ξ は縦糸方向を、 η は横糸方向を表し、原形状では ξ 系と η 系は互いに直交していると仮定する。

座標線 ξ , η で表される曲面 $S(\xi, \eta)$ 上に8節点アイソパラメトリック曲面要素を考える(図5)。1つの要素の i 番目の節点の座標値 (ξ_i, η_i) に対応する任意の直交座標系の座標値を (X_0, Y_0, Z_0) で置く。なお、 (ξ_i, η_i) は既定値である。

任意の点の位置ベクトル $r_0(X_0, Y_0, Z_0)$ は、

$$r_0 = X_0(\xi, \eta) \cdot i + Y_0(\xi, \eta) \cdot j + Z_0(\xi, \eta) \cdot k \quad (6)$$

と表す。 (ξ, η) 系の基底ベクトル e_ξ , e_η は、次式で表される。

表1 織構造格子モデル用諸定数

$$a_0 = 0.1375\text{cm}, b_0 = 0.1000\text{cm}, \bar{a}_0 = a_0/3, \bar{b}_0 = b_0/3, \theta_0 = 36.0^\circ, h_{z_0} = 0.0102\text{cm}, h_{\eta_0} = 0.0162\text{cm}$$

要素	A_0 (cm^2)	ℓ_0 (cm)	E_1, E_1' (kgf/cm)	E_2, E_2' (kgf/cm)	E_3, E_3' (kgf/cm)	$\epsilon_{y_1}, \epsilon_{y_1}'$ (%)	$\epsilon_{y_2}, \epsilon_{y_2}'$ (%)	n	m_1	m_2
A	0.0016/2	0.0470	28550	28550	285500	0.00	0.30	-	-	-
AA	0.0016/2	0.0458	28550	28550	285500	0.00	0.30	-	-	-
B	0.0016/2	0.0371	28550	28550	285500	0.00	0.30	-	-	-
BB	0.0016/2	0.0333	28550	28550	285500	0.00	0.30	-	-	-
C	0.0020/2	0.1375	34000, 34000	13500, 9000	6800, 2000	0.30, -0.06	1.20, -1.20	0.00	0.07	0.50
D	0.0020/2	0.1000	31500, 31500	12500, 12500	4000, 4000	0.30, -0.35	0.70, -0.70	0.00	0.08	0.50
E, F	0.0014	0.1700	5100, 5100	0, 0	0, 0	0.20, -0.20	1.00, -1.00	0.00	0.00	0.00
V	0.0025/4	0.0175	32	32000	-	-19.00	-	-	-	-

要素	a_0 (cm)	b_0 (cm)	k_1 (kgf/cm)	k_2 (kgf/cm)	k_3 (kgf/cm)	γ_{y_1} (%)	γ_{y_2} (%)	n	m_1	m_2
R_i	0.1375	0.1000	65.0	31.0	14.5	1.66	3.50	-0.40	0.25	0.45

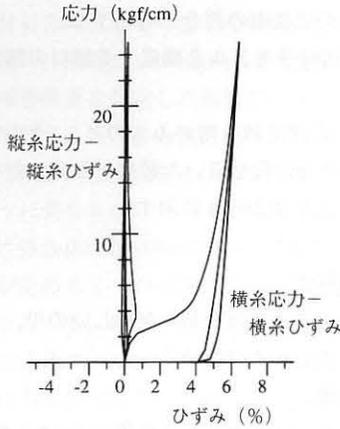


図2 応力・ひずみ関係(1:1)

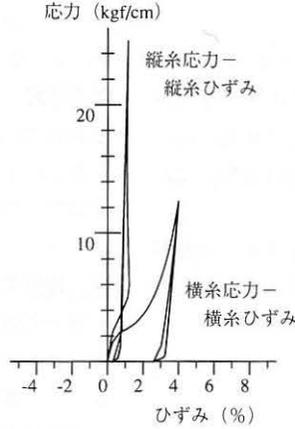


図3 応力・ひずみ関係(2:1)

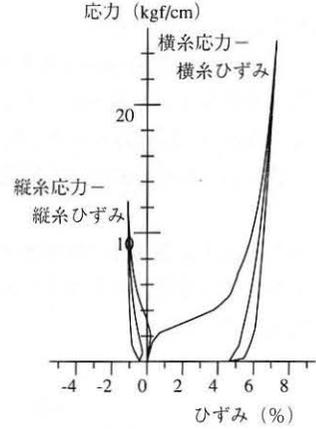


図4 応力・ひずみ関係(1:2)

$$e_\xi = \frac{\partial r_0}{\partial \xi}, \quad e_\eta = \frac{\partial r_0}{\partial \eta} \quad (7)$$

また、変位(U_0, V_0, W_0)による変形後の位置ベクトル $\bar{r}_0(X_0 + U_0, Y_0 + V_0, Z_0 + W_0)$ は、

$$\bar{r}_0 = (X_0 + U_0) \cdot i + (Y_0 + V_0) \cdot j + (Z_0 + W_0) \cdot k \quad (8)$$

で表され、このときの基底ベクトル $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ は次式となる。

$$\bar{e}_\xi = \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi}, \quad \bar{e}_\eta = \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta} \quad (9)$$

