

アイソパラメトリック曲面要素を用いた膜構造解析

加藤史郎^{*1}

吉野達矢^{*2}

松本恵美^{*2}

武田文義^{*3}

梗概

膜構造の力学的挙動の把握やその設計・施工にあたり、形状解析および応力・変形解析が必要となる。これらの解析を行なうにあたり、任意の曲面形状を精度よく表現し、また、応力の解析精度を高めるため8節点アイソパラメトリック曲面要素を導入する。この要素を用いた有限要素法により、形状解析と応力解析のための増分型剛性方程式の定式化を行う。本解析法の妥当性を評価するため、理論解が得られている曲面について形状解析を行ない比較を行なった。応用例として、等張力曲面となるHP曲面、サドル曲面、カテナイド曲面、また、異方張力曲面となるサドル曲面を解析的に求めた。本報告では、形状解析について論じたが、今後、連続体としての増分型構成方程式を導入することにより、材料非線形性を考慮した応力・変形解析も行う予定である。

1. 序

膜構造では、初期張力に対して釣り合い形状を求める形状解析が行なわれる。膜構造の初期形状曲面は、通常、ポテンシャルエネルギーが極小となり、安定した形態である等張力曲面が用いられる。等張力曲面は、弾性論における初期応力問題として求められる。境界内に形成された等張力曲面は、同一の境界をもつ極小の表面積をもつ曲面すなわち極小曲面と等価であることが知られている。このことから、等張力曲面を求める方法として2つの方法が用いられてきた。この経緯は石井¹⁾によりまとめられている。大森ら^{2,3)}は、極小曲面を求めるにあたり、面積汎関数に内包体積や各要素面積を等しくするという付帯条件を導入することにより安定解を求める方法を示している。具体的な方法としては、解曲面を仮定しRitz法を用いる方法と、有限要素法において定ひずみ三角形要素と曲面三角形二次要素を用いる方法について報告しており、かつ、

収束上の問題点も報告している。鈴木ら⁴⁾は、曲面の法線方向に変位の自由度を採用し、安定した極小曲面の求め方を提案している。正岡ら^{5,6)}は、等張力曲面を求めるにあたり、低次四辺形膜要素を用いて形状解析、応力・変形解析を行なっている。

一方、釣り合い形状として、等張力曲面の他に異方張力曲面もある。この曲面に関する研究は、等張力曲面に関する研究に比べ非常に少なく、鈴木ら⁷⁾の研究があるのみである。

現在、一般的に膜を用いた建築物の構造解析では、直交異方性弾性体を導入し定ひずみ三角形要素による有限要素法が用いられている。定ひずみ三角形有限要素は、以下の利点があることからしばしば用いられている。第1に定式化が比較的容易であること、第2に曲率変化の大きい曲面形状や応力集中部分に対応するために要素数を容易に増やせることなどが挙げられる。しかし、応力分布の不均一性などの問題点が生じるこ

*1 豊橋技術科学大学建設工学系 教授・工博
*3 太陽工業・空間設計部 工修

*2 豊橋技術科学大学建設工学系 大学院

とが石井⁸⁾、正岡ら⁶⁾によって示されている。一般的に四辺形要素はメッシュ依存度が低いと考えられる。正岡ら^{5,6)}は、低次四辺形要素を用いて計算精度、計算効率の両面からその有用性について検討している。しかし、この低次四辺形要素は、双一次アイソパラメトリック四辺形要素の面内積分次数を低減して、面内1点積分要素としている。このため、空間上の同一平面上に要素の4節点が存在できない変形を生じた場合の精度の問題などから、適用範囲や要素分割に対する注意が必要であるとしている。

本研究では、任意の曲面形状を精度よく表現し、また、応力の解析精度の向上を目的として、1)連続体としての増分型の構成方程式、2)膜材料の糸方向、3)非等張力場を想定し、4)アイソパラメトリック8節点曲面要素を用いた形状解析と応力・変形解析のための増分型剛性方程式の定式化を行う。応用例として、等張力曲面となるHP曲面、サドル曲面、カテナリド曲面、また、異方張力曲面となるサドル曲面を解析的に求めた。

ただし、本報告では形状解析について論じたが、今後、連続体としての増分型構成方程式を導入することにより、材料非線形性を考慮した応力・変形解析も行う予定である。

2. 構造解析の定式化

2.1 曲面の表現

曲面を表現するために曲率線 ξ, η を用いる。ここで、 ξ は縦糸、 η は横糸方向とする。また、原(仮定)形状では ξ 系と η 系は直交していると仮定する。

図1に示すように、主曲率線 ξ, η で表される曲面 $S(\xi, \eta)$ 上にアイソパラメトリック8節点曲面要素を考える。1つの要素の i 番目の節点の座標値 (ξ_i, η_i) に対応する (X_0, Y_0, Z_0) 系の座標値を (X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}) と置く。

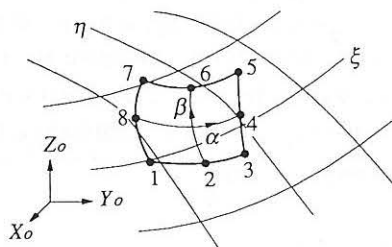


図1 アイソパラメトリック8節点曲面要素

任意の点の位置ベクトル $r_0(X_0, Y_0, Z_0)$ は、

$$r_0 = X_0(\xi, \eta) \cdot i + Y_0(\xi, \eta) \cdot j + Z_0(\xi, \eta) \cdot k \quad (1)$$

と表す。ただし、

$$\begin{aligned} X_{0i} &= X_0(\xi_i, \eta_i) \\ Y_{0i} &= Y_0(\xi_i, \eta_i) \\ Z_{0i} &= Z_0(\xi_i, \eta_i) \end{aligned} \quad (2)$$

なお、 (ξ_i, η_i) は既定値である。

ここで、形状関数を導入し、任意の点における座標値 (ξ, η) を次式で表示する。

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot \xi_i \\ \eta &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot \eta_i ; n = 8 \end{aligned} \quad (3)$$

また、座標 (X_0, Y_0, Z_0) についても、同様に α, β で表示する。

$$\begin{aligned} X_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot X_{0i} \\ Y_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot Y_{0i} \\ Z_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot Z_{0i} \end{aligned} \quad (4)$$

