織布複合材膜の非線形変形特性解析

福永久雄 *1
関根英樹 *2
斎藤直仁 *3

梗　概

均一分布圧力を受ける異方性織布複合材膜の非線形変形特性を、数理計画法を適用して膜のポテンシャルエネルギを最小とすることにより解析する。数値例として、種々の繊維配向角を有する矩形膜およびだ円膜について、変形と内部圧力の関係を明らかにする。さらに、本手法により膜の一部の変位を拘束した矩形膜の変形特性も解析できることを示す。

1.まえがき

空気膜構造は、現在、パビリオン、スタジアム等の構造物として広く用いられており[1]、将来的には、より軽量で大規模な構造物としての可能性を有している。このような膜構造の材料としては織布複合材が使用されており、その材料特性、応力・変形解析法、形状解析法についての詳細な解説が行われている[2)-4)]。

織布複合材からなる膜材料は異方性材料であり、また、変形特性は幾何学的非線形性を示すため、数値解析がかなり複雑となる。本研究では、数値最適化手法を適用して膜のポテンシャルエネルギを最小とすることにより非線形変形特性を解析する。均一分布圧力を受ける矩形およびだ円形状の織布複合材膜の変形特性を調べ、既存の実験結果[5)]と比較検討するとともに、繊維の配向角と変形特性・応力分布との関係を明らかにする。さらに、矩形膜において、許容変位に制限がある場合の変形特性および応力分布を最適化手法に基づいて解析する。なお、本研究では織布複合材の材料非線形性については考慮していない。

2.非線形変形解析

2・1　基礎式

本研究では膜の自重等による初期たわみを無視し、内部圧力によるたわみは膜厚に比べて大きいが、形状寸法に比べて小さいものとする。このとき、図1に示す空気膜構造について、ひずみ～変位関係式は次式で示される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

ここで、$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$は面内ひずみ、$u$, v, wはx, y, z方向の変位成分である。

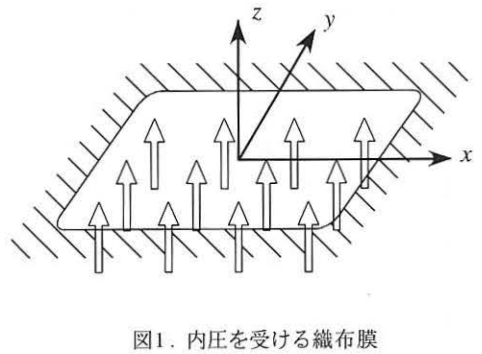


図1. 内圧を受ける織布膜

*1　東北大学工学部助教授　　*2　東北大学工学部教授　　*3　東北大学工学部大学院

また、構成関係式は次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここで、T_x , T_y , T_{xy} は単位幅当たりの面内合力成分、A_{ij} は面内剛性である。空気膜構造に用いられる織布複合材は強い材料非線形性を呈することが知られているが[2)]、本研究では簡単のため弾性特性を対象として面内剛性は一定と仮定する。

このとき、膜のポテンシャルエネルギは次式で示される。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}\iint\Big(& A_{11}{\varepsilon_x}^2 + A_{22}{\varepsilon_y}^2 + A_{66}{\gamma_{xy}}^2 + 2A_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y \\ & + 2A_{16}\varepsilon_x\gamma_{xy} + 2A_{26}\varepsilon_y\gamma_{xy}\Big)dx\,dy - p\iint w\,dx\,dy \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、pは内外部圧力差である。(3)式において、大変形時の形状変化に伴う内圧の非保存力としての効果は無視して、内圧は方向を変えない死荷重とする。

本研究では、矩形膜(図2)、だ円膜(図3)について内圧による大変形解析を行う。図2に示す矩形膜では、次の境界条件を考える。

$$\begin{aligned} & x = \pm a\ ;\ u = v = w = 0 \\ & y = \pm b\ ;\ u = v = w = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