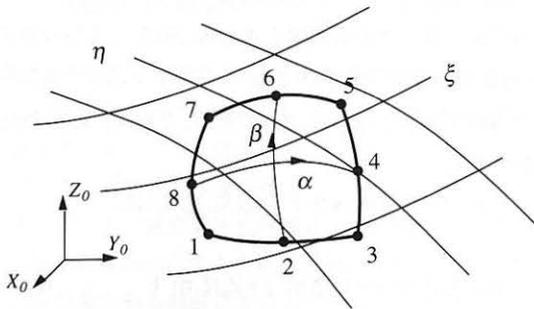


図5 8節点アイソパラメトリック曲面要素

さらに、変位が $(\Delta U_0, \Delta V_0, \Delta W_0)$ だけ増分したときの増分変位ベクトル Δd は、

$$\Delta d = \Delta U_0 \cdot i + \Delta V_0 \cdot j + \Delta W_0 \cdot k \quad (10)$$

となり、この時の基底ベクトルの増分量 $\Delta \bar{e}_\xi, \Delta \bar{e}_\eta$ は次式となる。

$$\Delta \bar{e}_\xi = \frac{\partial \Delta d}{\partial \xi}, \quad \Delta \bar{e}_\eta = \frac{\partial \Delta d}{\partial \eta} \quad (11)$$

3. 2 ひずみの増分表示

原形状 $U_0 = V_0 = W_0 = 0$ において伸びひずみ $\varepsilon_{\xi 0}, \varepsilon_{\eta 0}$ が存在し、剪断ひずみは存在しないもの($\gamma_0 = 0$)と仮定する。ある変形後の基底ベクトル $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ と、そこから少し変形し基底ベクトルが $\Delta \bar{e}_\xi, \Delta \bar{e}_\eta$ だけ変化した状態を考える。それぞれの状態で基底ベクトルを用いて伸びひずみと剪断ひずみを表す。この間に変化した増分ひずみ $\Delta \varepsilon_\xi, \Delta \varepsilon_\eta, \Delta \gamma$ は、次に示す近似式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_\xi &\equiv \left[\frac{\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi} \right] \frac{|\bar{e}_\xi|}{|e_\xi|} \frac{|e_\xi|}{|e_{\xi 0}|} \\ \Delta \varepsilon_\eta &\equiv \left[\frac{\bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta} \right] \frac{|\bar{e}_\eta|}{|e_\eta|} \frac{|e_\eta|}{|e_{\eta 0}|} \\ \Delta \gamma &\equiv \frac{(\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta + \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\xi) + \Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{|\bar{e}_\xi| \cdot |\bar{e}_\eta|} \end{aligned} \quad (12)$$

3. 3 増分型要素剛性方程式

断面力がそれぞれ $N_{\xi 0} + \bar{N}_{\xi 0}, N_{\eta 0} + \bar{N}_{\eta 0}, N_{\xi \eta 0} + \bar{N}_{\xi \eta 0}$ である状態で、ひずみが $\Delta \varepsilon_\xi, \Delta \varepsilon_\eta, \Delta \gamma$ だけ増分するときの単位面積あたりの増分ひずみエネルギー ΔU は、

$$\begin{aligned} \Delta U &\equiv \{ \Delta \varepsilon_\xi \quad \Delta \varepsilon_\eta \quad \Delta \gamma \} \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} + \bar{N}_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} + \bar{N}_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} + \bar{N}_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \Delta \varepsilon_\xi^L \quad \Delta \varepsilon_\eta^L \quad \Delta \gamma^L \} [D] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_\xi^L \\ \Delta \varepsilon_\eta^L \\ \Delta \gamma^L \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

で近似できる。ここで、 $\Delta \varepsilon_\xi^L, \Delta \varepsilon_\eta^L, \Delta \gamma^L$ は、式(12)の増

分ひずみにおける基底ベクトルの増分量 $\Delta \bar{e}_\xi, \Delta \bar{e}_\eta$ に関する線形項を示す。 $[D]$ は、応力・ひずみ関係マトリックスを示す。

ポテンシャルエネルギー停留の原理を用いて、第1変分が0であることより、等価節点力 $\{F\}$ は次式で表される。

$$\{F\} = \{F\} + ([K_0] + [K_G]) \{\Delta d\} \quad (14)$$

ここで、 $\{F\}$ は内力ベクトルを、 $[K_0]$ は接線剛性マトリックスを、 $[K_G]$ は幾何剛性マトリックスを、 $\{\Delta d\}$ は増分変位ベクトルを示す。なお、形状解析では、応力・ひずみ関係から得られる成分である接線剛性マトリックス $[K_0]$ を考慮せず、幾何剛性マトリックス $[K_G]$ のみを用いて解析を行う。

応力・変形解析において圧縮応力が生じた場合、一般に膜材料が圧縮に抵抗し得ない材料と考えられていることから、要素の剛性の低下を考える必要がある。著者らの提案する織構造格子モデルは、格子を構成する部材の履歴特性として剛性の低下を考慮している。一方、本報における直交異方性弾性体の解析では、剛性の低下を考慮していない。