$X_0(\alpha, \beta), Y_0(\alpha, \beta), Z_0(\alpha, \beta)$ は、式(2)からわかるように (ξ, η) の関数であることより、次式の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、式(3)より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot \xi_i, & \frac{\partial \xi}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \cdot \xi_i, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot \eta_i, & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \cdot \eta_i \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

また、式(4)より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot X_{0i}, & \frac{\partial X_0}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \cdot X_{0i}, \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot Y_{0i}, & \frac{\partial Y_0}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \cdot Y_{0i}, \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot Z_{0i}, & \frac{\partial Z_0}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \cdot Z_{0i} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。式(5)を用いて、 $(\frac{\partial X_0}{\partial \xi}, \frac{\partial X_0}{\partial \eta}), (\frac{\partial Y_0}{\partial \xi}, \frac{\partial Y_0}{\partial \eta}), (\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}, \frac{\partial Z_0}{\partial \eta})$ を得る。

図2.aに示す (ξ, η) 系の基底ベクトル e_ξ, e_η は、式(1), (5)より、

$$\begin{Bmatrix} e_\xi \\ e_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{0,\alpha} & Y_{0,\alpha} & Z_{0,\alpha} \\ X_{0,\beta} & Y_{0,\beta} & Z_{0,\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (8)$$

となる。ここに、

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \quad (9)$$

また、変位 d_0 を

$$d_0(\xi, \eta) = d_0(\alpha, \beta) = U_0 \cdot i + V_0 \cdot j + W_0 \cdot k \quad (10)$$

とすると、変形後の位置ベクトル $\bar{\mathbf{r}}_0$ は、

$$\bar{\mathbf{r}}_0 = (\mathbf{r}_0 + d_0) = (X_0 + U_0) \cdot i + (Y_0 + V_0) \cdot j + (Z_0 + W_0) \cdot k \quad (11)$$

となる。ここで、変位関数を用いて、各成分 U_0, V_0, W_0 を、

$$\begin{aligned} U_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot U_{0i} \\ V_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot V_{0i} \\ W_0(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\alpha, \beta) \cdot W_{0i} \end{aligned} \quad (12)$$

で表示する。このときの基底ベクトル $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ は、

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_0}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_0 + U_0)_{,\alpha} & (Y_0 + V_0)_{,\alpha} & (Z_0 + W_0)_{,\alpha} \\ (X_0 + U_0)_{,\beta} & (Y_0 + V_0)_{,\beta} & (Z_0 + W_0)_{,\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (13)$$

となる。

2.2 ひずみの増分表示

原形状 $U_0 = V_0 = W_0 = 0$ において伸びひずみ $\varepsilon_{\xi 0}, \varepsilon_{\eta 0}$ が存在し、剪断ひずみは存在しないと仮定する。ここで、原状態での基底ベクトルを e_ξ, e_η とすると、仮定から e_ξ と e_η は直交する。変形後の基底ベクトル $\bar{e}_\xi$ は式(13)の状態であり、そのときの全体の伸びひずみ $(\varepsilon_{\xi 0} + \varepsilon_\xi)$ は、

$$\varepsilon_{\xi 0} + \varepsilon_\xi = \frac{\sqrt{e_\xi \cdot \bar{e}_\xi} - \sqrt{e_{\xi 0} \cdot e_{\xi 0}}}{\sqrt{e_{\xi 0} \cdot e_{\xi 0}}} \quad (14)$$

となる。さらに、基底ベクトルが $\Delta \bar{e}_\xi$ だけ変化したときの全体の伸びひずみ $(\varepsilon_{\xi 0} + \varepsilon_\xi + \Delta \varepsilon_\xi)$ は、

$$\varepsilon_{\xi 0} + \varepsilon_\xi + \Delta \varepsilon_\xi = \frac{\sqrt{(\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi) \cdot (\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi)} - \sqrt{e_{\xi 0} \cdot e_{\xi 0}}}{\sqrt{e_{\xi 0} \cdot e_{\xi 0}}} \quad (15)$$

となる。式(14), (15)より、増分ひずみ $\Delta \varepsilon_\xi$ は、

$$\Delta \varepsilon_\xi \approx \left[\frac{\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi} \right] \frac{|\bar{e}_\xi|}{|e_\xi|} \frac{|e_\xi|}{|e_{\xi 0}|} \quad (16)$$

となり、同様に $\Delta \varepsilon_\eta$ は、次式となる。

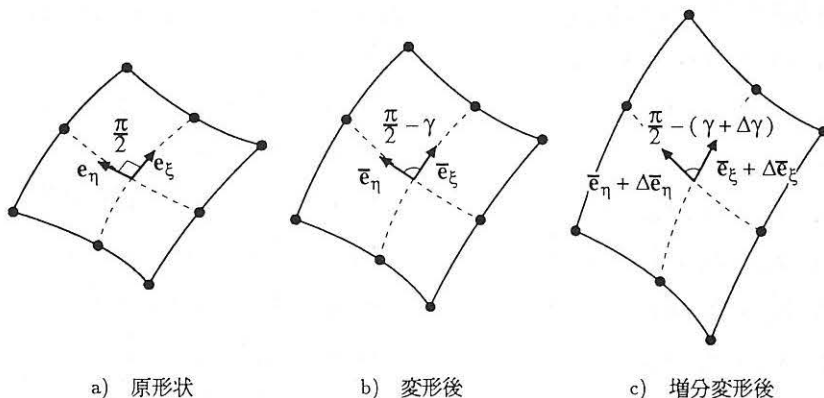


図2 基底ベクトルと剪断ひずみの変化

$$\Delta \varepsilon_\eta \approx \left[\frac{\bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta} \right] \frac{|\bar{e}_\eta|}{|\bar{e}_\eta|} \frac{|\bar{e}_\eta|}{|\bar{e}_\eta|} \quad (17)$$

次に、図 2.b に示すように、剪断ひずみ γ は、基底ベクトル $\bar{e}_\xi$ と $\bar{e}_\eta$ のなす角度の変化量であることから、

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \frac{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\eta}{|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \quad (18)$$

となる。ここで、

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma \approx \gamma \quad (19)$$

より、

$$\gamma \approx \frac{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\eta}{|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \quad (20)$$

となる。図 2.c に示すように、伸びひずみと同様に基底ベクトルがそれぞれ、 $\Delta \bar{e}_\xi$ と $\Delta \bar{e}_\eta$ だけ変化したときの角度の変化量である剪断ひずみ $(\gamma + \Delta \gamma)$ は、

