

石鹼膜四面体要素による等張力曲面の形状解析

劉 磊*1

帯屋洋之*2

郝 璋*2

後藤茂男*3

梗 概

有限要素構造の要素変形と節点変位の適合条件の非線形性に起因する幾何剛性を要素固有の剛性と完全に分離して接線剛性法を適用する幾何学的非線形解析手法を利用して、等張力四辺形曲面要素の近似モデルとして石鹼膜四面体要素を用いて大空間薄膜構造の合理的な初期形状解析を検討する。

1. まえがき

大空間薄膜構造の合理的な初期形状決定問題については、石鹼膜に見られる等張力曲面を要素剛性を持たない三角形有限要素構造としてモデル化し、これに要素変形と節点変位の適合条件の非線形性に起因する幾何剛性と要素固有の剛性とを完全に分離した接線剛性法を適用する方法の有用性が既の実証されている。

本研究では、メッシュ分割を三角形要素と四辺形要素の自由な組み合わせで選べるよう等張力四辺形曲面要素の近似モデルとして石鹼膜四面体要素を用いる手法を提案している。

また、等張力曲面の形状解析において石鹼膜要素は面内剛性を持たず、法線方向の外力に対してのみ抵抗できる幾何学的剛性を有しているため、面内変位を拘束して、各節点の法線方向の節点不平衡力が0に収束すれば、節点は等張力曲面上にあり正解値とすることができるので、この手法は極めて合理的であるといえる。

これより、データ入力 of 簡易化、多様化と要素分割の合理化及び解の高精度化、演算時間の短縮を図ることができた。

2. 四辺形曲面要素の分割

無重力状態で等張力となる膜構造の形状解析としては、単純明解な三角形要素を用いて十分な精度の解析

手法が得られているので、四辺形四節点要素を曲面としての厳密な幾何剛性の誘導は実用上必要無く、これを平面三節点要素に分解することを考える。

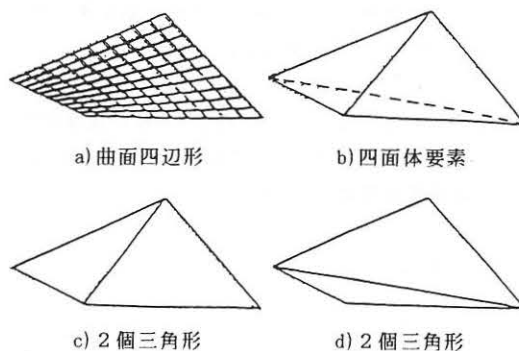


図-1 曲面四辺形要素の三角形による分割

c), d) のように曲面四辺形を2個の三角形に分割して解析する場合、同一の節点配置の膜構造に対して分割対角線の組み合わせの相違によりそれぞれ微妙に異なった収束解が存在することとなる。

通常の要素力剛性を持った膜要素の場合、曲面四辺形要素に対してはb)の四面体要素による置換は成立しないが、面内剛性の無い石鹼膜要素の場合には置換が可能となり、c), d)のようなメッシュ分割上の問題は解消され、解の高精度化と入力 of 簡易化が図られる。

*1 佐賀大学大学院 博士課程

*2 佐賀大学理工学部 助手

*3 佐賀大学理工学部 教授

3. 石鹼膜四面体要素の接線剛性方程式

共通座標系に関する要素の節点力ベクトルを X 、要素座標系に関する要素力ベクトル S として平衡条件式を

$$X = \alpha S \quad (1)$$

と表せば、その微小変動量の関係より、石鹼膜や軸力線構造に見られるような、要素力剛性の無い幾何剛性のみで要素力が一定の場合

$$\delta X = \delta \alpha S = K_\alpha \delta x \quad (2)$$

のように要素の接線剛性方程式が得られる。ここで δx は X の微小増分 δX に対応する変位増分である。

石鹼膜三角形要素の場合、三頂点を 1, 2, 3 とし、この接線剛性方程式を

$$\delta \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

とおく

ここで、この石鹼膜構造系の節点 i に集まる全要素の面積ベクトルの合ベクトルの方向を石鹼膜曲面の i 点での法線方向と定義してその方向余弦ベクトルを D_i と置き、スカラー剛性係数を

$$G_{ij} = D_i^T K_{ij} D_j \quad (4)$$

を用いれば、式 (3) の 1 節点 3 自由度の接線剛性方程式より、法線方向のみを可動とした 1 節点 1 自由度の接線剛性方程式が

$$\delta \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

のように得られる。ここに δT_i 、 δt_i は三角形要素の i 点における法線方向の節点力と節点変位の微小増分である。

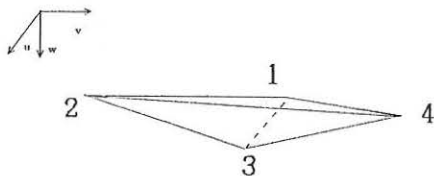


図-2 共通座標系と要素

さらに 4 面体要素の場合には、4 節点を 1, 2, 3, 4 とし、三角形 124, 123, 234, 134 よりなる面要素の番号を 1, 2, 3, 4 とおいて、 p 要素の剛性係数を G_{p1j} のように