4. 応力・変形解析

等張力曲面として近似理論解が知られているHP曲面を想定する。この曲面に積雪荷重が作用した場合について応力・変形解析を行う。

4. 1 解析条件

図6に解析モデルの形状を示す。ただし、曲面は次式で与えられる。

$$Z = \frac{X \cdot Y}{A \cdot B} \cdot H \quad (15)$$

ここに、 $A=10\text{m}, B=10\text{m}, H=2.5\text{m}$ とする。また、要素分割を図7に示す。

境界条件として、外周の節点の変位をすべて拘束し、内部の節点はすべて自由とする。

荷重条件として積雪荷重を想定し、鉛直下向き $60\text{kg}/\text{m}^2$ の等分布荷重に対して載荷と除荷を行う。

膜材料の縦糸方向 ξ は、曲面の吊りとなる方向に、また、横糸方向 η は、曲面の押さえとなる方向に配置す

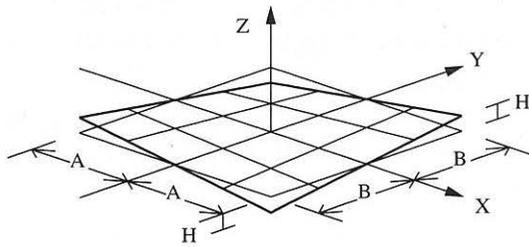


図6 HP曲面

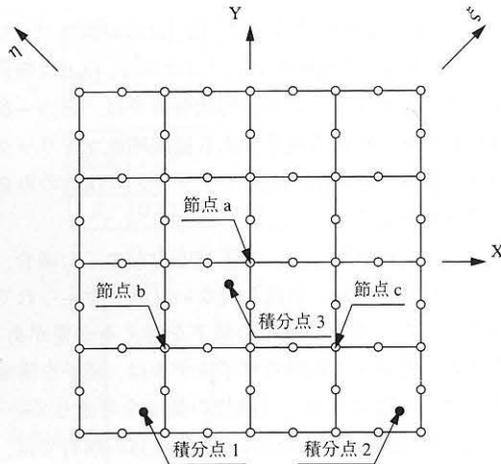


図7 要素分割

る(図7)。

初期張力として、縦糸方向 ξ 、横糸方向 η ともに 3kgf/cm と 5kgf/cm の2種類について解析する。

なお、剛性マトリックス等の積分には、 2×2 のGauss積分を用いる。

4.2 初期張力 3kgf/cm の場合の載荷と除荷の解析結果

初期張力 3kgf/cm として応力・変形解析を行った。図8に 60kgf/m^2 載荷時の変形形状を等高線で表したものを、図9と表2に図7に示す節点a, b, cの鉛直変位を示す。この結果から、直交異方性弾性体のモデルの結果と織構造格子モデルの結果について中央部の変位を比較すると 60kgf/m^2 載荷時で 8.0cm (64.9cm に対し約 12.3%)の差となる。除荷後では、直交異方性弾性体のモデルの場合変位が0に戻るため、解析結果に 32.5cm もの差異が生じている。織構造格子モデルでは、弾塑性性としての材料非線形性の効果が現れていることがわかる。なお、直交異方性弾性体では、除荷後の変位を

予測できないことがわかる。

図10～11に 60kgf/m^2 載荷時の縦糸と横糸の方向の応力分布を、図12と表3に図7に示す積分点1～3の応力・ひずみ関係を示す。ただし、図12に示すように、直交異方性弾性体の結果は、織構造格子モデルを用いた場合の結果との比較のため、織構造格子モデルを用いた初期張力 3kgf/cm のときのひずみ(縦糸方向 0.49% 、横糸方向 1.99%)を基準にその点からの増分量として図に示した。この結果から、 60kgf/m^2 載荷時において、2つの構成則と両糸方向ともに、積分点1で張力が最大となり、積分点2のみ初期張力より減少して最低となった。直交異方性弾性体のモデルを用いた解析では、 60kgf/m^2 載荷時に積分点2で圧縮応力が生じたものの除荷後の初期張力減少は見られなかった。一方、織構造格子モデルを用いた解析では、 60kgf/m^2 載荷時に積分点2で 0.24kgf/cm となり圧縮応力は働かなかったもののほとんどの張力が減少した。除荷後、縦糸方向は積分点2を除いたすべての積分点で張力が 1kgf/cm 程度まで減少した。横糸方向も張力が $1 \sim 2\text{kgf/cm}$ 程度まで減少した。

図10, 11から応力分布の非対称性が見られるが、等高線の作図プログラムの機能上わずかに非対称性が生じた結果となった。解析結果では、対称となるべき積分点における応力の誤差が初期張力に対して 1.5% 以下であり、対称性が成り立っていると判断できる。

表3の直交異方性弾性体の場合で除荷後の応力において本来初期張力の 3kgf/cm となるべきであるが、初期張力に対し約 2.8% の誤差が見られた。

4.3 初期張力 5kgf/cm の場合の載荷と除荷の解析結果

初期張力 5kgf/cm として応力・変形解析を行った。図13に 60kgf/m^2 載荷時の変形形状を等高線で表したものを、図14と表4に図7に示す節点a, b, cの鉛直変位を示す。この結果から、直交異方性弾性体のモデルの結果と織構造格子モデルの結果について中央部の変位を比較すると 60kgf/m^2 載荷時で 11.9cm (54.9cm に対し約 21.5%)の差となる。除荷後では、直交異方性弾性体のモデルの場合変位が0に戻るため、解析結果に 6.7cm もの差異が生じている。また、初期張力 3kgf/cm に比べ初期張力が 5kgf/cm と高いことから、織構造格子モデルを用いた解析は弾塑性性の効果が現れにくくなった。

図15～16に 60kgf/m^2 載荷時の縦糸と横糸の方向の

応力分布を、図17と表3に図7に示す積分点1～3の応力・ひずみ関係を示す。ただし、図17に示すように、直交異方性弾性体の結果は、初期張力3kgf/cmの場合と同様に、織構造格子モデルを用いた初期張力5kgf/cmのときのひずみ(縦糸方向に0.56%,横糸方向に3.89%)を基準にその点からの増分量として図に示した。2つの構成則と両糸方向ともに、曲面形状でZ方向座標値が0以下である積分点で荷重開始後に応力が0.5kgf/cm程度減少するが、60kgf/m²荷重時で積分点2だけ初期張力より応力が減少したものの、1～3kgf/cmの張力が確保されており、ほとんどの積分点で荷重が大きくなるにつれて引張応力が増大する傾向にあった。これは、初期張力が5kgf/cmと高めであったことにより、圧縮応力までいたらなかったと言える。2つの構成則を用いた結果を比較すると、応力・ひずみ関係は似た傾向を示しているが、織構造格子モデルを用いた場合、0.5kgf/cm程度の初期張力減少が見られた。これは、初期張力が5kgf/cmと高めであったことにより、織構造格子モデルの構成部材の弾塑性による材料非線形性が現れにくくなったためである。一方、初期張力が3kgf/cmと5kgf/cmの直交異方性弾性体のモデルを比較すると、初期張力の増加に伴い、幾何学的非線形性の効果により、剛性が多少増加し、変形の増分量は押さえられた。

