折れ曲がり要素を用いたケーブル補強膜構造の解析に関する研究

境　治彦[*1]　　橘　英三郎[*2]

梗　　概

ケーブルと膜の複合構造であるケーブル補強膜構造においてはケーブルは膜面上に固定されない場合が多い。筆者らは、このようなケーブルが膜に固着されていない、つまりケーブルが膜面上をすべるということが形状決定や膜面の応力状態に及ぼす影響を解析面から把握しようとした。そのために本論文では折れ曲がり要素という新しい有限要素の概念を導入し、それを用いた数値解析例及び実験値との比較を示す。

1.はじめに

大規模な膜構造では膜のみから構成されずに、風による膜面のフラッタリングや吹き上がりを押さえるためにケーブルを膜面上に張って補強するという方法がしばしば採用される。そこで、このようなケーブルと膜の複合構造であるケーブル補強膜構造の安全性や形状決定問題に対する解析面からのアプローチがなされる必要がある[1]。しかし、これまでの膜構造の解析に関する研究（文献[2]等）は膜単独からなる構造を扱ったものが殆どである。

ところで、このような場合に用いられるケーブルは、種々の理由からケーブルが膜面上に緊結されないことが多い。従って施工時ケーブルに張力を導入する際や、竣工後に風荷重や雪荷重が作用したりする場合には両者の間にすべり現象が生じることになり、このような構造を解析するときには、こうしたすべり現象による影響を考慮する必要があると考えられる。しかしながら、このような膜面上の「すべり」現象に着目し、その挙動について解析面から把握しようという試みは、これまで殆ど為されていない。その理由としては、従来の有限要素法による方法では、膜とケーブルとの移動する接触点における力の釣り合い式を求めなければならないこと、ケーブルと膜との間に生じる摩擦の取り扱いが難しいことなど、多数の問題があったためであると考えられる。

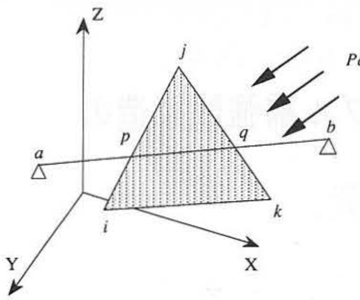
本論文においては、それらの問題を解決するために、まず新しい有限要素として折れ曲がり要素を導入し、さらに非線形計画法における*quasi-Newton*法[3][4]を用いた解析手法を提案する。次にケーブルが膜面上をすべるときに生じる摩擦の影響も考慮可能な解析手法を示す。そして、その有効性を示すために、いくつかのモデルを設定して数値シミュレーションと実験を平行して行い解析精度の検証を行う。

2．折れ曲がり要素と解析手法

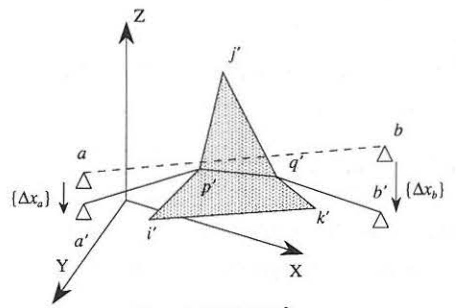
2．1　折れ曲がり要素（摩擦を無視した場合）

図1に示すような1枚の膜要素と1本のケーブルからなる簡単なモデルについて考える。図1(a)はケーブルの両端に強制変位をいくつかのステップに分割して与えることを考えたときの第nステップにおける図である。このモデルは

*1 大阪大学大学院生　　*2 大阪大学工学部建築工学科　教授



(a) nステップ



(b) $n+1$ステップ

図１　折れ曲がり要素概念図

第$n+1$ステップにおいて、図１(a)のように空気圧Paが膜に垂直に作用した状態で、図１(b)のようにa点およびb点にa'点及びb'点までの強制変位$\{\Delta x_a\}$及び$\{\Delta x_b\}$を与えたとき、点i, j, k, p, qが点i', j', k', p', q'に移動するものとする。ここでケーブルと膜要素の交点であるp点（又はp'点）及びq点（又はq'点）をすべり節点と呼ぶ。このモデルにおいて次の５つの仮定をする。