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{2} - (\gamma + \Delta \gamma) \right\} = \frac{(\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi) \cdot (\bar{e}_\eta + \Delta \bar{e}_\eta)}{|\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta + \Delta \bar{e}_\eta|} \quad (21)$$

であり、同様に、

$$\gamma + \Delta \gamma \approx \frac{(\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi) \cdot (\bar{e}_\eta + \Delta \bar{e}_\eta)}{|\bar{e}_\xi + \Delta \bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta + \Delta \bar{e}_\eta|} \quad (22)$$

で表される。式(20), (22)より、

$$\begin{aligned} \Delta \gamma &\approx \frac{(\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta + \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\xi) + (\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta)}{(1 + e_\xi)(1 + e_\eta) |\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \\ &\approx \frac{(\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta + \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\xi) + (\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta)}{|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

式(8)で示した基底ベクトル e_ξ, e_η を

$$\begin{aligned} e_\xi &= A_x \cdot i + A_y \cdot j + A_z \cdot k \\ e_\eta &= B_x \cdot i + B_y \cdot j + B_z \cdot k \end{aligned} \quad (24)$$

で表す。ここに、

$$\begin{aligned} A_x &= J_{11}^* \cdot X_{0,\alpha} + J_{12}^* \cdot X_{0,\beta} \\ A_y &= J_{11}^* \cdot Y_{0,\alpha} + J_{12}^* \cdot Y_{0,\beta} \\ A_z &= J_{21}^* \cdot Z_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot Z_{0,\beta} \\ B_x &= J_{21}^* \cdot X_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot X_{0,\beta} \\ B_y &= J_{21}^* \cdot Y_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot Y_{0,\beta} \\ B_z &= J_{21}^* \cdot Z_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot Z_{0,\beta} \end{aligned} \quad (25)$$

また、式(13)で示した基底ベクトル $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ を

$$\begin{aligned} \bar{e}_\xi &= \bar{A}_x \cdot i + \bar{A}_y \cdot j + \bar{A}_z \cdot k \\ \bar{e}_\eta &= \bar{B}_x \cdot i + \bar{B}_y \cdot j + \bar{B}_z \cdot k \end{aligned} \quad (26)$$

で表す。ここに、

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= J_{11}^* \cdot (X_0 + U_0)_\alpha + J_{12}^* \cdot (X_0 + U_0)_\beta \\ \bar{A}_y &= J_{11}^* \cdot (Y_0 + V_0)_\alpha + J_{12}^* \cdot (Y_0 + V_0)_\beta \\ \bar{A}_z &= J_{21}^* \cdot (Z_0 + W_0)_\alpha + J_{22}^* \cdot (Z_0 + W_0)_\beta \\ \bar{B}_x &= J_{21}^* \cdot (X_0 + U_0)_\alpha + J_{22}^* \cdot (X_0 + U_0)_\beta \\ \bar{B}_y &= J_{21}^* \cdot (Y_0 + V_0)_\alpha + J_{22}^* \cdot (Y_0 + V_0)_\beta \\ \bar{B}_z &= J_{21}^* \cdot (Z_0 + W_0)_\alpha + J_{22}^* \cdot (Z_0 + W_0)_\beta \end{aligned} \quad (27)$$

さらに、増分変位 $\Delta U_0, \Delta V_0, \Delta W_0$ による基底ベクトルの増分 $\Delta \bar{e}_\xi, \Delta \bar{e}_\eta$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{e}_\xi &= \Delta \bar{A}_x \cdot i + \Delta \bar{A}_y \cdot j + \Delta \bar{A}_z \cdot k \\ \Delta \bar{e}_\eta &= \Delta \bar{B}_x \cdot i + \Delta \bar{B}_y \cdot j + \Delta \bar{B}_z \cdot k \end{aligned} \quad (28)$$

で表す。ここに、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_x &= J_{11}^* \cdot \Delta U_{0,\alpha} + J_{12}^* \cdot \Delta U_{0,\beta} \\ \Delta \bar{A}_y &= J_{11}^* \cdot \Delta V_{0,\alpha} + J_{12}^* \cdot \Delta V_{0,\beta} \\ \Delta \bar{A}_z &= J_{21}^* \cdot \Delta W_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot \Delta W_{0,\beta} \\ \Delta \bar{B}_x &= J_{21}^* \cdot \Delta U_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot \Delta U_{0,\beta} \\ \Delta \bar{B}_y &= J_{21}^* \cdot \Delta V_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot \Delta V_{0,\beta} \\ \Delta \bar{B}_z &= J_{21}^* \cdot \Delta W_{0,\alpha} + J_{22}^* \cdot \Delta W_{0,\beta} \end{aligned} \quad (29)$$

式(24), (26), (28)より、式(16), (17), (23)の各成分を求める。まず、

$$\begin{aligned} e_\xi \cdot e_\xi &= (A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2 \\ e_\eta \cdot e_\eta &= (B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2 \\ e_\xi \cdot e_\eta &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ |e_\xi| &= \sqrt{e_\xi \cdot e_\xi} \quad |e_\eta| = \sqrt{e_\eta \cdot e_\eta} \\ \bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi &= (\bar{A}_x)^2 + (\bar{A}_y)^2 + (\bar{A}_z)^2 \\ \bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta &= (\bar{B}_x)^2 + (\bar{B}_y)^2 + (\bar{B}_z)^2 \\ \bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\eta &= \bar{A}_x \bar{B}_x + \bar{A}_y \bar{B}_y + \bar{A}_z \bar{B}_z \\ |\bar{e}_\xi| &= \sqrt{\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi} \quad |\bar{e}_\eta| = \sqrt{\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。また、式(12)の変位関数を用いて、以下に示すように表す。