図15, 16から応力分布の非対称性が見られるが、等高線の作図プログラムの機能上わずかに非対称性が生じた結果となった。解析結果では、対称となるべき積分点における応力の誤差が初期張力に対して1.0%以下であり、対称性が成り立っていると判断できる。

表5の直交異方性弾性体の場合で除荷後の応力において本来初期張力の5kgf/cmとなるべきであるが、初期張力に対し約4.0%の誤差が見られた。

5. 結語と今後の課題

本報では、膜材料を直交異方性弾性体と仮定した構成則と織構造格子モデルを用いた構成則の2つを用いて、初期張力が3kgf/cmと5kgf/cmのHP曲面に対し、積雪荷重を想定した応力・変形解析を行った。直交異方性弾性体のモデルの場合、初期張力にあまり依存しない結果が得られた。一方、織構造格子モデルを用いた場合、荷重の載荷と除荷にともない、初期張力に依存して張力が減少する場合としない場合が結果として

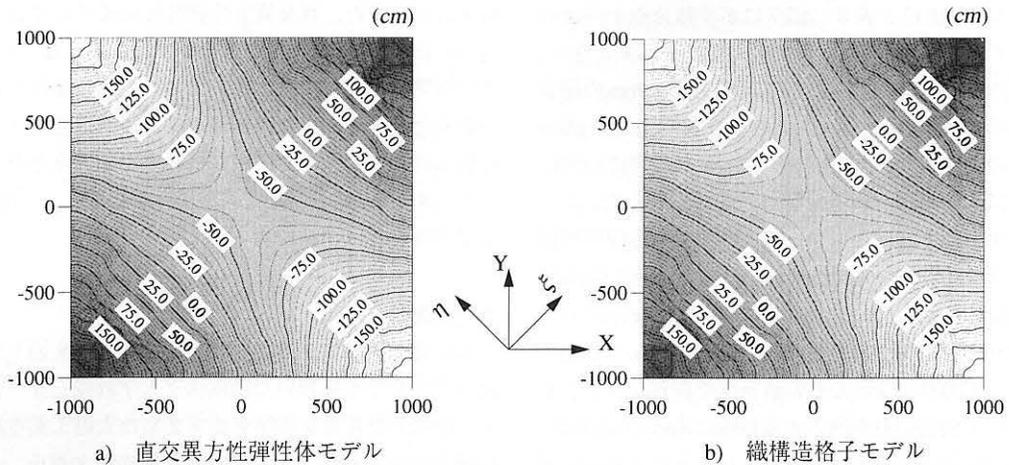
得られた。また、直交異方性弾性体のモデルでは、除荷後の応力等の推定が不可能なことも示した。なお、この結果の妥当性を検討するために、実験を行う必要があると言える。また、本報では、初期張力導入に伴う施工時のプロセスや時間に依存する粘性を考慮していないが、今後の課題として、これらを考慮した応力・変形解析を行う予定である。

6. 謝辞

本研究の開始にあたり膜構造研究論文集を通じて研究の方向を与えて頂いた横浜国立大学教授石井一夫博士、研究上の貴重な示唆を頂きました太陽工業空間技術研究所南宏和博士、同空間設計部武田文義氏、本研究にご協力頂いた伊藤建築設計事務所松本恵美氏に感謝いたします。

[参 考 文 献]

- 1) 石井一夫:膜構造の応力・変形解析概説,膜構造研究論文集'90, No.4, pp.69～105, 1990年12月
- 2) 石井一夫:膜構造用膜材料概説—力学的挙動と解析モデル—,膜構造研究論文集'90, No.4, pp.69～105, 1990年12月
- 3) 南 宏和, 中原義雄:有限要素法を応用したコーティング平織物解析法,材料,第29巻,第324号, pp.54～59, 昭和55年9月
- 4) 西川 薫, 石井一夫, 達富 浩:構造用膜材料の荷重—歪特性と構造モデル,膜構造研究論文集'88, No.2, pp.39～50, 1988年12月
- 5) 西川 薫, 石井一夫, 小竹達也:織布特性を考慮した膜構造の応力・変形解析法,膜構造研究論文集'89, No.3, pp.41～55, 1989年12月
- 6) 小松 清:局部破断を有する膜材料の織構造モデルによる応力変形シミュレーション,膜構造研究論文集'92, No.6, pp.45～78, 1992年12月
- 7) 萱嶋 誠, 石井一夫:材料非線形性を考慮した膜構造応力変形解析のための織布モデルについて,日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), pp.1381～1382, 1993年9月
- 8) 南 宏和:PTFEコーテッド・ガラス繊維布(膜材料A種)の非線形伸長曲線への多段線形近似とその応用,日本建築学会構造系論文報告集,第436号, pp.13～19, 1992年6月
- 9) 日野吉彦, 石井一夫:膜構造解析における材料非線形性の評価,膜構造研究論文集'94, No.8, pp.35～49, 1994年12月
- 10) (社)日本膜構造協会:膜材料剪断剛性試験方法(MSAJ/M-01-1993)
- 11) (社)日本膜構造協会:膜材料弾性定数試験方法



$$Z = \frac{X \cdot Y}{A \cdot B} \cdot H \quad (A=10\text{m}, B=10\text{m}, H=2.5\text{m}) \text{ の曲面を基準}$$