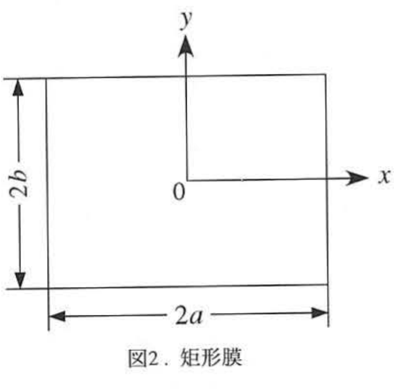


図2．矩形膜

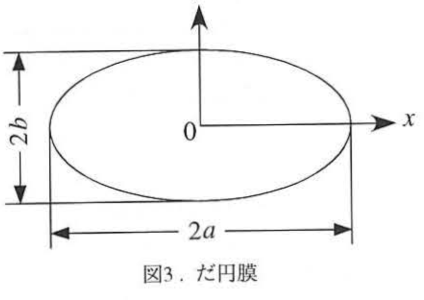


図3．だ円膜

(4)式の境界条件を満足するu,v,wの変位を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} U_{mn}\sin\frac{m\pi}{2a}(x+a)\sin\frac{n\pi}{2b}(y+b) \\ v &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} V_{mn}\sin\frac{m\pi}{2a}(x+a)\sin\frac{n\pi}{2b}(y+b) \\ w &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} W_{mn}\sin\frac{m\pi}{2a}(x+a)\sin\frac{n\pi}{2b}(y+b) \end{aligned} \tag{5}$$

一方、図3に示す周辺固定のだ円膜の場合、境界条件は次式で与えられる。

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ ;\ u = v = w = 0 \tag{6}$$

(6)式の境界条件を満足するu,v,wの変位を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} u &= \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right\}\big(U_1x + U_2y + U_3x^2 + U_4y^2 + U_5xy\big) \\ v &= \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right\}\big(V_1x + V_2y + V_3x^2 + V_4y^2 + V_5xy\big) \\ w &= \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right\}\big(W_0 + W_1x + W_2y + W_3x^2 + W_4y^2 + W_5xy\big) \end{aligned} \tag{7}$$

2・2 解法

(1)式および(5)式、(7)式を(3)式に代入することにより、ポテンシャルエネルギは圧力pと変位の未知定数で与えられる。圧力～変位関係を求めるときは、荷重増分法で微小な圧力増分に対応して、ポテンシャルエネルギを最小とする未知定数U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}（矩形膜）、U_i , V_i , W_i（だ円膜）を求める。このとき、(5)式の変位関数の項数は面内変位u , vについて$M=N=2$、たわみ w について$M=N=3$を用いた。一方、ある一定の圧力pに対応する変位を求めるときは、pを与えてポテンシャルエネルギを最小とする変位を求めた。このとき、矩形膜について、面内変位は$M=N=4$、たわみは$M=N=7$とした。

なお、最小化手法としては汎用最適化プログラムであるADSプログラム[6)]におけるDFP法、あるいはBFGS法を用いた。また、一方向探索として、黄金分割法を用いた。

3．数値計算例と考察

3・1 実験結果との比較

均一分布圧力pによる矩形織布膜の変形特性を解析し、実験結果[5)]と比較する。図4に示すように、織布膜($2a \times 2b$)の弾性主軸(X, Y軸)は座標軸(x, y軸)とθの角度をなすものとし、弾性主軸において織布は直交異方性材とみなすことができる。数値計算に用いた膜の材料は、文献5)に従い、ナイロン繊維の撚り糸を縦糸、横糸として平織りにした織布を塩化ビニールでコーティングしたものとし、弾性主軸方向の縦弾性係数E_X, E_Y、横弾性係数G_{XY}、およびポアソン比ν_Xとして次に示す値を用いる。

$$\begin{aligned} E_X t &= 800\,\mathrm{kgf/cm} \\ E_Y t &= 90\,\mathrm{kgf/cm} \\ G_{XY} t &= 8.0\,\mathrm{kgf/cm} \\ \nu_X &= 1.5,\ \nu_Y = \nu_X E_Y / E_X \end{aligned} \tag{8}$$