【仮定１】　ケーブルabと三角形ijkとの間に摩擦抵抗はない。（三角形膜要素の歪みは一様に分布する）

【仮定２】　折れ曲がりを平面に戻すと三角形になる。

【仮定３】　膜要素に生じる応力場は平面応力場である。

【仮定４】　ケーブルは線形弾性体である。

【仮定５】　膜要素は等方性、あるいは直交異方性の線形弾性体である。

２．２　ケーブルの歪エネルギー増分ΔW_c

$n+1$ステップにおけるケーブルの歪エネルギー増分ΔW_cは以下の手順で求めることができる。【仮定１】よりケーブルと膜面との間には摩擦がないとしているのでケーブルの

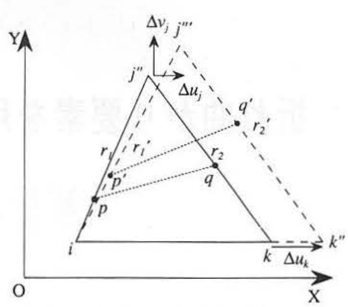


図２　折れ曲がりを伸ばした場合

張力はケーブルの任意の位置において等しい。

【手順ａ－１】　ケーブルのこの強制変位ステップにおける伸びδ_{ab}を求める。

$$\delta_{ab} = |\overline{a'p'}| + |\overline{p'q'}| + |\overline{q'b'}| - |\overline{ab}| \tag{2.2-1}$$

【手順ａ－２】　δ_{ab}からケーブルの$n+1$ステップにおける張力の増分ΔTを求める。

$$\Delta T = \frac{E_c A_c}{|\overline{ab}|} \times \delta_{ab} \tag{2.2-2}$$

E_c　：　ケーブルのヤング率

A_c　：　ケーブルの断面積

【手順ａ－３】　ΔTからケーブルの歪エネルギー増分ΔW_cを求める。

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} \times \left(\left(\Delta T + T_n \right) + T_n \right) \times \delta_{ab} \tag{2.2-3}$$

T_n　：　nステップにおける張力

２．３　膜要素の歪エネルギー増分ΔW_e

次に三角形要素の$n+1$ステップにおける歪エネルギー増分ΔW_eを三辺の長さの変化から求める。【仮定１】から三角形要素の歪は一様となる。以下の手順でΔW_eを求めることができる。

【手順ｂ－１】　nステップにおける折れ曲がりを伸ばしたときのij及びjkの長さr_1, r_2を求める。

$$r_1 = |\overline{ip}| + |\overline{pj}| \tag{2.3-1}$$

$$r_2 = |\overline{jq}| + |\overline{qk}| \tag{2.3-2}$$

【手順ｂ－２】　$n+1$ステップにおける辺ikの伸びδ_{ik}を求める。

$$\delta_{ik} = |\overline{i'k'}| - |\overline{ik}| \tag{2.3-3}$$

【手順b－3】$n+1$ステップにおいて折れ曲がりを伸ばした時の$i'j'$及び$j'k'$の長さr_1'、r_2'を求める。

$$r_1' = |\overline{i'p'}| + |\overline{p'j'}| \tag{2.3-4}$$

$$r_2' = |\overline{k'q'}| + |\overline{q'j'}| \tag{2.3-5}$$

【手順b－4】nステップにおける３節点ijkを含む平面と平行な座標系xyを考え、直線ikとx軸とが平行になるように座標軸を設定する。（図２）

【手順b－5】辺ikにikの伸びδ_{ik}（$=\Delta u_k$）を加えてk''とする。

【手順b－6】i点を中心に半径r_1、k点を中心に半径r_2の円を描き、その交点を$j''(x_j, y_j)$とする。

【手順b－7】i点を中心に半径r_1'、k''点を中心に半径r_2'の円を描き、その交点を$j'''(x_j', y_j')$とする。

【手順b－8】j''点とj'''点の座標からこの平面上におけるj点の水平及び鉛直方向の変位量が次のように求められる。

$$\Delta u_j = x'_j - x_j \tag{2.3-6}$$

$$\Delta v_j = y'_j - y_j \tag{2.3-7}$$

【手順b－9】Δu_k、Δu_j及びΔv_jより、この要素の$n+1$ステップにおける歪みの増分が次のように求められる[5]。

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\Delta\delta^e\} \tag{2.3-8}$$

$$\{\Delta\delta^e\}^T = \{0, 0, \Delta u_k, 0, \Delta u_j, \Delta v_j\} \tag{2.3-9}$$

$$[B] = \frac{1}{2S}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_k & 0 & b_j & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_k & 0 & c_j \\ c_i & b_i & c_k & b_k & c_j & b_j \end{bmatrix} \tag{2.3-10}$$