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi &= \{\bar{S}L_\xi\}^T \{\Delta d\} \\
 \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta &= \{\bar{S}L_\eta\}^T \{\Delta d\} \\
 (\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta + \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\xi) &= \{\bar{S}L_{\xi\eta}\}^T \{\Delta d\} \\
 \Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi &= \{\Delta d\}^T [SN_\xi]^T [S\bar{L}_\xi] \{\Delta d\} \\
 \Delta \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta &= \{\Delta d\}^T [SN_\eta]^T [S\bar{L}_\eta] \{\Delta d\} \\
 \Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta &= \{\Delta d\}^T [SN_\xi]^T [S\bar{L}_\eta] \{\Delta d\}
 \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \{\Delta d\}^T &= \{\Delta U_{01} \Delta V_{01} \Delta W_{01} \cdots \Delta U_{08} \Delta V_{08} \Delta W_{08}\} \\
 \{\bar{S}L_\xi\}^T &= \{\bar{S}L_{\xi 1} \bar{S}L_{\xi 2} \bar{S}L_{\xi 3} \cdots \bar{S}L_{\xi 22} \bar{S}L_{\xi 23} \bar{S}L_{\xi 24}\} \\
 \{\bar{S}L_\eta\}^T &= \{\bar{S}L_{\eta 1} \bar{S}L_{\eta 2} \bar{S}L_{\eta 3} \cdots \bar{S}L_{\eta 22} \bar{S}L_{\eta 23} \bar{S}L_{\eta 24}\} \\
 \{\bar{S}L_{\xi\eta}\}^T &= \{\bar{S}L_{\xi\eta 1} \bar{S}L_{\xi\eta 2} \bar{S}L_{\xi\eta 3} \cdots \bar{S}L_{\xi\eta 22} \bar{S}L_{\xi\eta 23} \bar{S}L_{\xi\eta 24}\} \\
 [SN_\xi] &= \begin{bmatrix} SN_{\xi(1,1)} & SN_{\xi(1,2)} & \cdots & SN_{\xi(1,24)} \\ SN_{\xi(2,1)} & SN_{\xi(2,2)} & \cdots & SN_{\xi(2,24)} \\ SN_{\xi(3,1)} & SN_{\xi(3,2)} & \cdots & SN_{\xi(3,24)} \end{bmatrix} \\
 [SN_\eta] &= \begin{bmatrix} SN_{\eta(1,1)} & SN_{\eta(1,2)} & \cdots & SN_{\eta(1,24)} \\ SN_{\eta(2,1)} & SN_{\eta(2,2)} & \cdots & SN_{\eta(2,24)} \\ SN_{\eta(3,1)} & SN_{\eta(3,2)} & \cdots & SN_{\eta(3,24)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\{\bar{S}L_{\xi k}\} = \bar{A}_j \cdot F_i, \quad \{\bar{S}L_{\eta k}\} = \bar{B}_j \cdot G_i$$

$$\{\bar{S}N_{\xi k}\} = F_i, \quad \{\bar{S}N_{\eta k}\} = G_i$$

$$F_i = J_{11}^* \cdot N_{i,\alpha} + J_{12}^* \cdot N_{i,\beta}$$

$$G_i = J_{21}^* \cdot N_{i,\alpha} + J_{22}^* \cdot N_{i,\beta}$$

$$A_1 = A_z, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z$$

$$B_1 = B_z, \quad B_2 = B_y, \quad B_3 = B_z$$

$$k = 3(i-1) + j \quad (i = 1 \sim 8, j = 1 \sim 3)$$

2.3 増分型要素剛性方程式

式(16), (17), (23)のひずみを増分の基底ベクトル $\Delta \bar{e}_\xi, \Delta \bar{e}_\eta$ に関する線形項と非線形項とに分ける。

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_\xi &= \Delta \varepsilon_\xi^L + \Delta \varepsilon_\xi^N \\
 \Delta \varepsilon_\eta &= \Delta \varepsilon_\eta^L + \Delta \varepsilon_\eta^N \\
 \Delta \gamma &= \Delta \gamma^L + \Delta \gamma^N
 \end{aligned} \quad (33)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_\xi^L &= \frac{\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{e_\xi \cdot e_\xi} \frac{|\bar{e}_\xi|}{|e_\xi|} \frac{|e_\xi|}{|e_{\xi 0}|} \\
 \Delta \varepsilon_\xi^N &= \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\xi}{e_\xi \cdot e_\xi} \frac{|\bar{e}_\xi|}{|e_\xi|} \frac{|e_\xi|}{|e_{\xi 0}|} \\
 \Delta \varepsilon_\eta^L &= \frac{\bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{e_\eta \cdot e_\eta} \frac{|\bar{e}_\eta|}{|e_\eta|} \frac{|e_\eta|}{|e_{\eta 0}|} \\
 \Delta \varepsilon_\eta^N &= \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{e_\eta \cdot e_\eta} \frac{|\bar{e}_\eta|}{|e_\eta|} \frac{|e_\eta|}{|e_{\eta 0}|} \\
 \Delta \gamma^L &= \frac{(\bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta + \bar{e}_\eta \cdot \Delta \bar{e}_\xi)}{|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \\
 \Delta \gamma^N &= \frac{\Delta \bar{e}_\xi \cdot \Delta \bar{e}_\eta}{|e_\xi| |\bar{e}_\eta|}
 \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)の各ひずみに式(30), (31)を代入し、マトリックス形式で表し、

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_\xi^L \\ \Delta \varepsilon_\eta^L \\ \Delta \gamma^L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{\bar{S}L_\xi\}^T / (|\bar{e}_\xi| |e_\xi|) \cdot (1 + \varepsilon_{\xi 0}) \\ \{\bar{S}L_\eta\}^T / (|\bar{e}_\eta| |e_\eta|) \cdot (1 + \varepsilon_{\eta 0}) \\ \{\bar{S}L_{\xi\eta}\}^T / (|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d \end{Bmatrix} \\
 &= [C] \{\Delta d\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_\xi^N &= \{\Delta d\}^T \left[\frac{1}{2} \frac{[SN_\xi]^T [SN_\xi]}{|\bar{e}_\xi| |e_\xi|} \right] \{\Delta d\} \\
 &= \{\Delta d\}^T [B_\xi] \{\Delta d\}
 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_\eta^N &= \{\Delta d\}^T \left[\frac{1}{2} \frac{[SN_\eta]^T [SN_\eta]}{|\bar{e}_\eta| |e_\eta|} \right] \{\Delta d\} \\
 &= \{\Delta d\}^T [B_\eta] \{\Delta d\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \gamma^N &= \{\Delta d\}^T \left[\frac{1}{2} \frac{[SN_\eta]^T [SN_\eta]}{|\bar{e}_\xi| |\bar{e}_\eta|} \right] \{\Delta d\} \\
 &= \{\Delta d\}^T [B_{\xi\eta}] \{\Delta d\}
 \end{aligned}$$