正方形膜($a = b = 35$ cm, $\theta = 0°$)、矩形膜($a = 46$ cm, $b = 35$ cm, $\theta = 45°$)の圧力$p = 0.02$ kgf/cm²によるたわみをそれぞれ図5、図6に示す。ここで、変位関数の項数は(5)式の面内変位については$M = N = 2$、たわみについては$M = N = 3$を用いている。図5、図6からわかるように、実験結果と解析結果は、全般にほぼ一致している。

弾性主軸と座標軸との角度が0°から90°まで変化した場合の矩形膜中央点のたわみw_c～圧力pの関係を図7に示す。図7において、計算結果を実線で実験結果は破線で示す。両者はほぼ一致しているが、圧力が増加するにつれて計算結果の方がより硬くなる。図7のたわみ～圧力関係をw_c^3～pで表示すると、図8に示すように計算結果はほぼ直線関係で示され、大変形時には$p \propto w_c^3$の関係が成り立っていることがわかる。一方、実験結果は圧力が増加するにつれて$p \propto w_c^3$の関係からずれてくるが、この要因は織布膜材の材料非線形性によっているものと考えられる。また、図7、図8より繊維配向角の違いによるたわみ～圧力の関係を知ることができ、繊維配向角により膜の変形量が非常に異なることがわかる。

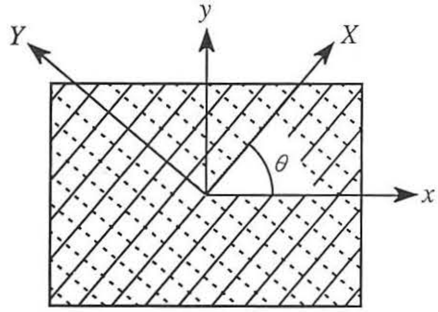


図4．直交異方性矩形膜

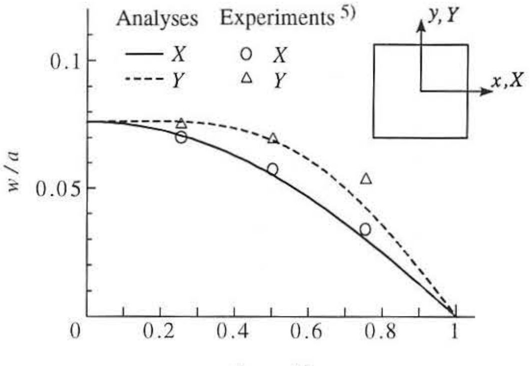


図5．正方形膜のたわみ
($a = b = 35$ cm, $\theta = 0°$)

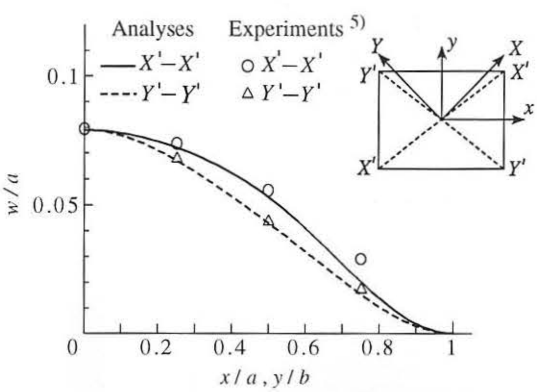


図6．矩形膜のたわみ
($a = 46$ cm, $b = 35$ cm, $\theta = 45°$)

3・2 矩形膜の変形特性

圧力$p = 0.05$ kgf/cm²を受ける$a = 46$ cm, $b = 35$ cmの矩形膜について、弾性主軸の傾き$\theta = 0°$, 22.5°, 45°, 67.5°, 90°でのたわみ等高線を図9 (a)～(e)に示す。この圧力は図7の圧力～たわみ曲線のうち高圧域の特性に対応しており、$\theta = 22.5°$のとき中央部たわみw_cが最も大きく、$\theta = 90°$のとき最も小さくなる。また、異方性のために、$\theta = 22.5°$, 45°でたわみ等高線は対角線方向に傾くことがわかる。