$b_i = y_k - y_j$　,　$c_i = x_j - x_k$

S：　三角形ijkの面積

【手順b－10】$\{\Delta\varepsilon\}$から応力の増分が次のように求められる。

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} \tag{2.3-11}$$

ここで、$[D]$は構成行列であり、膜が等方性材料であるとすると、

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{2.3-12}$$

E　：　ヤング率

ν　：　ポアソン比

直交異方性材料であるとすると、

$$[D] = \frac{E_2}{1-\tilde{E}\nu_{21}^2}\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{E}\nu_{21} & 0 \\ \tilde{E}\nu_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}(1-\tilde{E}\nu_{21}^2) \end{bmatrix} \tag{2.3-13}$$

$\tilde{E} = \dfrac{E_1}{E_2}$　,　$\tilde{G} = \dfrac{G_{12}}{E_2}$

E_1, E_2：1, 2方向のヤング率

G_{12}：剪断弾性係数

ν_{21}：2方向の応力に対するポアソン比

【手順b－11】以上から要素の$n+1$ステップにおける歪エネルギー増分ΔW_eが次のように求められる。

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}\left[\{\sigma_n\} + \left(\{\sigma_n\} + \{\Delta\sigma\}\right)\right]^T \{\Delta\varepsilon\}\cdot t \cdot S \tag{2.3-14}$$

$\{\sigma_n\}$　：　nステップにおける応力

t　：　膜厚

２．４　外力（空気圧）のポテンシャルエネルギー増分

空気圧の$n+1$ステップにおけるポテンシャル増分ΔW_pを近似的に求める。空気圧を考える場合、空気圧Paは強制変位ステップにおける初期状態において要素に対して垂直に働き、同一ステップ内ではその方向および大きさを変えないものとする。空気圧と等価な節点外力を次のように定義する。

$$p_m = S_m \times Pa \qquad m = i, j, k \tag{2.4-1}$$

ここで、S_mは図３のように三角形を分割したときにそれぞれの節点が空気圧を受け持つ面積である。p_mは三角形のそれぞれの節点に集中荷重として働く空気圧と等価な節点外力である。空気圧のポテンシャル増分ΔW_pを近似的に次

S_i　：i点が受け持つ面積
S_j　：j点が受け持つ面積
S_k　：k点が受け持つ面積

図３　空気圧を受け持つ面積

のように与える。

$$\Delta W_p = -\sum_m \left(p_m \times \Delta_m\right) \tag{2.4-2}$$

Δ_m：p_mの向きと同じ方向のm節点の変位量

2．5　ペナルティ関数

【仮定２】折れ曲がりを平面に戻すと三角形になる、を満たす条件としてペナルティ関数G_pを次のように設定する。この関数は折れ曲がりをのばして座標を変換した図２においてp'点及びq'点が直線$i'j'''$及び直線$j'''k''$上にのるという拘束条件を付加するものである。

$$G_p = \mu(\angle i'p'q' + \angle j'p'q' - \pi)^2 + \nu(\angle j'q'p' + \angle p'q'k' - \pi)^2 \tag{2.5-1}$$