表すことにすれば

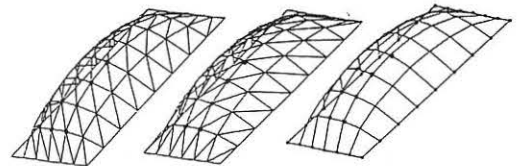
$$\begin{pmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \\ \delta T_3 \\ \delta T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}^1 + G_{11}^2 + G_{11}^4, G_{12}^1 + G_{12}^2, G_{13}^1 + G_{13}^4, G_{14}^1 + G_{14}^4 \\ G_{21}^1 + G_{21}^2, G_{22}^1 + G_{22}^2 + G_{22}^3, G_{23}^1 + G_{23}^3, G_{24}^1 + G_{24}^4 \\ G_{31}^2 + G_{31}^4, G_{32}^2 + G_{32}^3, G_{33}^2 + G_{33}^3 + G_{33}^4, G_{34}^2 + G_{34}^4 \\ G_{41}^1 + G_{41}^4, G_{42}^1 + G_{42}^3, G_{43}^1 + G_{43}^3, G_{44}^1 + G_{44}^3 + G_{44}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \\ \delta t_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

が得られる。

4. 計算例

1) 三角形分割と四辺形分割の比較

周辺固定された初期形状 3 m × 4 m の長方形石鹼膜面を三角形での分割と変形後は四面体となる四辺形での分割の場合。



三角形要素 a 三角形要素 b 四辺形要素

図-3 収束形状

それぞれ単位膜張力を 12.5 kg f/m として、上方へ 10 kg f/m² の内圧を与えて、それぞれの収束形状を求めた。

表-1 は三角形での分割による、可動点変形後の収束座標値である。

節点	分割 a の収束座標値			分割 b の収束座標値		
	u	v	w	u	v	w
10	0.4669	0.9898	0.3725	0.4677	0.9924	0.3732
11	0.4594	1.4986	0.4112	0.4594	1.5014	0.4112
17	0.9723	0.9763	0.5825	0.9736	0.9786	0.5825
18	0.9671	1.4988	0.6432	0.9671	1.5012	0.6432
24	1.4850	0.9666	0.6919	1.4862	0.9679	0.6918
25	1.4828	1.4994	0.7639	1.4828	1.5006	0.7639
31	1.9994	0.9635	0.7261	2.0006	0.9635	0.7261
32	2.0000	1.5000	0.8016	2.0000	1.5000	0.8016

表-2は四角形での分割による、可動点変形後の取
束座標値である。

表-3はそれぞれの反復回数と最大不平衡力値である。

表-2 取束座標値				表-3 最大不平衡力	
結 点 i	四角形による分割			反復回 数 r	最大不平衡力
	u	v	w	r	三角形 四角形
10	0.4674	0.9911	0.3729	0	2.500 2.500
11	0.4595	1.5000	0.4112	1	0.951 0.951
17	0.9730	0.9775	0.5825	2	0.120 0.108
18	0.9672	1.5000	0.6432	3	0.032 0.030
24	1.4857	0.9673	0.6918	4	0.008 0.007
25	1.4829	1.5000	0.7638	5	0.001 0.002
31	2.0000	0.9635	0.7260	6	0.000 0.000
32	2.0000	1.5000	0.8015		

表を見ると、四角形分割による可動点変形後の取束
座標値はほぼ三角形分割（2種類）による可動点変形
後の取束座標値のほぼ平均値である。

2) 3自由度系と1自由度系の比較

a) 周辺が固定された初期形状 $8\text{m} \times 8\text{m}$ の正方形
(図-4) 石鹼膜面を四角形での分割により、単位膜
張力を 25kgf/m として、上方への内圧を 10kgf/m^2
を与えて3自由度系による形状解析と1自由度(放線
方向のみ)による形状解析を比較する