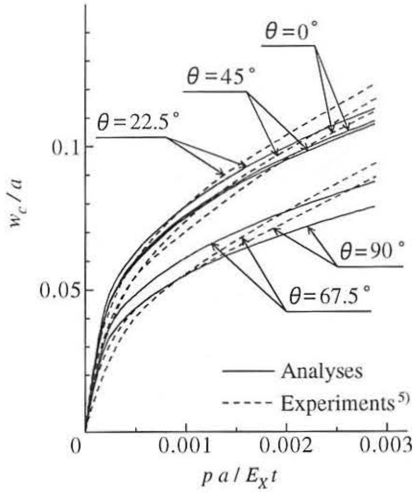


図7．圧力 p と中央点たわみw_cの関係
（a = 46 cm，b = 35 cm）

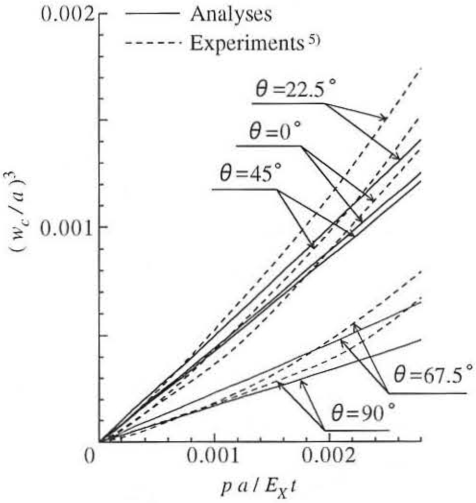
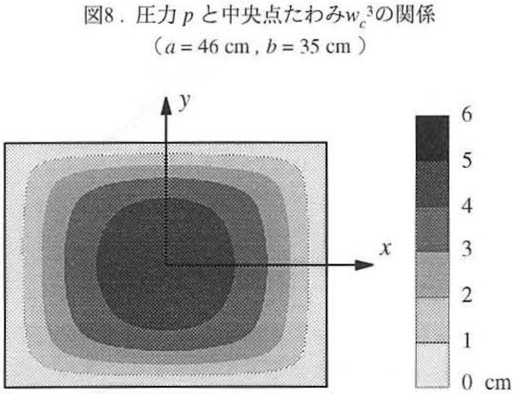
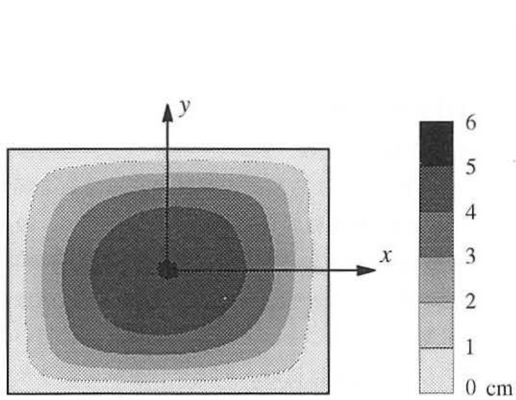


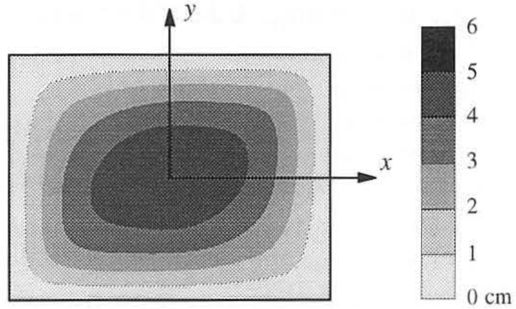
図8．圧力 p と中央点たわみw_c^3の関係
（a = 46 cm，b = 35 cm）



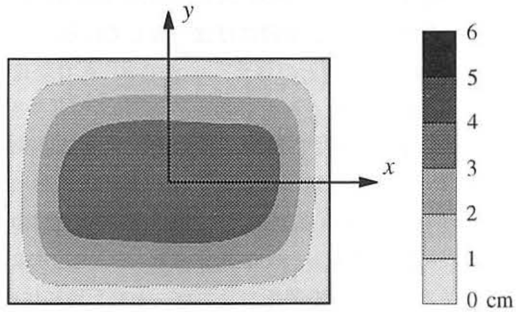
(*a*) $\theta = 0°$ (w_c = 4.845 cm)