μ, ν　：十分大きな正の数

2．6　目的関数

以上で求めたポテンシャルエネルギー増分とペナルティ関数をすべてたし合わせることによって目的関数$\Delta\Pi$を次のように定める。

$$\Delta\Pi = \Delta W_c + \Delta W_e + \Delta W_p + G_p \tag{2.6-1}$$

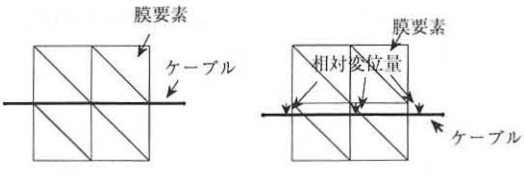
2．7　エネルギー増分の最小化

膜構造の解析を有限要素法で行う場合、通常は各要素における節点変位と要素の歪みの関係式及び歪みと応力の関係式をたて、さらに各節点における力の釣り合い式をたてた後にそれを全節点について重ね合わせて多元の連立方程式を解く方法をとる場合が多いが、ここではその釣り合い式の代わりに各要素の歪エネルギー増分と外力のポテンシャル増分を求めて、それらすべてをたし合わせたエネルギー増分を目的関数とし、それを最小化することによって解を求めるといった方法をとる。最小化の方法としては、非線形計画法における*quasi-Newton*法[3][4]を使用する。

3．膜面とケーブルとの間の摩擦を考慮した解析手法

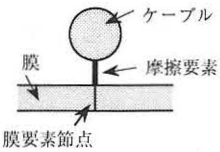
3．1　摩擦要素

図４のような膜要素とケーブルからなるモデルについて考える。このモデルにおいても前項と同様にケーブルの両端に強制変位を与える。

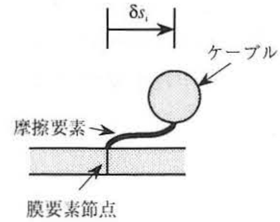


(a)　変形前　　　(b)　変形後

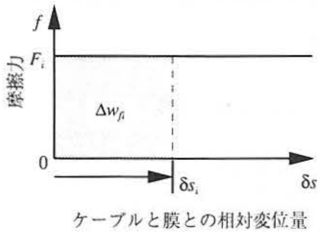
図４　摩擦を考慮する場合のモデル



(a)　摩擦要素（変形前）



(b)　摩擦要素（変形後）



(c)　摩擦要素の変形と力の関係

図５　摩擦要素の要素特性

ケーブルが膜面上に接触しながらすべるとき、摩擦による抵抗力が生じる。この摩擦力を受け持つ図５のような特性を持つ要素を膜面とケーブルとの間に挿入する[6]。摩擦を考慮する際、次に挙げる２つの仮定を追加する。

【仮定６】ケーブルの軸方向の摩擦は無視する。（ケーブルの張力は一様である。）

【仮定７】同一変形ステップ中では摩擦力の方向及び大きさは変化しない。

図５(c)のF_iは摩擦力であり、その求め方については次項

に述べる。摩擦要素は膜要素の節点とケーブルとの間に存在するものとする。また、変形ステップの初期においては図4(a)のようにケーブルが膜要素の節点上にくるようにメッシュ分割しておく。変形が進み、膜とケーブルとの間にすべりが生じたとき、ケーブルと膜との位置関係は図4(b)のようになる。このとき、ケーブルがすべって進入した膜要素が折れ曲がる。膜面とケーブルとの間の摩擦力は膜要素の節点とケーブルとの間にある摩擦要素に与えることにする。この方法により折れ曲がり要素を摩擦を考慮する場合にも拡張して用いる。

3．2　等価摩擦力

一般に2つの物体間の摩擦力は接触圧に摩擦係数を乗じたもので与えられ、2物体間の相対変位の方向とは常に逆方向に働く。実現象では接触圧σ_Nは図6のようにケーブルに沿って変動するものと考えられ、それに伴い摩擦力fも変動すると考えられるが、ここではすべり節点においてσ_N、fと等価な接触力及び摩擦力をそれぞれN_i及びF_iとしてこれらの力を取り扱うことにする。この等価接触力は図7で示すケーブルのすべり節点における力の釣り合いから、ケーブルの張力Tとケーブルの張力ベクトルがすべり節点でなす角θによって次のように定義する。

$$N_0 = T\cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{：膜端部} \tag{3.2-1}$$

$$N_i = T\,\frac{1-\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i)} \quad \text{：膜要素境界部} \tag{3.2-2}$$

上記の等価接触力に摩擦係数μを乗じたものを等価摩擦力F_iとする。（図6）

$$F_i = \mu N_i \tag{3.2-3}$$

この摩擦力は実際に作用する位置と異なった場所の節点に与えることになるが、近傍における静的等価な力の置換であることから*Saint-Venant*の原理により誤差はその近傍にとどまることが保証される。

