

極小曲面法による膜構造の原型曲面解析

八木 孝憲*2
石原 競*2
大森 博司*1

概 要

本論文では膜構造の設計段階における初期原型曲面を数値解析により求める手法に関して記述している。膜構造の形状解析に関する既往の研究は初期応力法と極小曲面法の2手法に大別される。本論文では理論的に明解な極小曲面法に基づく膜構造の原型曲面解析手法に関して従来の問題点の整理とその改善策を提案している。従来、極小曲面問題は変分問題として扱われ、数値解析において曲面を三角形要素により離散化近似し、有限要素解析が行われている。しかしながら、各節点の x, y, z 座標全てを未知量とした解析では、各節点を一意に決定することは困難であった。しかし、ケーブル境界やケーブル補強を有する膜構造の形状解析において各節点に何らかの拘束を加えて解析することは好ましくない。そこで本論文では、各節点に3自由度を与えた状態で形状解析を可能とするために非線形最適化問題における解法として知られるQuasi-Newton法、SQP法を用いて原型曲面を求める手法を提案する。

1 序

膜構造は膜面が表現する軽快さや優美さといった意匠上の利点と建設・解体の容易さといった施工上の利点から従来、仮設構造物として博覧会などの各種イベントにおけるパビリオンに数多く用いられた。しかし、近年、膜材の研究・開発による耐久性・耐火性の向上とともに、恒久構造物への利用という期待が高まった。これは部材重量が軽いという大スパン構造物にとって大きな利点を膜構造が有することに起因する。

膜構造の力学的特徴としては、面内張力によってのみ架構を形成することが挙げられる。従って、任意の設定条件に対して形状決定の基本となる原形曲面を考えることは膜構造物の恒久性を実現する上で重要となる。本論文ではこの原型曲面として等張力曲面を採用する。従来、この等張力曲面を石鹼膜などの実験により多大な労力を費やして求めていた。それに対してこの曲面を数値計算により求めることが可能となれば、それは

理想的な状況であると言えよう。従って、本研究では任意の設定条件に対する等張力曲面を数値解析により求めることに重点をおく。

しかし、この等張力曲面を力学的観点から求める初期応力法には数値解析において多くの問題点が存在する。そこで等張力曲面が幾何学的には平均曲率一定の曲面と等価であることに着目して、この平均曲率一定の曲面を求める立場を本研究ではとることとする。

また、その平均曲率一定の曲面の中でも平均曲率が0となる曲面のことを極小曲面といい、この曲面を膜構造の原型曲面とすることからこの手法を極小曲面法と呼ぶ。この曲面を求める問題は古くから数学分野で変分問題として扱われていて、Plateau問題として有名である。本研究においても変分法に基づく定式化を行い、表面積に内包体積や部分長に関する付帯条件として付加した汎関数の停留解を求める。また、任意の境界形状や複雑な曲面形状の解析を可能とするために曲面を三角形平面要素で離散化近似し、有限要素法を適

*1 名古屋大学 工学部 助教授 工博

*2 名古屋大学 大学院生 工修

用する。

$$g = V_0 - \sum_{i=1}^{me} V_i, \quad \mathbf{h} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_{0j} - \sum_{k=1}^{nj} l_{jk} \end{Bmatrix}$$

2 理論背景

極小曲面法による研究 [1] では非線形計算の収束性向上を図るために各節点に対して方向余弦を設定し、自由度を低減した解析を行っている。これにより従来の極小曲面法での問題点が大きく改善され安定的に解形状を求めることが可能となった。しかし、この手法では得られる解形状が方向余弦の設定に大きく依存し、必ずしも得られる解形状が要求を満たしているとは限らない。そこで本論文では節点に3自由度与えたままで求解可能となる解法を提案する。

従来、この種の非線形問題の解法には Newton-Raphson 法が用いられていたが、この解法を適用条件として初期解が収束解の近傍に存在する必要がある。しかし、本問題において初期解は人為的に設定されているので、必ずしもその初期解が解近傍にあるとは限らない。また、解近傍で汎関数の感度が極端に鈍い場合や感度の正負が頻繁に逆転する場合には Newton-Raphson 法で収束解を得ることが困難となる。以上のことが本問題の解析を困難とする原因であると考えられる。

このことを受けて、本論文における変分問題を最適化問題として捉え、非線形解法として付帯条件のない場合は Quasi-Newton 法、付帯条件を有する場合は SQP 法を導入する。