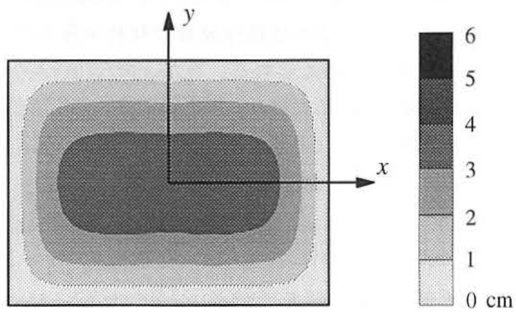
(*b*) $\theta = 22.5°$ (w_c = 5.024 cm)



(*c*) $\theta = 45°$ (w_c = 4.838 cm)



(*d*) $\theta = 67.5°$ (w_c = 3.948 cm)



(*e*) $\theta = 90°$ (w_c = 3.615 cm)

図9．矩形膜のたわみ特性(p = 0.05 kgf/cm^2)

3・3 矩形膜の応力分布

図10に$p = 0.05$ kgf/cm^{2}のときの$\theta = 0°$の矩形膜における合力T_xとT_yの分布を示す。ここで、(5)式の変位関数のうち、変位の対称性を考慮して、面内変位については各4項、たわみについては16項を用いて応力分布を求めた。x方向合力T_xは膜中央部の左端から右端にわたって大きく、特に、$x = \pm 46$ cmの端部、および膜中央部近くで最大となる。一方、y方向合力T_yはT_xに比べ小さい。なお、膜の4隅では、小さな領域ではあるが主応力が負となる領域を生じ、リンクリングを生じる可能性があるが、本計算ではリンクリングを考慮した解析を行っていない。

3・4 だ円膜の変形特性と応力分布

$a = 60$ cm，$b = 30$ cmのだ円膜について$\theta = 0°$，$45°$，$90°$のときの圧力p〜中央点たわみw_c曲線を図11に示す。(a)より、繊維配向角により変形特性が大きく変化することがわかる。また、(b)より内圧とたわみの関係は矩形膜と同様にほぼ$p \propto w^3$の関係があることがわかる。

圧力$p = 0.05$ kgf/cm^{2}を受ける$a = 60$ cm，$b = 30$ cmのだ円膜のたわみ等高線を図12に示す。たわみは矩形膜のときと同様に、$\theta = 90°$で中央部たわみが最小となり、$\theta = 0°$で最大となる。一方、矩形膜のときと異なり、だ円膜では主軸が$\theta = 45°$に傾いたときでも、たわみはx, y軸に関してほぼ対称となる。

図13に$p = 0.05$ kgf/cm^2, $\theta = 0°$のときのだ円膜における合力T_xとT_yの分布を示す。(a)より、x方向合力T_xは左右端にわたる膜中央部で最大となる。一方、y方向合T_yはT_xと比べて小さい。また、矩形膜と異なり、リンクリングを生じる可能性のある領域は現れないことがわかる。

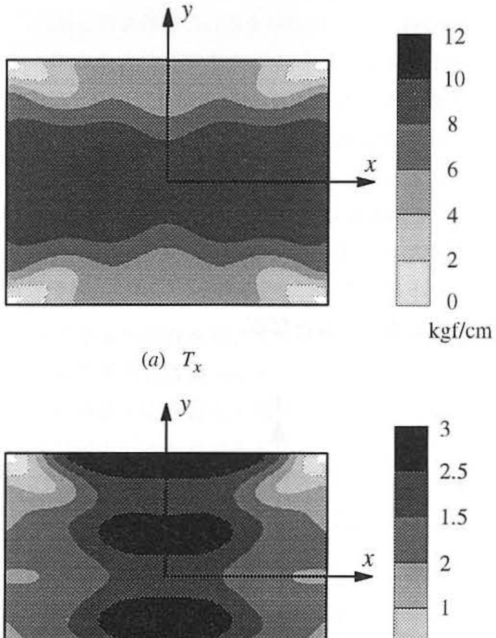


図10．矩形膜の応力分布
($a = 46$cm, $b = 35$cm, $\theta = 0°$, $p = 0.05$ kgf/cm^2)