図8 60kgf/m² 載荷時の膜面の高さ (初期張力 3kgf/cm)

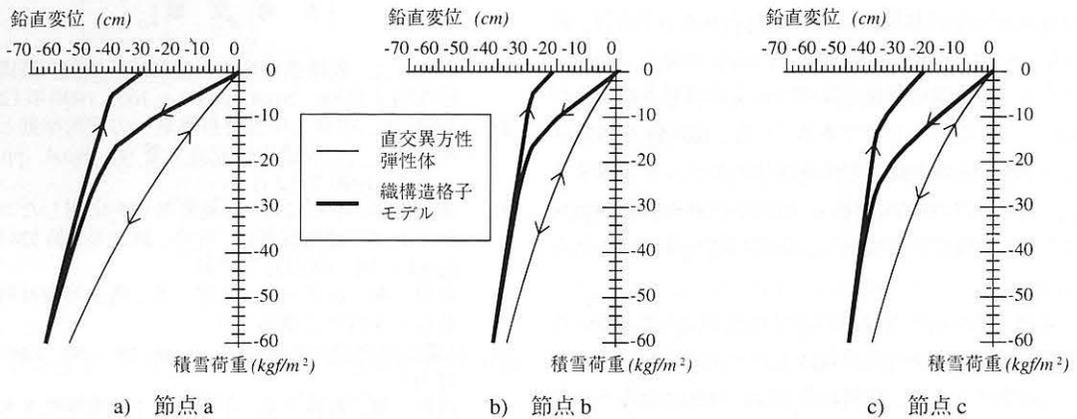


図9 節点 a, b, c の荷重・変位曲線 (初期張力 3kgf/cm)

表2 節点 a, b, c の変位

	構成則	直交異方性弾性体(cm)	繊維構造格子モデル(cm)
節点 a	60kgf/m ² 載荷時	-56.9	-64.9
	除荷時	0.0	-32.5
節点 b	60kgf/m ² 載荷時	-36.7	-41.4
	除荷時	0.4	-21.3
節点 c	60kgf/m ² 載荷時	-40.9	-48.8
	除荷時	-0.2	-23.7

表3 積分点 1, 2, 3 の応力

構成則		直交異方性弾性体(kgf/cm)		繊維構造格子モデル(kgf/cm)	
糸方向		縦糸	横糸	縦糸	横糸
積分点 1	60kgf/m ² 載荷時	22.83	11.98	22.25	6.53
	除荷時	3.12	3.10	0.47	2.34
積分点 2	60kgf/m ² 載荷時	-0.05	-9.88	2.78	0.33
	除荷時	3.04	3.03	2.51	1.59
積分点 3	60kgf/m ² 載荷時	21.16	4.34	19.00	2.32
	除荷時	2.99	3.01	0.92	1.24

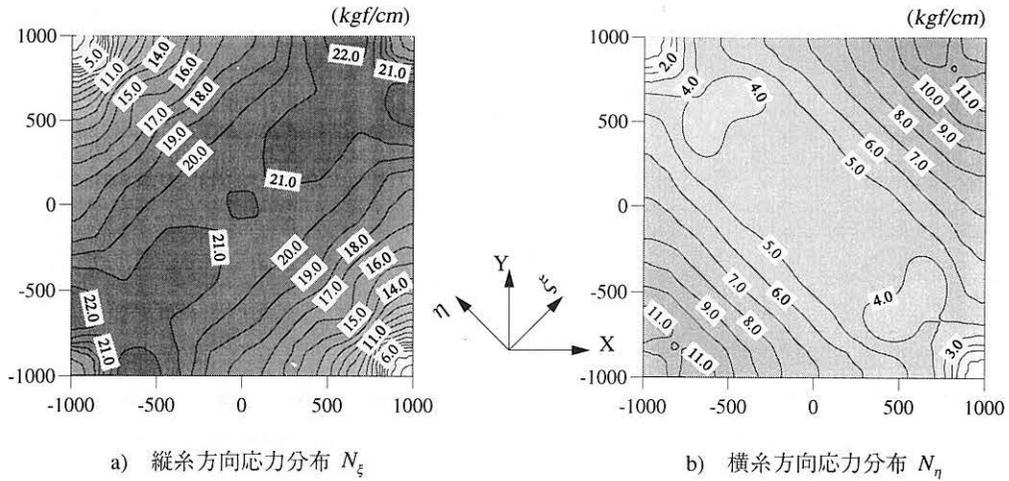


図10 60kgf/m² 载荷時の応力分布 (直交異方性弾性体モデル, 初期張力3kgf/cm)