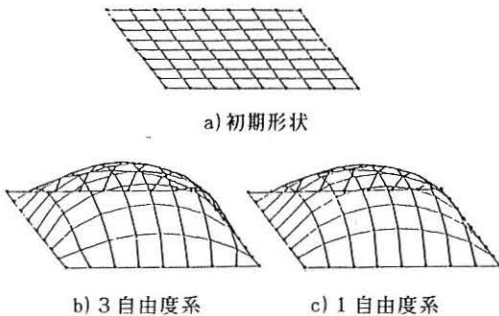


図-4 初期形状正方形

3自由度系のある状態(30回反復形状)と1自由
度取束形状を比べると、多少節点の取束位置は異なる
が曲面形状が同じであることがわかる。

b) 周辺が固定された十字形(図-5) 石鹼膜面を四
角形での分割より、単位膜張力を 14.0kgf/m
として、上方への内圧を 10kgf/m^2 を与えて3
自由度系による形状解析と1自由度(放線方向のみ)
による形状解析を比較する。

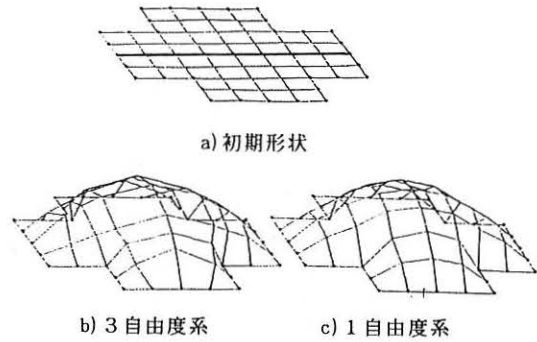


図-5 初期形状十字形

3自由度系による形状解析は面内不平衡力を起因す
る節点の面内変位が大きいため、二つ曲面形状は同じ
であることが見にくい、二つ中央軸線の変形を比べ
ると同じであることが判った。

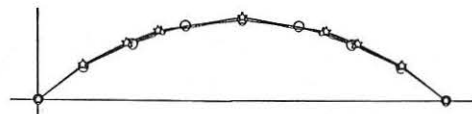


図-6 中央軸線の変形の比較

面内剛性のない石鹼膜等張力曲面の形状決定におい
ては、面内不平衡力に起因する面内変位は絶対的な意
味を持たない。従って、節点面内方向変位を拘束して、
法線方向の不平衡力が0になる状態を取束状態とす
ることができる。

3) 石鹼膜四面体要素による等張力曲面の形状解析

a. 周辺が固定されたドーナツ形を四角形での分割
により、単位膜張力 15.0kgf/m として、上方
へ 10.0kgf/m^2 を与えて、計算を行った。

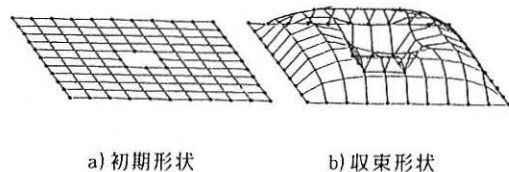


図-7 ドーナツ形

表-4 反復過程の最大不平衡力の推移

反復回数	不平衡力	
	辺張力幾何剛性	膜張力幾何剛性
0	4.900	4.900
1	2.501	2.501
2	0.966	0.829
3	0.515	0.395
4	0.295	0.206
5	0.172	0.109
6	0.101	0.058
7	0.059	0.031
8	0.035	0.017
9	0.020	0.009
10	0.012	0.005
11	0.007	0.003
12	0.004	0.001
13	0.002	

b. 周辺固定されたH形を四辺形での分割により、一定の膜張力として、適当な内圧を作用させ、収束形状を求めた。



a) 初期形状 b) 収束形状

図-8 周辺固定H形

表-5 反復過程の最大不平衡力の推移

反復回数	最大不平衡力	
	辺張力幾何剛性	膜張力幾何剛性
0	4.900	4.900
1	2.888	2.888
2	0.864	0.711
3	0.426	0.414
4	0.246	0.229
5	0.147	0.128
6	0.089	0.073
7	0.054	0.041
8	0.033	0.024
9	0.020	0.014
10	0.013	0.008
11	0.008	0.004
12	0.005	0.003
13	0.003	0.001
14	0.002	

c. 周辺固定された菱形を四辺形での分割により、単位膜張力25.0 kgf/mに対して上方へ内圧を11 kgf/m²とした収束形状を求める。



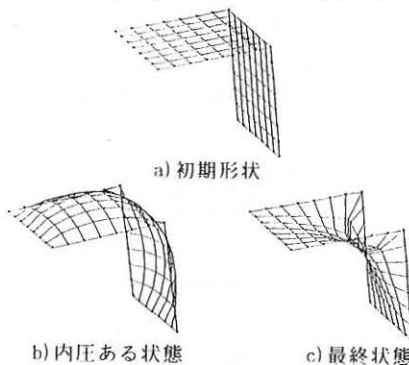
a) 初期形状 b) 収束形状

図-9 周辺固定ヒシ形

表-6 菱形反復過程の最大不平衡力の推移

反復回数	最大不平衡力	
	全方向	法線方向
0	9.526	9.526
1	5.067	5.066
2	0.683	0.649
3	0.681	0.237
4	0.699	0.082
5	0.705	0.028
6	0.707	0.010
7	0.708	0.003
8	0.708	0.001