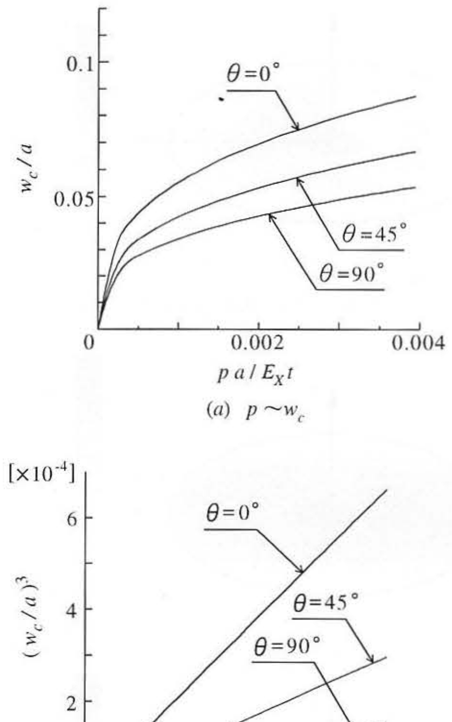
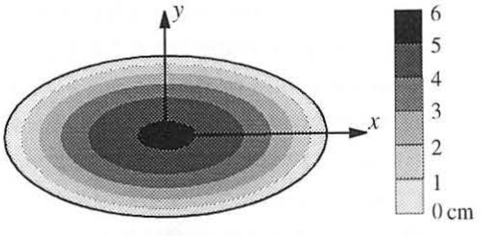
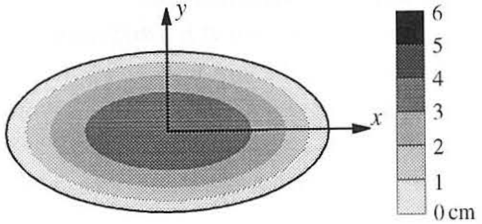


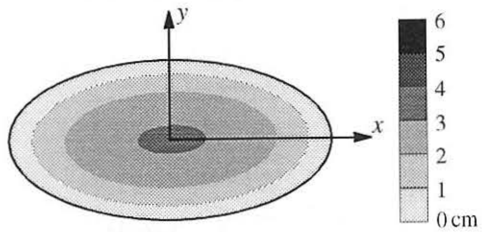
図11．だ円膜における内圧pと中央点たわみw_cの関係
($a = 60$ cm，$b = 30$ cm)



(*a*)　$\theta = 0^\circ$　($w_C = 5.166$ cm)

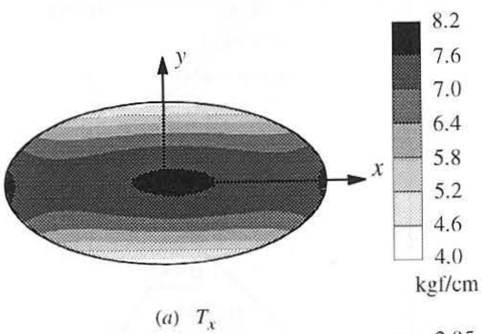


(*b*)　$\theta = 45^\circ$　($w_C = 3.922$ cm)

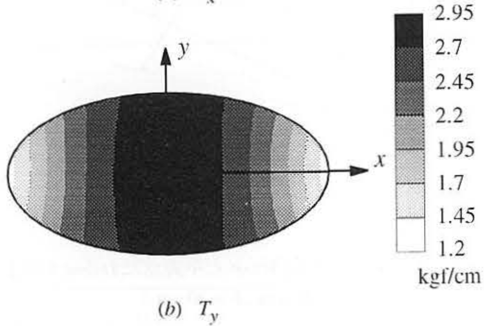


(*c*)　$\theta = 90^\circ$　($w_C = 3.099$ cm)