とおく。

増分ひずみ $\Delta \varepsilon_\xi, \Delta \varepsilon_\eta, \Delta \gamma$, 断面力 $N_{\xi 0}, N_{\eta 0}, N_{\xi\eta 0}$ が生じているときの増分ひずみエネルギー ΔU は、

$$\Delta U = \{\Delta \varepsilon_\xi \Delta \varepsilon_\eta \Delta \gamma\} \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon_\xi^L \Delta \varepsilon_\eta^L \Delta \gamma^L\} [D] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_\xi^L \\ \Delta \varepsilon_\eta^L \\ \Delta \gamma^L \end{Bmatrix} \quad (36)$$

で近似できる。ここで、式(31)を代入して、

$$\Delta U = \{\Delta \varepsilon_\xi^L \Delta \varepsilon_\eta^L \Delta \gamma^L\} \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} + \{\Delta \varepsilon_\xi^N \Delta \varepsilon_\eta^N \Delta \gamma^N\} \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon_\xi^L \Delta \varepsilon_\eta^L \Delta \gamma^L\} [D] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_\xi^L \\ \Delta \varepsilon_\eta^L \\ \Delta \gamma^L \end{Bmatrix} \quad (37)$$

とする。式(35)を代入すると、

$$\Delta U = \{\Delta d\}^T [C]^T \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{\Delta d\}^T [C]^T [D] [C] + \frac{1}{2} N_{\xi 0} [B_\xi] + \frac{1}{2} N_{\eta 0} [B_\eta] + N_{\xi \eta 0} ([B_{\xi \eta}] + [B_{\xi \eta}]^T) \} \{\Delta d\} \quad (38)$$

となる。ここで、ポテンシャルエネルギー停留の原理を用いて、第一変分がゼロであることより、等価節点力 $\{F\}$ は、

$$\{F\} = \{F_i\} + [K_i] \{\Delta d\} \quad (39)$$

を得る。ここで、内力ベクトル $\{F_i\}$ および剛性マトリックス $[K_i]$ は、次式となる。

$$\{F_i\} = \iint_{\alpha\beta} [C]^T \begin{Bmatrix} N_{\xi 0} \\ N_{\eta 0} \\ N_{\xi \eta 0} \end{Bmatrix} |\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta| d\alpha d\beta \quad (40)$$

$$[K_i] = \iint_{\alpha\beta} [C]^T [D] [C] + N_{\xi 0} [B_\xi] + N_{\eta 0} [B_\eta] + N_{\xi \eta 0} ([B_{\xi \eta}] + [B_{\xi \eta}]^T) |\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta| d\alpha d\beta = [K_0] + [K_G] \quad (41)$$

ここから、

$$[K_0] = \iint_{\alpha\beta} [C]^T [D] [C] |\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta| d\alpha d\beta \quad (42)$$

$$[K_G] = \iint_{\alpha\beta} [N_{\xi 0} [B_\xi] + N_{\eta 0} [B_\eta] + N_{\xi \eta 0} ([B_{\xi \eta}] + [B_{\xi \eta}]^T)] |\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta| d\alpha d\beta \quad (43)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_\alpha \\ \bar{e}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (X_0 + U_0)_{,\alpha} & (Y_0 + V_0)_{,\alpha} & (Z_0 + W_0)_{,\alpha} \\ (X_0 + U_0)_{,\beta} & (Y_0 + V_0)_{,\beta} & (Z_0 + W_0)_{,\beta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (44)$$

である。尚、式(36)~(44)において、変形後のベクトル $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta (\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta)$ で応力および面積等を計量するものとする。

3. 等張力曲面の形状解析例

等張力曲面として理論解が知られている HP 曲面、サドル曲面、そしてカテナイド曲面を求める。

これらの曲面を用いて、解析結果と理論形状との比較を行なう。

3.1 HP 曲面の形状解析

図3に示す幾何学的境界条件をもつ HP 曲面は次式で表現される。

$$z(x, y) = \frac{H}{A \cdot B} x \cdot y \quad (45)$$

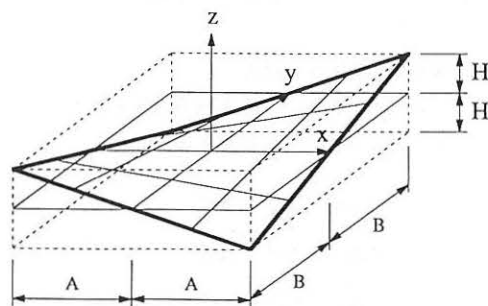


図3 HP曲面

1) 解析条件

境界形状は式(45)を用いて、図4を原形状とした形状解析を行なう。図5に示すように要素分割は、 x, y 方向共に4分割と6分割の2種類とする。拘束条件は周辺をすべて固定とし、内部の節点はすべて自由とする。また、収束計算回数は5回とする。その他の解析諸元を表1に示す。

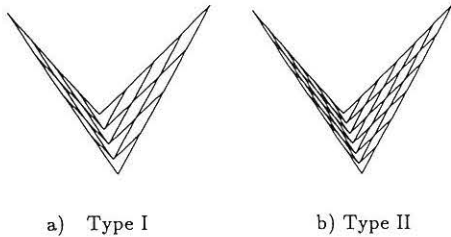


図4 原形状

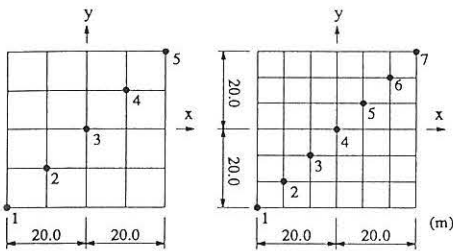


図5 要素分割

表1 解析諸元

要素分割	Type I	Type II
要素数	16	36
節点数	65	133
自由度数	99	255
A (m)	20.0	20.0
B (m)	20.0	20.0
H (m)	20.0	20.0

2) 解析結果

要素分割 Type I, IIの解析結果を図6に示す。また、解析結果と理論形状との比較を行なうために、図5に示す節点(Type Iは1~5, Type IIは1~7)の座標値を図7と表2に示す。

これらの結果から、Type IIの節点3では3.4%の誤

差が生じているものの、図6に示すように、Type I, IIとも十分にHP曲面が表現できたといえる。

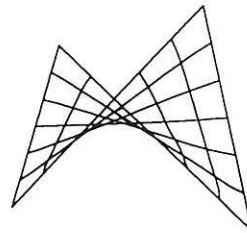
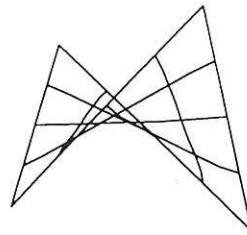