d. 周辺固定の直角に折れた長方形を初期形状として、無圧力時の石鹸膜釣り合い形状を求める。



a) 初期形状 b) 内圧ある状態 c) 最終状態

図-10 直角に折れた長方形

この場合、初期形状と最終釣り合い形状との差が大きいため、そのままでは解は収束しないので、まず外側へ適当な内圧を作用させた形状をもとめ、つぎにこれを先行状態として、内圧を0とすればよい。

初期状態の四辺形要素は辺長1mの正方形で膜張力20 kgf/mに対して内圧を5 kgf/m²とした。

いずれも6回の反復で収束したが、内圧のある中間状態は数回の反復で多少の不均衡力を残して内圧を0として最後の反復へと移行しても十分である。

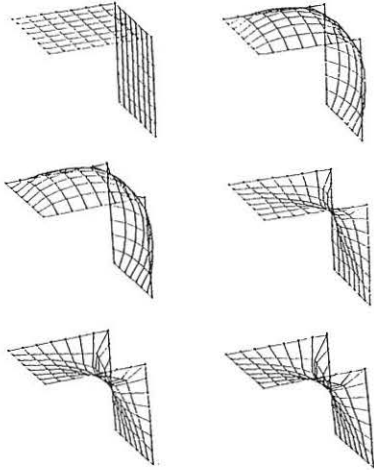


図-11 各反復段階の形状変化

5. まとめ

無重力状態で等張力となる膜構造の形状解析としては、単純明解な三角形要素を用いて十分な精度の解析手法が得られているので、四辺形四節点要素を曲面として厳密な幾何剛性の誘導はしなくても、平面三節点要素に分割することより、等張力四辺形曲面要素の近似モデルとして石鹸膜四面体要素を用いることができた。これにより、三角形要素分割上の問題は解消され入力の簡易化、多様化と高精度化を図った。

また、空間3自由度系より法線方向1自由度系への変換により各反復過程において処理すべき連立方程式

の元数は激減し、演算時間も大幅に短縮することができた。

無圧力時の石鹸膜約合形状を求めることについて、初期形状を簡単にし、目的形状との差が極端に大きく、そのままでは解が収束しない場合、内圧のある中間状態を経由して2段階で目的形状を求める手法が極めて有用であった。

なお、本研究は能村膜構造技術振興財団の助成金によって行ったものである。

(参考文献)

- 1) 後藤茂男、荒牧軍治、井嶋克志、深江葉子：要素剛性分離の手法による等張力曲面の形状解析と膜構造解析、構造工学論文集Vol.37A,1991.3
- 2) 後藤茂男、荒牧軍治、井嶋克志、深江葉子：要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析、構造工学論文集Vol.37A,1991.3
- 3) Prof. Somasundaram Valliappan, Department of Civil Engineering, University of New South Wales, Australia: Finite Element Method and its Application. Special Lecture 1994.
- 4) 正岡典夫、石井一夫：低次四辺形膜要素による応力変形解析、膜構造研究論文集'91 NO. 5
- 5) 正岡典夫：低次四辺形膜要素による振動解析、膜構造研究論文集'91 NO. 6
- 6) 鈴木俊夫、半谷裕彦：等張力曲面の数値解析、膜構造研究論文集'89 NO. 3
- 7) 石原競、大森博司、八木孝憲：極小曲面の数値解析法に関する研究、膜構造研究論文集'93 NO. 7
- 8) 登坂宣好、大西和栄 著：偏微分方程式の数値シミュレーション、東京大学出版会

THE DETERMINATION OF SOAP FILM BY TANGENT STIFFNESS METHOD

Ru Rei

SYNOPSIS

It has been showed to determinate form of soap film that composed by triangular plane elements as initial shape of structures by the tangent stiffness method.

This paper presents the determination of soap film that composed by isotonic quadrangle elements as initial of structures by the tangent stiffness method.

It's possible to use tetrahedron elements composed by four trangular plane elements as similiar model of quadrangle curved elements for soap film elements, so useing triangular plane elements to display quardrangle curved elements to get better effect is rational.

Student of doctor course, graduate school, SAGA University.