図12．だ円膜のたわみ特性($p = 0.05$ kgf/cm^2)



(*a*)　T_x



(*b*)　T_y

図13．応力分布($p = 0.05$ kgf/cm^2)

4．変位制約のあるときの矩形膜の変形特性と応力分布

本計算法では、最適化手法に基づいて、ポテンシャルエネルギを最小とする変形解析を行っており、変位制約のある場合への拡張も容易となる。そこで、$\theta = 0^\circ$の矩形膜($a = 46$ cm, $b = 35$ cm)について中央部たわみ$w_c \leqq 2$ cmとする変位制約を付加した場合と、図14に示すように中央点w_cおよび$w_a(-a/2, b/2)$、$w_b(-a/2, -b/2)$、$w_d(a/2, b/2)$、$w_e(a/2, -b/2)$の5点をそれぞれ、$w_a = w_b = w_d = w_e \leqq 1.8$ cm，$w_c \leqq 2$ cm とする変位制約を付加した場合の変形特性および応力分布を解析する。このとき、最小化問題は次式のように定式化できる。

［目的関数］　ポテンシャルエネルギ最小

［制約条件］　$w_c \leqq 2$ cm　（1点を拘束）

$w_a = w_b = w_d = w_e \leqq 1.8$ cm，$w_c \leqq 2$ cm　（5点を拘束）

［設計変数］　U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}

［最小化手法］　二次拡張内点ＳＵＭＴ法＋ＢＦＧＳ法

変位関数は対称性を考慮して、面内変位については各16項、たわみについては25項を用いた解析を行った。

図15に中央点たわみの変位を拘束したときのたわみ等高線を示す。また、図16にx方向合力T_xの分布を示す。T_xは膜中央部では2.5 kgf/cm程度であるが、黒塗り部で最大の値となる。

$\theta = 0^\circ$の矩形膜について、膜上の5点の変位を拘束したときのたわみ等高線を図17に示す。また、図18に合力T_xの分布を示すが、1点拘束のと同様に、膜中央から少し離れた点で最大となる。

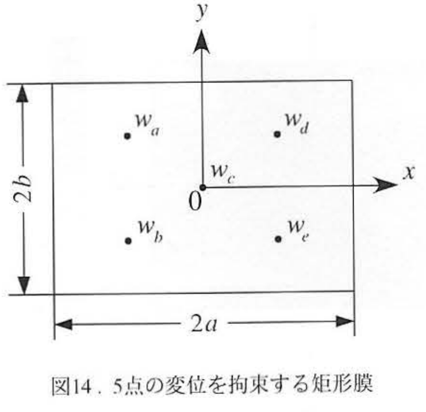


図14．5点の変位を拘束する矩形膜

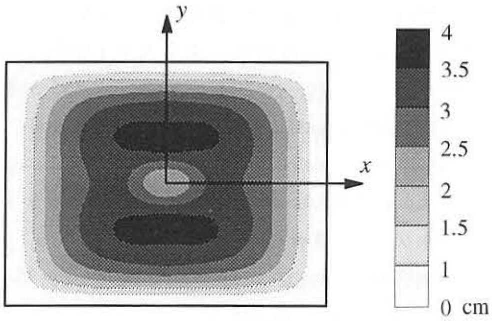


図15. 中央点たわみを拘束したときの
矩形膜のたわみ特性
($p = 0.05$ kgf/cm^2, $\theta = 0^\circ$)

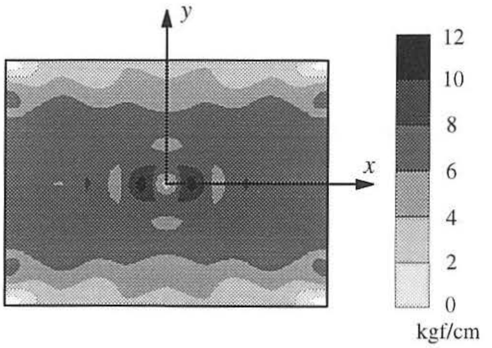


図16. 矩形膜の合力分布 T_x
($p = 0.05$ kgf/cm^2, $\theta = 0^\circ$)