3 理論展開

3.1 有限要素法による汎関数の定式化

図1のように三角形平面要素を、図2のように線分要素を定義する。このとき、内包体積と部分長に関する付帯条件下での平均曲率一定の曲面を求めるための汎関数は次式となる。

$$J = \sum_{i=1}^{me} S_i + \lambda g + \sum_{j=1}^n \mu_j h_j \quad (1)$$

- me : 要素数
- λ : 内包体積に関する Lagrange 乗数
- V_0 : 指定内包体積
- μ_j : j 番目の部分長に関する Lagrange 乗数
- l_{0j} : j 番目の指定部分長
- n : 部分長指定数
- n_j : j 番目の部分長に属する線分要素数

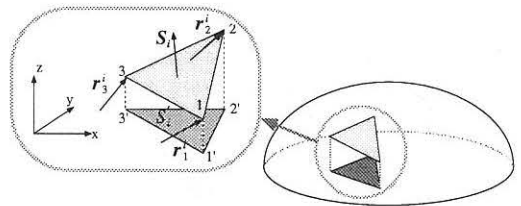


図1: 三角形要素による曲面の離散化近似の概念図と三角形要素の記号

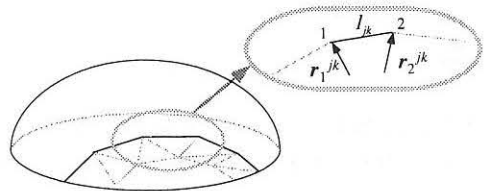


図2: 部分長指定の概念図と線分要素の記号

3.2 オイラーの方程式

本問題では式 (1) の停留解となる各節点座標を求める。この停留解は汎関数の第一変分より導かれるオイラーの方程式を満足する。式 (2) に各要素に関するオイラーの方程式を示す。

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathbf{r}_p^i \neq \mathbf{r}_q^{jk} \text{ のとき} \\ \delta \mathbf{r}_p^i : \mathbf{R}_p^i - \lambda \left(\mathbf{R}_p^{i'} + \frac{1}{3} \mathbf{S}_i' \right) = \mathbf{0} \\ 2) \quad \mathbf{r}_p^i = \mathbf{r}_q^{jk} \text{ のとき} \\ \delta \mathbf{r}_p^i : \mathbf{R}_p^i - \lambda \left(\mathbf{R}_p^{i'} + \frac{1}{3} \mathbf{S}_i' \right) - \mu_j \mathbf{L}_q^{jk} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2)$$

このとき、諸量は以下の通りである。

- \mathbf{r}_p^i : 三角形要素の頂点の位置ベクトル
- $\mathbf{r}_p^{i'}$: 三角形要素の基準面射影三角形の頂点の位置ベクトル
($p = 1 \sim 3$: 三角形要素の節点番号)
- \mathbf{r}_q^{jk} : j 番目の指定部分長内の
 k 番目の線分要素の端点の位置ベクトル
($q = 1, 2$: 線分要素節点番号)
- S_i : 三角形要素面積ベクトル
- \mathbf{n}_i : 単位三角形要素面積ベクトル
- S_i' : 三角形要素の基準面射影面積ベクトル
- L_{jk} : 線分要素長ベクトル
- \mathbf{n}_{jk}^i : 単位線分要素長ベクトル

$$z_p^i : \mathbf{r}_p^i \text{ の } z \text{ 座標値, } \mathbf{g}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 z_p^i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^i &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{r}_3^i - \mathbf{r}_2^i), & \mathbf{R}_1^{i'} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_i \times (\mathbf{r}_3^{i'} - \mathbf{r}_2^{i'}) \\ \mathbf{R}_2^i &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{r}_1^i - \mathbf{r}_3^i), & \mathbf{R}_2^{i'} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_i \times (\mathbf{r}_1^{i'} - \mathbf{r}_3^{i'}) \\ \mathbf{R}_3^i &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{r}_2^i - \mathbf{r}_1^i), & \mathbf{R}_3^{i'} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_i \times (\mathbf{r}_2^{i'} - \mathbf{r}_1^{i'}) \\ L_1^{jk} &= -\mathbf{n}_{jk}^i, & L_2^{jk} &= \mathbf{n}_{jk}^i \end{aligned}$$

以上の各要素に関するオイラーの方程式から全体のオイラーの方程式を構成する。本問題のオイラーの方程式は未知量に対して非線形となるため、収斂計算によりその停留解を求める。