図6 解析結果

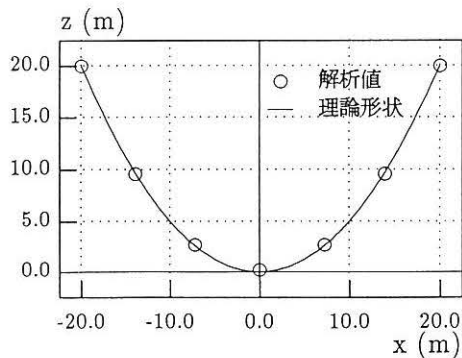
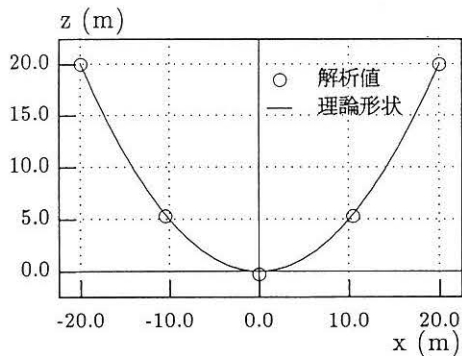


図7 解析値と理論形状

表 2.a 解析値と理論値との比較 (Type I)

節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1,5	20.000	0.000	20.000	20.000	---
2,4	10.469	10.4690	5.308	5.480	3.14
3	0.000	0.000	-0.276	0.000	---

表 2.b 解析値と理論値との比較 (Type II)

節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1,7	20.000	20.000	20.000	20.000	---
2,6	13.907	13.907	9.615	9.670	0.57
3,5	7.239	7.239	2.709	2.620	3.40
4	0.000	0.000	0.208	0.000	---

3.2 サドル曲面形状解析

図 8 に示した幾何学的境界条件をもつサドル曲面は次式で表現される。

$$\Delta z(x, y) = \frac{x^2}{2R_z} - \frac{y^2}{2R_y} \quad (46)$$

ただし,

$$R_z = \frac{a^2}{2h_z}, R_y = \frac{b^2}{2h_y} \quad (47)$$

張力 N_z , N_y と曲率半径 R_z , R_y は以下の関係を持つ。

$$\delta = \frac{R_y}{R_z} = \frac{N_y}{N_z} \quad (48)$$

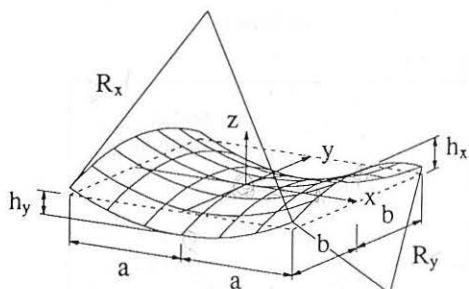


図 8 サドル曲面

1) 解析条件

境界形状は式(46)を用いて, 図 9 を原形状とした形状解析を行なう。ここで, 図10に示すように要素分割

は, z, y 方向共に 4 分割とする。拘束条件は周辺をすべて固定とし, 内部の節点はすべて自由とする。また, 収束計算回数を 5 回とする。その他の解析諸元を表 3 に示す。

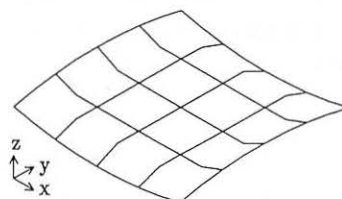


図 9 原形状

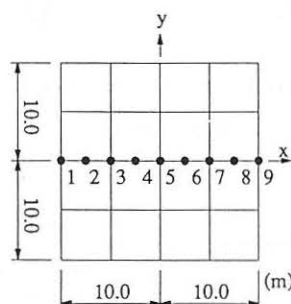


図10 要素分割

表 3 解析諸元

要素数	16
節点数	65
自由度数	99
a, b (m)	10.0
h_z, h_y (m)	1.25
$\delta = R_y/R_z$	1.0

2) 解析結果

解析結果を図11に示す。また, 解析結果と理論形状との比較を行なうために, 図10の x 軸上の節点 1 ~ 9 の座標値を図12と表 4 に示す。

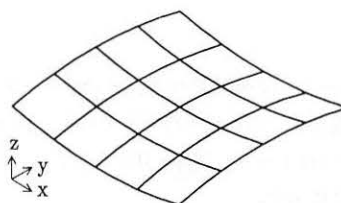


図11 解析結果

この結果より、節点4では1.32%の誤差が生じるものの、サドル曲面形状は十分に表現できたといえる。

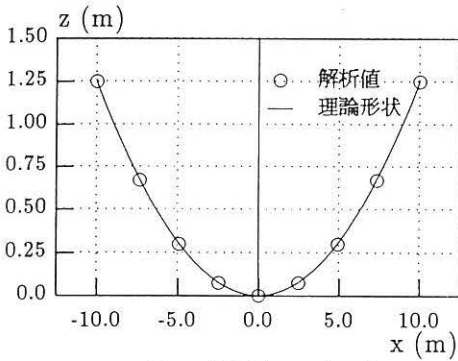


図12 解析値と理論形状

表4 解析値と理論値との比較

節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1,9	10.000	0.000	1.250	1.250	---
2,8	7.351	0.000	0.671	0.675	0.59
3,7	4.918	0.000	0.301	0.302	0.33
4,6	2.469	0.000	0.075	0.076	1.32
5	0.000	0.000	0.000	0.000	---

3.3 カテナイド曲面形状解析

カテナイド曲面は、回転軸を含む平面での切断曲線が懸垂曲線となる回転曲面であり、以下の式で表現できるものである(図13)。

$$z(x,y) = a \{ \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - \ln(a) \} \quad (49)$$

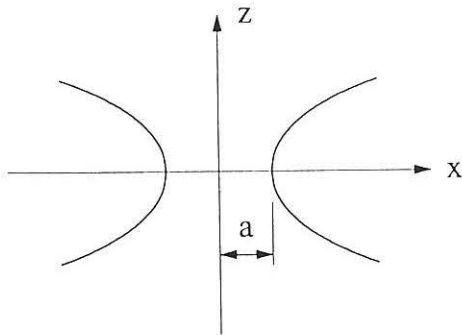


図13 カテナイド曲面

1) 解析条件

図14に示す円の4分の1を解析対象とし、境界形状は式(49)を用いる。ここで、要素分割は図15に示すように、円周方向に6分割、放射状方向に4分割および、円周方向に3分割、放射状方向に2分割の2種類とする。拘束条件は図15に、解析諸元は表5に示す。