3．3　摩擦要素のポテンシャルエネルギー増分

すべり節点iの摩擦要素に蓄えられるエネルギー増分Δw_{fi}は図5(c)で示される相対変位量と摩擦力が囲む面積で与えられる。

$$\Delta w_{fi} = F_i \times \delta s_i \tag{3.3-1}$$

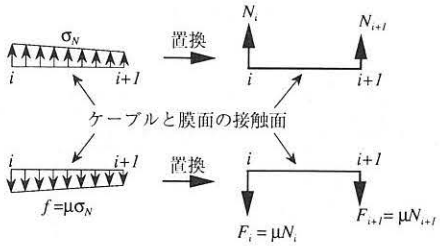


図6　等価接触力と等価摩擦力

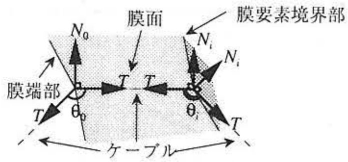


図7　節点における力の釣合

ここで、δs_iは当該変形ステップにおける摩擦力に沿った方向の膜とケーブルとのすべりによる相対変位量である。

全摩擦要素に蓄えられるエネルギー増分ΔW_fは、次式で求められる。

$$\Delta W_f = \sum_i \Delta w_{fi} \tag{3.3-2}$$

3．4　摩擦を含んだ目的関数$\Delta\Pi'$

このモデルにおける目的関数$\Delta\Pi'$は式(2.6-1)に式(3.3-1)を付加することによって次のように定められる。

$$\Delta\Pi' = \Delta W_c + \Delta W_e + \Delta W_p + \Delta W_f + G_p \tag{3.4-1}$$

以下の解析手順は(2.6-1)式の$\Delta\Pi$の代わりに(3.4-1)式の$\Delta\Pi'$を最小化することによって同様の方法で行う。

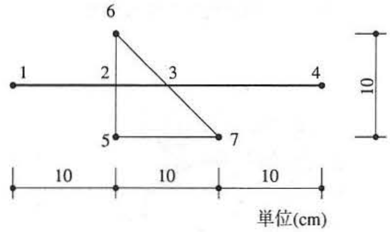
4．解析例

4．1　ケーブル1本と膜要素1枚からなるモデル（解析モデル1）

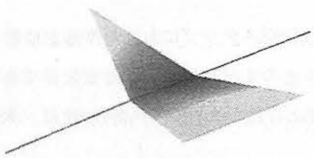
図8(a)に示すようなケーブル1本、膜要素1枚の簡単なモデルのケーブルの両端にいくつかのステップに分けて強制変位を与える。ここで膜材料は等方性であるとし、節点1, 4, 5, 6, 7はピン支持されている。このモデルの解析条件は表1の通りである。両端の節点a, bに紙面と直交方向の変位を与えたときの形状を図8(b)に示す。

表1　解析モデル1の解析条件

ケーブルの引張り剛性E_cA_c	32000 (kgf)
膜の縦糸方向ヤング率E	300 (kgf/cm²)
膜のポアソン比ν	0.25
膜厚t	0.08 (cm)
内圧Pa	0.0 (kgf/cm²)
摩擦係数μ	0.0



(a)　解析モデル1



(b)　解析モデル1の解析結果

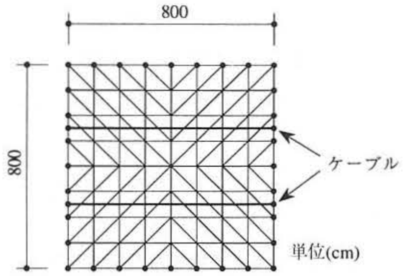
図8　膜要素1枚の解析モデルと解析結果

4．2　内圧をかけるモデル（解析モデル2）

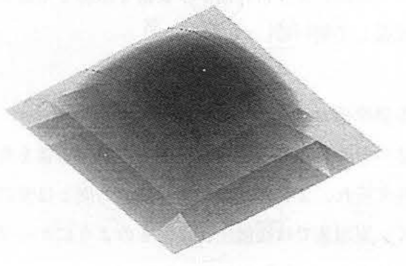
図9(a)に示すようなモデルにいくつかのステップに分けて空気圧をかけた後に太線で示した位置にケーブルをかけその両方の固定端に紙面と直交方向の強制変位$\{\Delta x\}$を与えてケーブルに張力を導入する。このモデルは周辺固定とし膜要素は等方性材料であるとする。解析条件は表2の通りである。図9(b)に内圧をかけるステップ終了時の形状を示す。また、図9(c)に強制変位ステップ終了時の形状を示す。