4 Quasi-Newton 法

付帯条件のない面積汎関数の変分問題に Quasi-Newton 法を適用し、解析を行う。この Quasi-Newton 法の特徴は以下の 2 点である。

1. BFGS 公式により Hesse 行列を近似し、逐次更新する。
2. 直線探索による目的関数の最小化を行う。

以降では、この Quasi-Newton 法を本問題に適用するための式展開を行う。

4.1 BFGS 公式

Quasi-Newton 法では Newton-Raphson 法における Hesse 行列を近似行列に置換して収斂計算を行っている。この近似行列は BFGS 公式を用いて、目的関数の割線勾配であることを示すセカント条件と正値対称性を満足するように逐次更新される。

ここでは目的関数を S とし、その目的関数の節点座標値に関する勾配ベクトルを ∇S 、節点の位置ベクトル $\delta \mathbf{r}$ とする。このとき、収斂計算過程において k ステップ目の近似解 $\mathbf{r}^{(k)}$ に対する ∇S 、 S の値をそれぞれ $\nabla S^{(k)}$ 、 $S^{(k)}$ と表記し、

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \nabla S^{(k+1)} - \nabla S^{(k)} \quad (3)$$

とすれば、BFGS 公式は次式となる。

$$\begin{aligned} [B_N^{(k+1)}] &= [B_N^{(k)}] + \frac{\mathbf{y}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)})^T}{(\mathbf{y}^{(k)})^T \mathbf{s}^{(k)}} \\ &\quad - \frac{[B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)} (\mathbf{s}^{(k)})^T [B_N^{(k)}]}{(\mathbf{s}^{(k)})^T [B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)}} \end{aligned} \quad (4)$$

従って、 $k+1$ ステップでの修正方程式は次式となる。

$$[B_N^{(k+1)}] \delta \mathbf{r}^{(k+1)} = -\nabla S^{(k+1)} \quad (5)$$

4.2 直線探索

目的関数値が収斂計算のステップ毎に減少すれば、最適解への安定的な収束が可能となる。これは次式で表現される。

$$S(\mathbf{r}^{(k+2)}) = S(\mathbf{r}^{(k+1)} + \delta \mathbf{r}^{(k+1)}) < S^{(k+1)} \quad (6)$$

しかし、式 (5) より得られる $\delta \mathbf{r}^{(k+1)}$ を用いた場合、必ずしも式 (6) を満足するとは限らない。そこで次式を導入する。

$$S(\mathbf{r}^{(k+1)} + t \delta \mathbf{r}^{(k+1)}) < S^{(k+1)} \quad (7)$$

この式 (7) を満足する t を用いてステップ毎に目的関数値を減少させる手法を直線探索という。本研究では t の探索手法として 2 次補間法を用いている。

5 SQP 法

制約条件付き最適化問題の最も有効な解法として、対象とする問題に対して収斂計算毎に2次計画問題を定義し、その Kuhn-Tucker 条件を解く操作を繰り返す SQP 法 (Sequential Quadratic Programming method) が存在する。

5.1 SQP 法での修正方程式

Kuhn-Tucker 条件に対応する修正方程式を式 (8) に示す。この式 (8) は、Lagrange 関数である式 (1) の Newton-Raphson 法での修正方程式の Hesse 行列を BFGS 公式による近似行列で置換したものである。

$$\begin{bmatrix} [B_N] & A & [B] \\ A^T & 0 & \mathbf{o}^T \\ [B]^T & \mathbf{o} & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \lambda \\ \delta \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (8)$$

5.2 SQP 法での BFGS 公式

ここでは式 (1) の汎関数の節点座標値に関する勾配ベクトルを ∇J 、節点の位置ベクトル $\delta \mathbf{r}$ とする。このとき、収斂計算過程において k ステップ目の $\mathbf{r}^{(k)}$ と $k+1$ ステップ目の $\lambda^{(k+1)}$ 、 $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$ における ∇J 、 J の値をそれぞれ $\nabla J^{(k)}$ 、 $J^{(k)}$ とし、また、 $k+1$ ステップ目の $\mathbf{r}^{(k+1)}$ 、 $\lambda^{(k+1)}$ 、 $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$ における ∇J 、 J の値をそれぞれ $\nabla J^{(k+1)}$ 、 $J^{(k+1)}$ とし、

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \nabla J^{(k+1)} - \nabla J^{(k)} \quad (9)$$