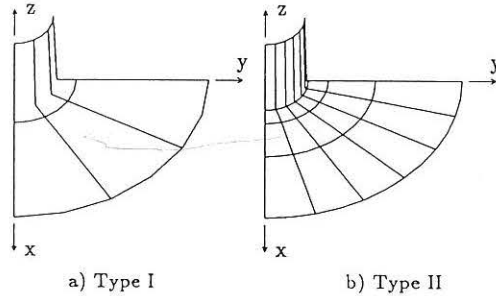
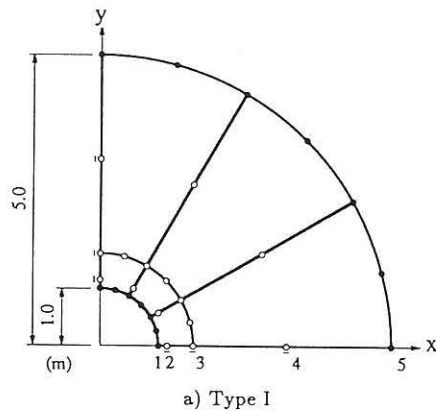
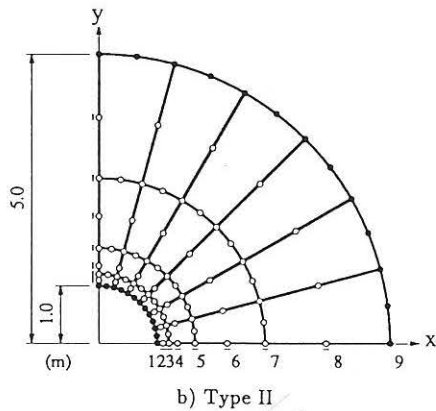


図14 原形状



a) Type I



b) Type II

- x,y,z方向固定 ○ x方向自由, y,z方向固定
- x,y,z方向自由 |○ y方向自由, x,z方向固定

図15 要素分割

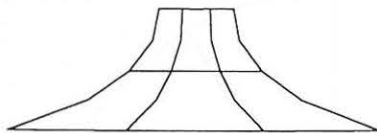
表5 解析諸元

要素分割	Type I	Type II
要素数	6	24
節点数	29	93
自由度数	33	208
a (m)	1.0	1.0

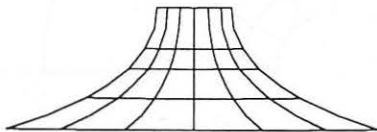
2) 解析結果

解析結果を図16に示す。また、解析結果と理論形状との比較を行なうために、図15で示す節点 (Type Iは1~5, Type IIは1~9) の座標値を図17と表6に示す。

これらの結果から、Type IIでは誤差も小さく、曲面も十分に表現できたことがわかる。また、Type Iでは、節点2で1.11%の誤差が生じるものの、図17に示したようにカテナイド曲面は十分表現できたといえる。



a) Type I



b) Type II

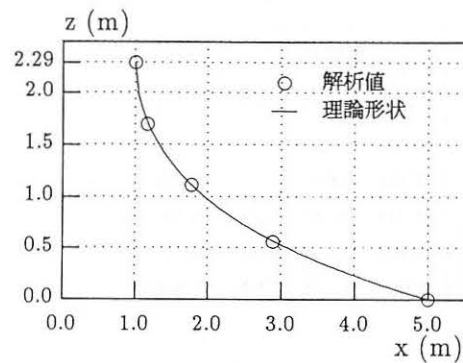
図16 解析結果

表6.a 解析値と理論値との比較 (Type I)

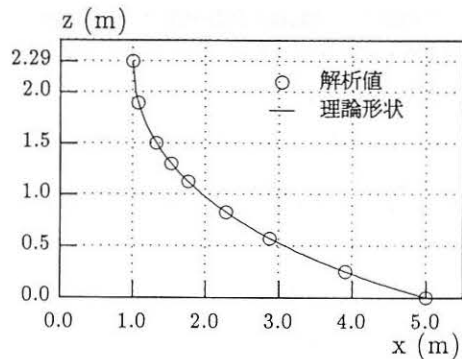
節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1	1.000	0.000	2.292	2.292	---
2	1.117	0.000	1.697	1.716	1.11
3	1.775	0.000	1.117	1.117	0.00
4	2.887	0.000	0.560	0.570	1.03
5	5.000	0.000	0.000	0.000	---

表6.b 解析値と理論値との比較 (Type II)

節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1	1.000	0.000	2.292	2.292	---
2	1.078	0.000	1.896	1.900	0.21
3	1.326	0.000	1.505	1.506	0.07
4	1.529	0.000	1.304	1.306	0.15
5	1.762	0.000	1.124	1.125	0.09
6	2.281	0.000	0.826	0.827	0.12
7	2.898	0.000	0.573	0.572	0.17
8	3.908	0.000	0.253	0.254	0.39
9	5.000	0.000	0.000	0.000	---



a) Type I



b) Type II

図17 解析値と理論形状

4. 異方張力曲面の形状解析

異方張力曲面の解析例として、サドル曲面を求める。

この曲面を用いて、解析結果と理論形状との比較を行なう。

4. 1 サドル曲面形状解析

3.2節で示した式(46)を用いて、張力比 $\delta = 1/2$ における解析を行なう。

1) 解析条件

境界形状は式(46)を用いて、図18を原形状として形状解析を行なう。ここで、要素分割は図19に示すように、 x, y 方向共に8分割とする。拘束条件は周辺をすべて固定とし、内部の節点はすべて自由とする。解析諸元を表9に示す。

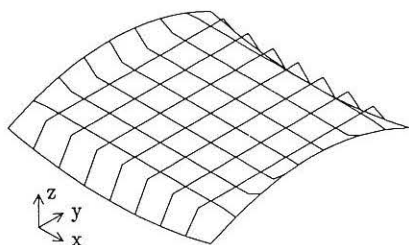


図18 原形状

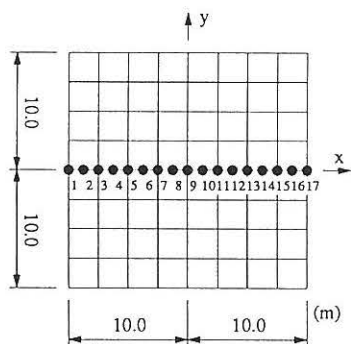


図19 要素分割

表9 解析諸元

要素数	64
節点数	225
自由度数	483
a (m)	10.0
b (m)	10.0
h_x (m)	1.25
h_y (m)	2.50
$\delta = R_y/R_x$	0.5