表2　解析モデル2の解析条件

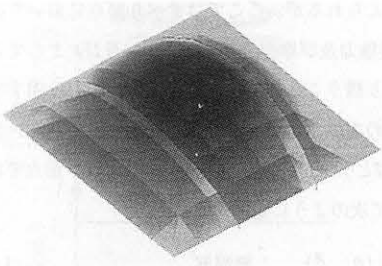
ケーブルの引張り剛性E_cA_c	32000 (kgf)
膜の縦糸方向ヤング率E	300 (kgf/cm²)
膜のポアソン比ν	0.25
膜厚t	0.08 (cm)
内圧Pa	0.01 (kgf/cm²) / 5 (step)
摩擦係数μ	0.0
強制変位Δx	15 (cm) / 5 (step)



(a)　解析モデル2



(b)　解析モデル2の解析結果（内圧ステップ終了時）



(c)　解析モデル2の解析結果（最終形状）

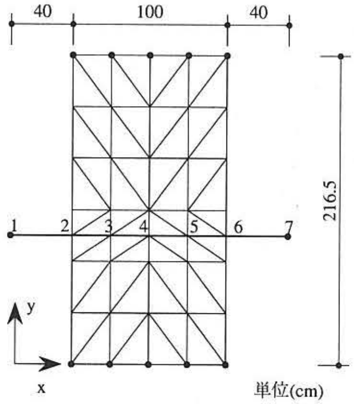
図9　内圧をかけるモデルと解析結果

4．3　実験との比較のためのモデル（解析モデル3）

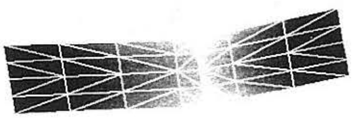
図11(a)に示すようなモデルのケーブルの両端に図10に示すような強制変位を与える。このモデルの解析条件は表3に示す。図11(b)に解析による最終形状を示す。また、図12にケーブルの位置における初期位置からの変位量及びケーブルの張力を実験値と比較したものを示す。これらの図から、ケーブルと膜面との間の摩擦係数を設定することに

表3　解析モデル3の解析条件

ケーブルの引張り剛性E_cA_c	47638 (kgf)
膜の縦糸方向引張り剛性E_yt	1394 (kgf/cm)
膜の横糸方向引張り剛性E_xt	140 (kgf/cm)
膜の剪断弾性係数$G_{xy}t$	12 (kgf/cm)
膜のポアソン比ν_{yx}	0.065
摩擦係数μ	0 or 0.7