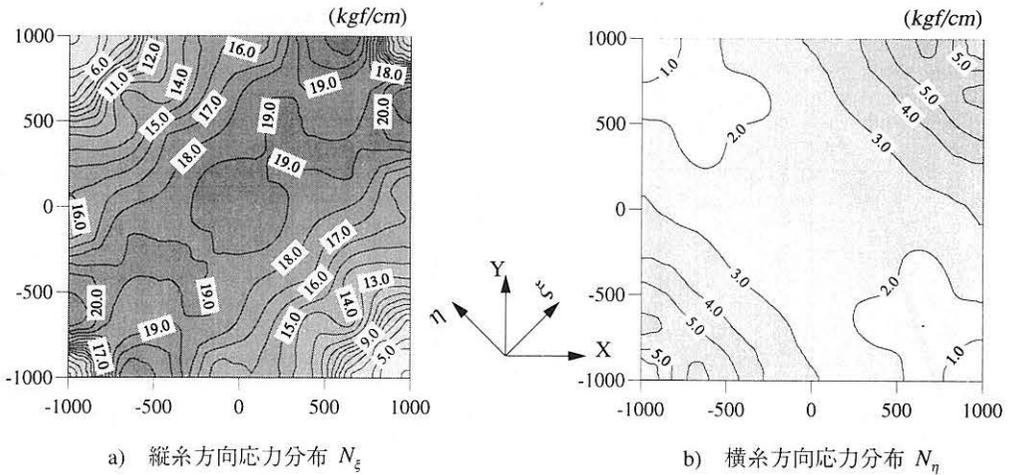


図11 60kgf/m² 载荷時の応力分布 (織構造格子モデル, 初期張力3kgf/cm)

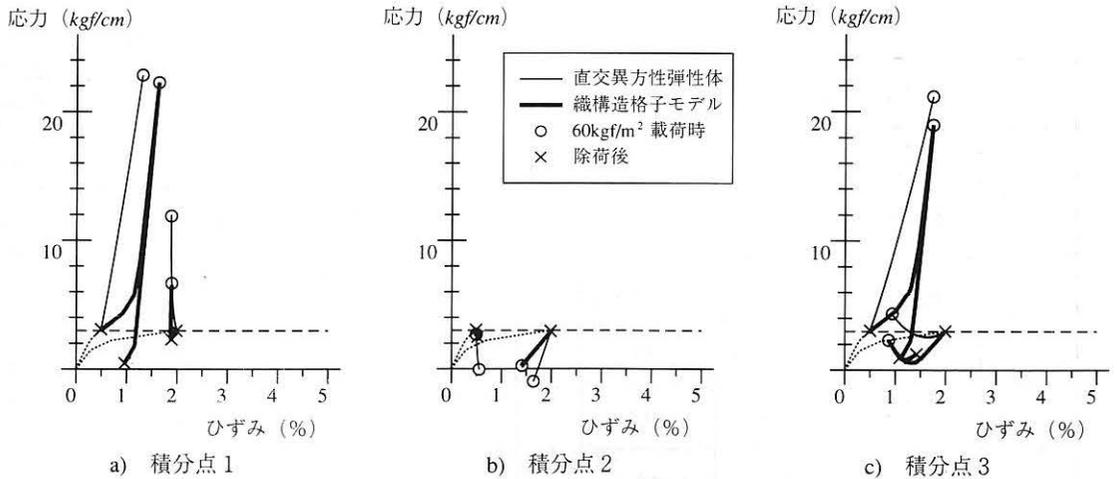
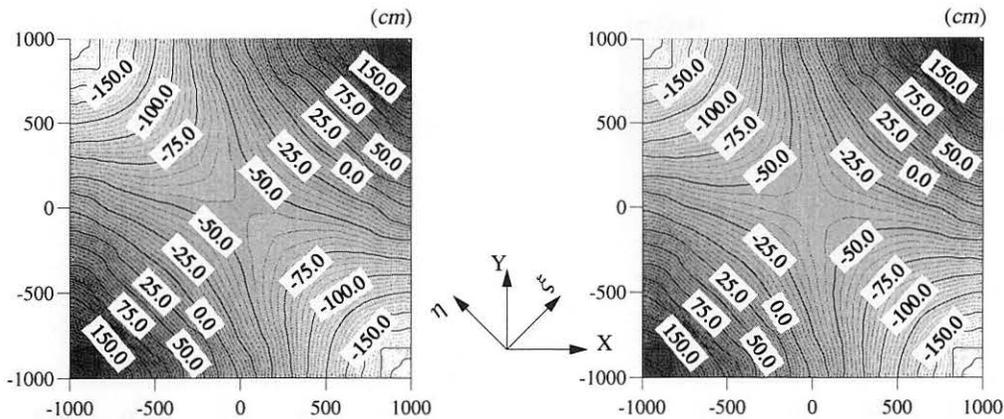


図12 応力・ひずみ関係 (初期張力3kgf/cm)

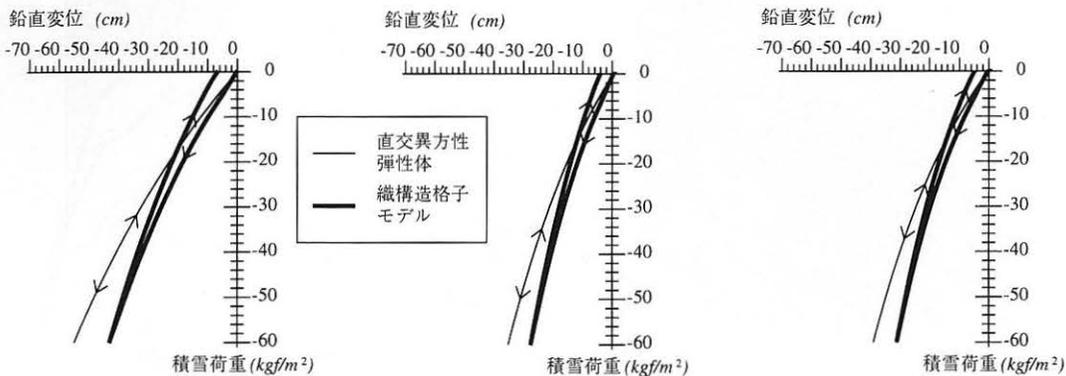


a) 直交異方性弾性体モデル

b) 繊維構造格子モデル

$$Z = \frac{X \cdot Y}{A \cdot B} \cdot H \quad (A=10\text{m}, B=10\text{m}, H=2.5\text{m}) \text{ の曲面を基準}$$