2) 解析結果

解析結果を図20に示す。また、解析結果と理論形状との比較を行なうために、図19の x 軸上の節点1～17の値を図21と表10に示す。

この結果より、原点付近では多少の誤差を生じている。これは、原形状の不均一性の影響と考えられる。サドル曲面は十分に表現できたといえる。

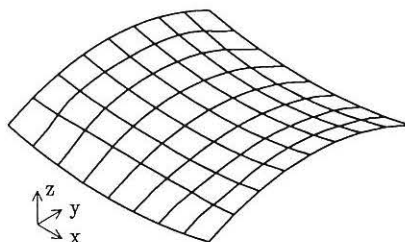


図20 解析結果

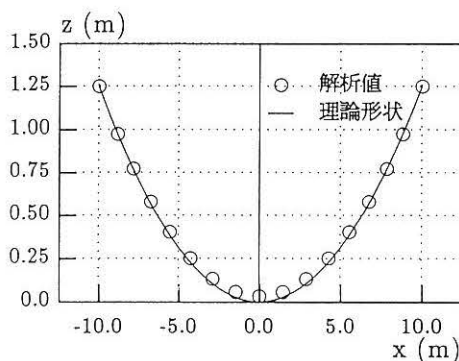


図21 解析値と理論形状

表10 解析値と理論値との比較

節点	解析値			理論値	誤差 (%)
	x (m)	y (m)	z (m)	z (m)	
1,17	10.000	0.000	1.250	1.250	---
2,16	8.819	0.000	0.974	0.972	0.21
3,15	7.830	0.000	0.773	0.766	0.91
4,14	6.746	0.000	0.581	0.569	2.07
5,13	5.555	0.000	0.403	0.386	4.22
6,12	4.262	0.000	0.251	0.227	9.56
7,11	2.890	0.000	0.134	0.104	2.40*
8,10	1.460	0.000	0.059	0.027	2.56*
9	0.000	0.000	0.034	0.000	---

注) *の値は、高さ1.25mに対する誤差とする。

5. 結語

8 節点アイソパラメトリック曲面要素を用いて、形状解析と応力、変形解析のための増分型剛性方程式の定式化を行った。応用例として、等張力曲面となるHP曲面、サドル曲面、カテナイド曲面、また、異方張力曲面となるサドル曲面の解析を行った。

等張力曲面となる例題解析は、要素数が少ない場合においても非常によい一致を示す結果が得られた。一方、異方張力曲面は、原点付近において多少の誤差を生じるが、曲面は十分に表現できている。また、これらの形状解析は、少ない収束計算回数で精度のよい解が得られている。したがって、本手法は実務的にも十分適用可能であると考えられる。

ここでは、形状解析について論じたが、今後、連続体としての増分型構成方程式^{9,10)}を導入することにより、材料非線形性を考慮した応力・変形解析も行う予定である。

6. 謝辞

本研究は、平成4年度能村膜構造技術振興財団の研究助成(研究代表者:加藤史郎)を受けて実施された成果であり、ここに能村膜構造技術振興財団に深く感謝の意を表します。

本研究の開始にあたり膜構造研究論文集を通じて研究の方向を与えて頂いた横浜国立大学石井一夫博士、研究上の貴重な示唆を頂きました太陽工業空間技術研究所南宏和博士に感謝します。

[参 考 文 献]

- 1) 石井一夫:膜構造の形状解析(形状決定問題)概説,膜構造研究論文集'89, PP.83~107, 1989年
- 2) 石原 競, 八木孝憲, 萩原伸幸, 大森博司:極小曲面解析による膜構造の形状解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第469号, PP.61~70, 1995年3月
- 3) 石原 競, 八木孝憲, 池田一成, 永友良幸, 大森博司:膜構造の設計原形曲面決定法に関する研究 その1~4, 日本建築学会大会学術講演梗概集, PP.707~714, 1995年8月
- 4) 鈴木俊男, 半谷裕彦:極小曲面の変数低減による有限要素解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第425号, PP.111~120, 1991年7月
- 5) 正岡典夫, 石井一夫:低次四辺形膜要素による形

状解析について, 膜構造研究論文集'90, 日本膜構造協会, PP.19~30, 1990年

- 6) 正岡典夫, 石井一夫:低次四辺形膜要素による応力変形解析, 膜構造研究論文集'91, PP.1~12, 1991年

- 7) 鈴木俊男, 半谷裕彦:異方張力曲面の有限要素法による形状解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第431号, PP.47~55, 1992年1月

- 8) 石井一夫:膜構造の応力・変形解析概説, 膜構造研究論文集'90, PP.69~105, 1990年

- 9) 加藤史郎, Petch Pongpo, 武田文義, 吉野達矢, 松本恵美: Schockモデルに基づいて膜材料の構成方程式を誘導する方法について—連続体としての増分型構成式の提案—, 膜構造研究論文集'94, PP.11~26, 1994年

- 10) 加藤史郎, 吉野達矢, 松本恵美, 武田文義, 並田忠政: Schockモデルに基づいた膜材料の構成方程式の定式化 その1~3, 日本建築学会大会学術講演梗概集, PP.731~736, 1995年8月

Analysis of membrane structure based on isoparametric curved elements

Shiro Kato*¹

Tatsuya Yoshino*²

Emi Matsumoto*²

Fumiyoshi Takeda*³

SYNOPSIS

We need both of the shape and stress analysis to grasp the structural behaviors of membrane structures and also to design them under loading.

The paper discusses a formulation of incremental stiffness equation based on the finite element method using eight-node isoparametric curved elements. The effectiveness of the eight-node isoparametric curved element is shown by the analytical results for HP surface, saddle surface and catenoid under bi-axial tension and as well as a saddle surface under non-uniform bi-axial tension.

-
- *1. Prof., Dept. of Architecture and Civil Engineering, Toyohashi University of Technology
 - *2. Graduate Student, Dept. of Architecture and Civil Engineering, Toyohashi University of Technology
 - *3. Chief Engineer, Taiyo-Kogyo Corporation, M. Eng.