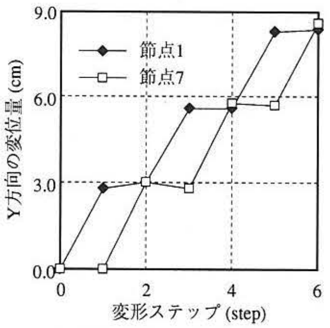


(a) 解析モデル３

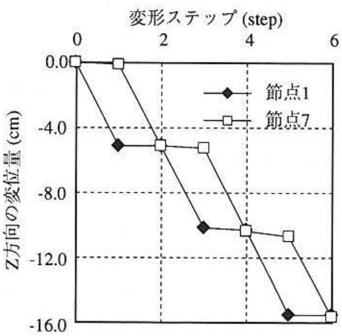


(b) 解析モデル３の解析結果

図11 実験との比較モデルと解析結果

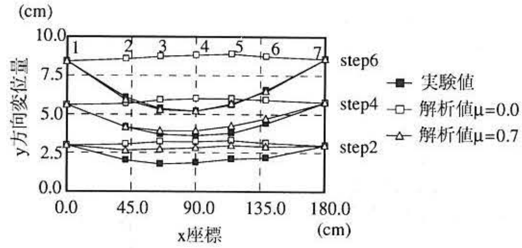


(a) 強制変位のy方向成分

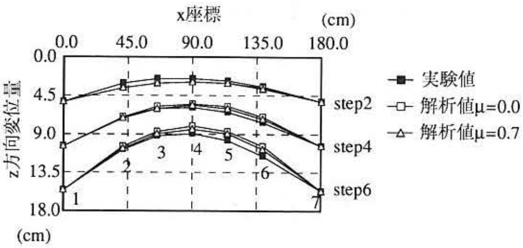


(b) 強制変位のz方向成分

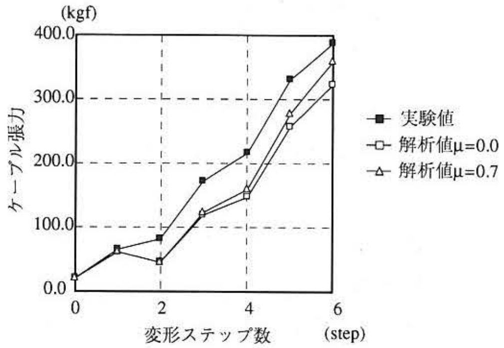
図10 ケーブル両端の強制変位



(a) ケーブルの位置のy方向の変位量のグラフ



(b) ケーブルの位置のz方向の変位量のグラフ



(c) ケーブルの張力のグラフ

図12 実験値と解析値との比較

よって実験値と近い解析結果が得られることがわかる。特にケーブルと膜面との間のすべりによるy方向の相対変位量が大きくなる場合、図12(a)で見られるように摩擦を考慮するかしないかによる違いが顕著である。また、接触圧の小さいステップでは解析結果と実験結果の間で変形状態やケーブルの張力の差はやや大きくなる。これは、実際には摩擦係数には静止摩擦係数と動摩擦係数があるのに対して、この解析手法ではそれらを分けて考慮していないためであると考えられる。

５．まとめ

本論文で提案した折れ曲がり要素とエネルギー増分最小化の手法を用いてケーブルが膜面上をすべるという問題を比較的容易に扱うことができ、安定した収束解を得ることができた。また、摩擦が問題となるような場合においても本法による結果は実験値とかなり近いものが得られた。

謝辞

本論文作成に当たり、多大なご協力を得ました太陽工業（株）空間技術研究所の小田憲史氏、単文孝氏、河野義裕氏に感謝します。

【参考文献】

［１］石井一夫：ケーブル構造・ケーブル補強膜構造の解析概説、膜構造研究論文集’ ９３、（社）日本膜構造協会 (1993), pp.87-116

［２］劉福他：石鹸膜四面体要素による等張力曲面の形状解析、膜構造研究論文集’ ９４、（社）日本膜構造協会 (1994), pp.87-91

［３］今野浩、山下浩：非線形計画法 、日科技連 (1978) ,p.206

［４］David G. Luenberger ：INTRODUCTION TO LINEAR AND NONLINEAR PROGRAMMING, Addison-Wesley Publishing Company (1973) , pp.189-215

［５］O.C.Zienkiewicz ：The Finite Element Method in Engineering Science, McGRAW-HILL・LONDON (1971)

［６］矢川元基、平山浩、安藤良夫：ペナルティ法による二次元およびはりの接触問題の解析、日本機械学会論文集（A編）46巻411号(1980)、pp.1220-1229

Numerical Analysis of Cable Reinforced Membrane Structures Using Foldable Finite Elements

Haruhiko SAKAI*1

Eizaburou TACHIBANA*2

SYNOPSIS

In this paper, we introduce a new idea of foldable finite elements in order to solve the behavior of cable reinforced membrane structures (CRMS). By using this element we composed a finite element code which is developed to treat CRMS. Contact problems, slide problems, large deformation problems, and friction problems (which may be required to analyze CRMS) can be treated by this method. In each incremental step, the energy minimization procedure is adopted instead of equilibrium equations.

In order to assure this method, three examples are calculated. One of those models is investigated by the experimental result. And it appeared that this method is useful enough to analyze CRMS and is considerable close to the experimental results.

*1 Graduate student, Department of Architectural Engineering Osaka University

*2 Professor, Department of Architectural Engineering Osaka University