とする。さらに $[B_N]$ の正值性の問題から次の条件式を付加する。

$$\theta = \begin{cases} 1 & \left((\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{y}^{(k)} \right) \\ & \geq 0.2 (\mathbf{s}^{(k)})^T [B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)} \text{ のとき} \\ \frac{0.8 (\mathbf{s}^{(k)})^T [B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)}}{0.8 (\mathbf{s}^{(k)})^T [B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)} - (\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{y}^{(k)}} & \text{(それ以外のとき)} \end{cases} \quad (10)$$

この式 (9)、(10) より新たに次式を定義する。

$$\hat{\mathbf{y}} = \theta \mathbf{y}^{(k)} + (1 - \theta) [B_N^{(k)}] \mathbf{s}^{(k)} \quad (11)$$

このベクトル $\hat{\mathbf{y}}$ を式 (4) の \mathbf{y} に代えて用いると SQP 法での BFGS 公式が得られる。

5.3 Lagrange 関数と目的関数

本問題において付帯条件を導入するために汎関数として式 (1) で示す Lagrange 関数を用いた。しかし、双対定理により Lagrange 関数を目的関数とすることは不可能である。従って、次式のペナルティ関数を目的関数として直線探索を行う。

$$J_N(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{m_e} S_i + R \left[|g| + \sum_{j=1}^n |h_j| \right] \quad (12)$$

ここでの R はペナルティ・パラメータである。

$k+1$ ステップ目の収斂計算でこの目的関数を用いて次式を満たす t を2次補間法により求める。

$$J_N(\mathbf{r}^{(k+1)} + t\delta \mathbf{r}^{(k+1)}) < J_N(\mathbf{r}^{(k+1)}) \quad (13)$$

6 数値解析結果

6.1 Quasi-Newton 法による解析結果

6.1.1 HP 曲面

HP 曲面の解析結果を図3に示す。このモデルの境界は一辺10の立方体の側面の対角線を結んだものである。解析データを以下に示す。

要素数	: 400
節点数	: 221
収斂計算回数	: 29

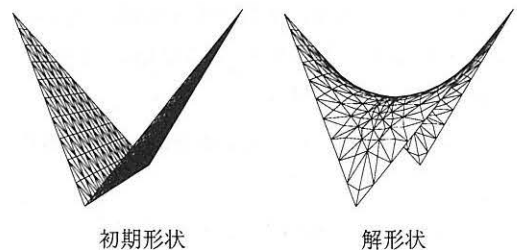


図3: HP 曲面

6.1.2 Gergonne 曲面

Gergonne 曲面の解析結果を図 4 に示す。このモデルは図 4 に示す HP 曲面を初期形状としている。このとき上下の正方形の対角線上の節点は拘束し、側面の対角線上の節点はその面内のみ移動を許すという境界条件である。解析データを以下に示す。

要素数 : 400
 節点数 : 221
 収斂計算回数 : 17

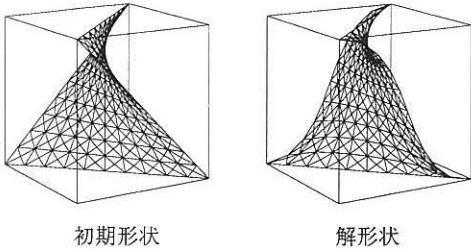


図 4: Gergonne 曲面

6.2 SQP 法による解析結果

6.2.1 Wiener Frame モデル

Wiener Frame モデルの解析結果を図 5 に示す。図 5 に示されている初期形状から内包体積を徐々に減少させている。その過程において図 5 に示す極小解が得られた。解析データを以下に示す。

要素数 : 400
 節点数 : 231
 収斂計算回数 : 各 10 回程度
 上下の円弧の半径 : 5.0
 上下の円弧の距離 : 7.5

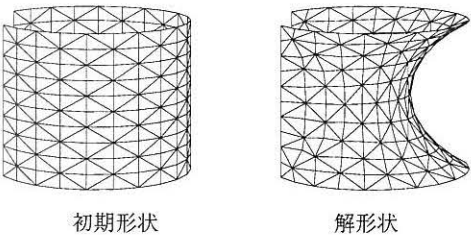


図 5: Wiener Frame

6.2.2 矩形境界モデル

矩形境界モデルの解析結果を図 6 に示す。このモデルでは対称性を考慮して 1/4 を解析対象とし、初期形状から内包体積を徐々に増加させて解析している。解析データを以下に示す。