図 13 60kgf/m² 載荷時の膜面の高さ (初期張力 5kgf/cm)



a) 節点 a

b) 節点 b

c) 節点 c

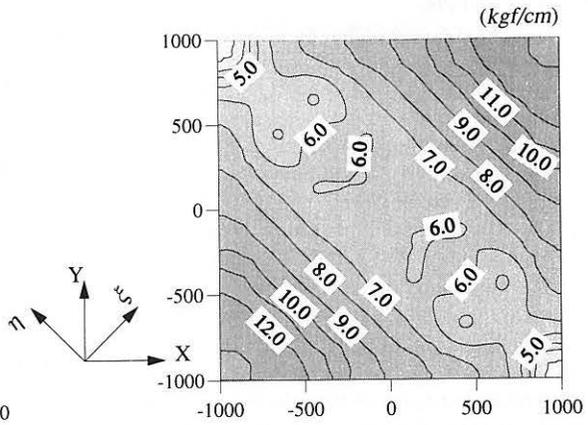
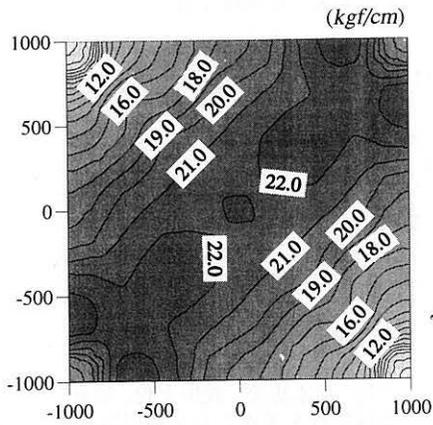
図 14 節点 a, b, c の荷重・変位曲線 (初期張力 5kgf/cm)

表 4 節点 a, b, c の変位

	構成則	直交異方性弾性体(cm)	繊維構造格子モデル(cm)
節点 a	60kgf/m ² 載荷時	-55.0	-43.1
	除荷時	0.0	-6.7
節点 b	60kgf/m ² 載荷時	-35.2	-27.6
	除荷時	0.4	-4.1
節点 c	60kgf/m ² 載荷時	-39.0	-31.2
	除荷時	-0.3	4.9

表 5 積分点 1, 2, 3 の応力

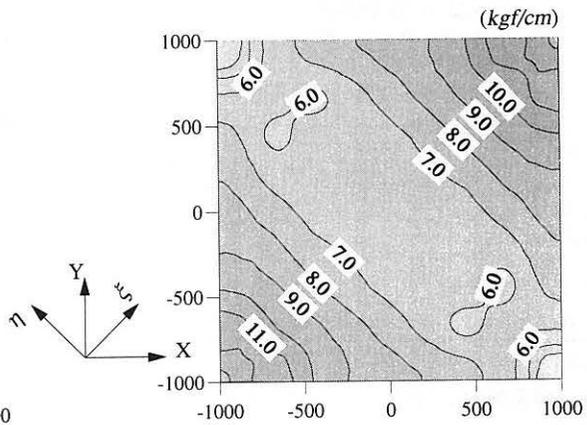
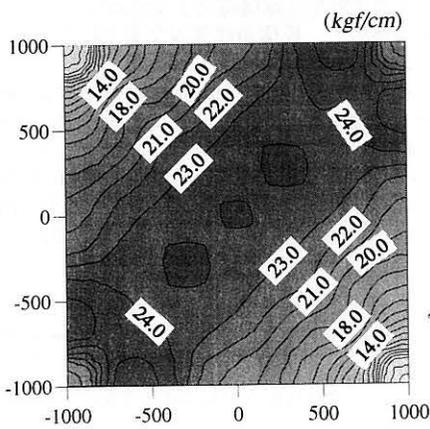
構成則		直交異方性弾性体(kgf/cm)		繊維構造格子モデル(kgf/cm)	
糸方向		縦糸	横糸	縦糸	横糸
積分点 a	60kgf/m ² 載荷時	23.92	13.47	25.89	11.62
	除荷時	5.14	5.12	4.66	5.53
積分点 b	60kgf/m ² 載荷時	2.10	1.22	3.34	2.97
	除荷時	5.05	5.04	5.02	4.91
積分点 c	60kgf/m ² 載荷時	22.13	6.05	23.87	6.54
	除荷時	4.94	4.97	4.56	4.87



a) 縦糸方向応力分布 N_x

b) 横糸方向応力分布 N_y

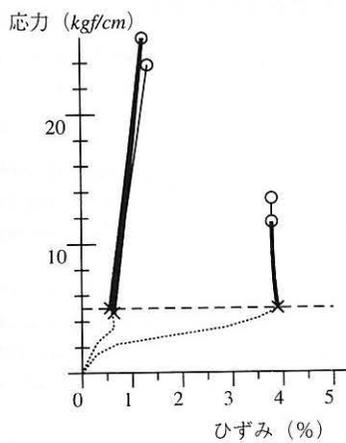
図15 60kgf/m² 載荷時の応力分布 (直交異方性弾性体モデル, 初期張力 5kgf/cm)



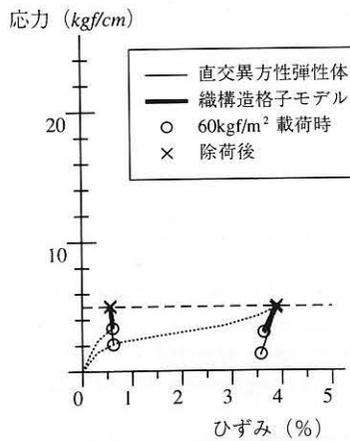
a) 縦糸方向応力分布 N_x

b) 横糸方向応力分布 N_y

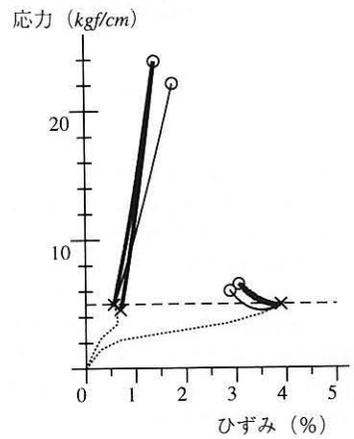
図16 60kgf/m² 載荷時の応力分布 (織構造格子モデル, 初期張力 5kgf/cm)



a) 積分点1



b) 積分点2



c) 積分点3

図17 応力・ひずみ関係 (初期張力 5kgf/cm)

- (MSAJ/M-02-1995)
- 12) 石井一夫:膜材料弾性定数試験法および設計用弾性定数の決定法について—膜構造協会試験法標準の考察—, 膜構造研究論文集 '95, pp.87 ~ 118, 1995年12月
 - 13) G. Menges, B. Meffert, P. Geisbusch : Spannungs-Deformations- und Versagensverhalten PVC-beschichteter Polyestergerewebe unter einachsiger und biaxialer Beanspruchung, Int. Symp. Weitgespannte Flachentragwerke, SFB-64, Univ. Stuttgart, 1976
 - 14) 加藤史郎, Pongpo Petch : 材料非線形性を考慮した膜材料の構成方程式の定式化—織構造格子モデル—, 膜構造研究論文集 '93, No.7, pp.11 ~ 21, 1993年12月
 - 15) H. J. Schock : Some general Remarks on the Structural Behavior and Load-Extension Characteristics of Coated Fabrics with Special Reference to PTFE Coated Glass Fabric, Proc. of the Structural Congress '89, Applications of tension Structures ASCE, San Francisco, pp.21 ~ 30, 1988.5
 - 16) 加藤史郎, Pongpo Petch, 武田文義, 吉野達矢, 松本恵美 : Schockモデルに基づいて膜材料の構成方程式を誘導する方法について—連続体としての増分型構成式の提案—, 膜構造研究論文集 '94, No.8, pp.11 ~ 26, 1994年12月
 - 17) 加藤史郎, 武田文義, 吉野達矢, 松本恵美, 並田忠政 : Schockモデルに基づいた膜材料の構成方程式の定式化 (その1 ~ 3), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), pp.731 ~ 736, 1995年8月
 - 19) 加藤史郎, 武田文義, 吉野達矢, 並田忠政, 小野智子 : Schockモデルに基づいた膜材料の構成方程式の定式化 (その4), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), pp.887 ~ 888, 1996年9月
 - 18) 加藤史郎, 吉野達矢, 武田文義, 小野智子 : 織構造格子モデルの構成則の検証—日本膜構造協会の試験法による実験結果との比較—, 膜構造研究論文集 '96, No.10, 1996年12月 (投稿中)
 - 20) 加藤史郎, 吉野達矢, 松本恵美, 武田文義 : アイソパラメトリック曲面要素を用いた膜構造解析, 膜構造研究論文集 '95, No.9, pp.9 ~ 21, 1995年12月
 - 21) 吉野達矢, 松本恵美, 武田文義, 加藤史郎 : 膜の材料非線形性を考慮した2軸引張試験のシミュレーション, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), pp.885 ~ 886, 1996年9月
 - 22) 加藤史郎, Pongpo Petch : 材料非線形性を考慮した膜構造解析—織構造格子モデルによる構成方程式の適用—, 膜構造研究論文集 '94, No.8, pp.27 ~ 33, 1994年12月
 - 23) S. Kato, P. Pongpo, E. Matumoto : A New Formulation of Constitutive Equation For Fabric Membranes Considering The Fabric Structure And Its Application To FEM Nonlinear Analysis, Proc. of the IASS Int. Symp. 1995 spatial Structures+ Heritage, Present and Future, Milano, Italia, pp.775 ~ 782, 1995.6

Stress and Deformation Analysis of Membrane Structures Considering Material Nonlinearities - Comparison of Fabric Lattice Model with Orthotropic Elastic Model -

Shiro Kato*¹
Tatsuya Yoshino*²

SYNOPSIS

Numerical analyses are performed to a HP membrane fabric roof with initial stresses under loading and unloading of snow. Two constitutive equations are adopted in the analyses to make a comparison among the analytical results through them: one is based on an ordinary orthotropic elastic model; another one is a fabric lattice model considering material nonlinearities and crimp interchanges.

Numerical analyses were done by eight-node FEM for curved membranes considering initial stresses and geometrical nonlinearities. The result reveals that the stresses under snow load obtained from both methods are relatively compatible. However, the differences of stresses after unloading appeared so large in case of low initial stresses. This is because only geometrical nonlinearities can be considered in using the orthotropic elastic model, while neither the material plasticities nor crimp interchanges can.

*1 Prof., Dept. of Arch. and Civil Eng., Toyohashi Univ. of Tech., Dr. Eng.

*2 Graduate Student, Dept. of Mechanical & Structural Eng. Systems, Toyohashi Univ. of Tech., M. Eng.