要素数 : 200 (1/4)
 節点数 : 121 (1/4)
 収斂計算回数 : 各 10 回程度

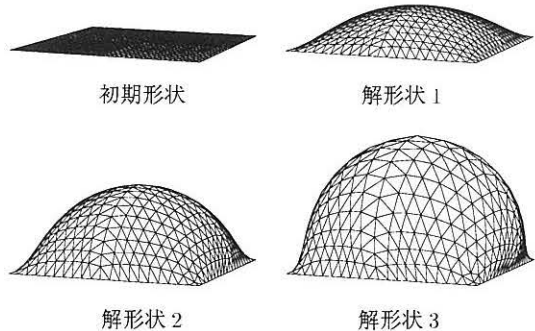


図 6: 矩形境界モデル

6.2.3 空気膜構造モデル

この空気膜構造モデルの解析結果を図 7 に示す。初期形状から内包体積を徐々に増加させて解析している。解析データを以下に示す。

要素数 : 224
 節点数 : 146
 収斂計算回数 : 各 5 回程度

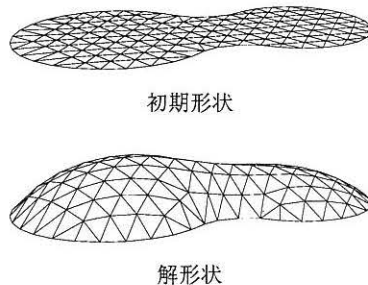


図 7: 空気膜構造モデル

6.2.4 サスペンション膜構造モデル

サスペンション膜構造モデルの解析結果を図8に示す。各ケーブルの長さを解析状況に応じて指定し、内側の円境界上に存在する1つの節点を徐々に上昇させている。解析データを以下に示す。

要素数 : 252
節点数 : 168
収斂計算回数 : 各 35 回程度

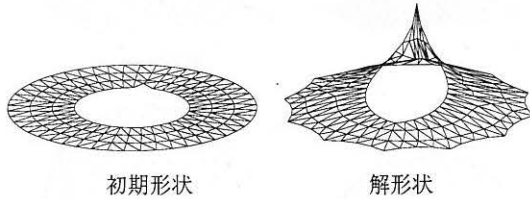
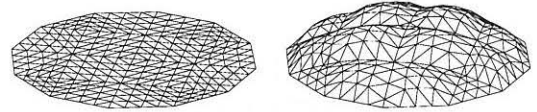


図8: サスペンション膜構造モデル

6.2.5 ケーブル補強膜構造モデル

ケーブル補強膜構造モデルの解析結果を図9に示す。このモデルでは対称性を考慮して4分の1を解析対象とし、ケーブル長や体積は解析状況に応じた指定値を用いている。解析データを以下に示す。

要素数 : 112 (1/4)
節点数 : 71 (1/4)
収斂計算回数 : 指定値によって異なる



初期形状 解形状
図9: ケーブル補強膜構造モデル

7 結語

以上より、Quasi-Newton 法や SQP 法を用いて、これまで解析が困難であった複雑な境界形状での平均曲率一定の曲面を各節点に何ら拘束を加えず求めることが可能となった。これによりケーブル境界を有する膜構造の形状解析を円滑に行うことが可能となった。また、Quasi-Newton 法や SQP 法により収束判定条件を厳しくして解析を続行したところ推測通り解近傍で汎関数の感度が鈍くなっていることが確認され、従来、収束解を得ることが困難であった原因について究明された。

参考文献

- 1) 鈴木俊男、半谷裕彦: 極小曲面の変数低減による有限要素解析、日本建築学会構造系論文報告集、No.425、pp.111-120、1991年
- 2) 茨木俊秀、福島雅夫: 最適化プログラミング、岩波書店、1991年
- 3) K. Ishihara, H. Ohmori: Minimal Surface Analysis by using Finite Element Method, Theoretical and Applied Mechanics Vol.42 pp.65-74

Shape Finding Analysis of Original Surface of Membrane Structure based on Minimal Surface Theory

Takanori YAGI*2
Kay ISHIIHARA*2
Hiroshi OHMORI*1

SYNOPSIS

In the beginning of the design process of the membrane structures, it is recommended to adopt the minimal surface as the original design surface. In the numerical calculation using Newton-Raphson method for pursuing the objective minimal surface, we, however, can not always obtain the converged solution. The reason is that the given initial solution is not neighborhood of true solution. In the present paper, we adopt Quasi-Newton method and SQP method which are famous for methods to solve the optimal problem and expect that it is possible to obtain the minimal surface easily.

*1 Associate Professor of Nagoya University

*2 Graduate Student of Nagoya University