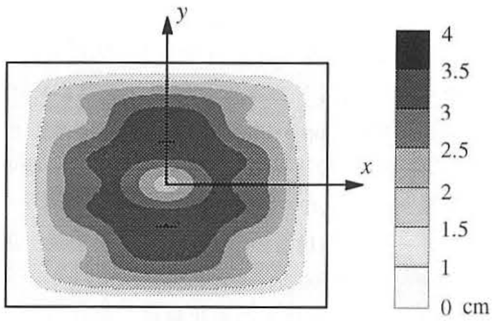


図17. 5点の変位を拘束したときの
矩形膜のたわみ特性
($p = 0.05$ kgf/cm^2, $\theta = 0^\circ$)

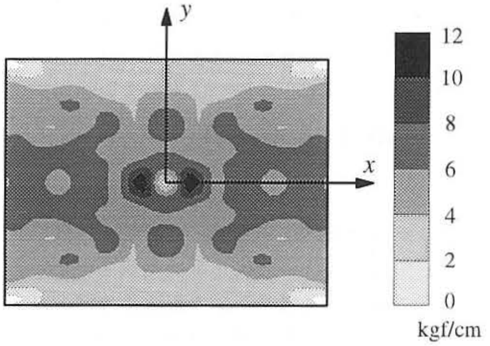


図18. 矩形膜の合力分布 T_x
($p = 0.05$ kgf/cm^2, $\theta = 0^\circ$)

5.むすび

本研究では、矩形膜、だ円膜について、ポテンシャルエネルギ最小原理を用いて非線形変形特性解析を行い、実験結果と比較検討するとともに、織布の主軸方向と変形特性・応力分布の関係を調べた。得られた主な知見は以下のとおりである。

(1) (1)~(3)式の定式化に基づくポテンシャルエネルギ最小原理により、複合材織布膜の非線形変形特性が解析でき、実験結果ともほぼ妥当な一致が得られた。

(2) 圧力～たわみ曲線の計算結果は矩形膜、だ円膜ともにほぼ$p \propto w_c^3$の関係となる。

(3) 矩形膜において弾性主軸に傾きが生ずるとたわみ等高線も傾く。また、合力T_xは$y = 0$周辺で応力の大きい領域が広がる。

(4) だ円膜では、弾性主軸の傾きによらずたわみ等高線形状は膜形状とほぼ同様のだ円となる。

(5) 変位制約のある場合について、同様の変形解析を行い、変位を拘束することによるたわみ等高線、合力分布への影響を検討した。

なお、本研究では、織布複合材膜の材料非線形性、リンクリングを考慮していないが、これらを考慮した解析については今後検討したい。また、このような変形特性・応力分布解析に基づいて、膜材の異方性を利用した軽量化が可能と考えられ、数理計画法による構造および材料の最適設計[7)]も今後の課題としたい。

謝辞

本研究は、平成6年度能村膜構造技術振興財団の研究助成（研究代表者：福永久雄）を受けて実施された成果であり、ここに能村膜構造技術振興財団に深く感謝の意を表します。

参　考　文　献

1) 渡部博司，坪内信朗：「エアードームにおける複合材料の適用」日本複合材料学会誌，Vol.14, No.1，1988，pp.8-14.

2) 石井一夫：「膜構造用膜材料概説」膜構造研究論文集'92，No.6，1992，pp.91-119.

3) 石井一夫：「膜構造の応力・変形解析概説」膜構造研究論文集'90，No.4，1990，pp.69-105.

4) 石井一夫：「膜構造の形状解析（形状決定の問題）概説」膜構造研究論文集'89，No.3，1989，pp.83-107.

5) 越智信夫，植村益次：「直交異方性矩形平面膜の面圧によるたわみ特性」東京大学宇宙航空研究所報告，Vol.10, No.3(A)，1974，pp.355-368.

6) G.N.Vanderplaats，H.Sugimoto：" A General Purpose Optimization Program for Engineering Design. " Computers Structures, Vol.24，1986, pp.13-21.

7) 福永久雄：「複合材構造の最適設計(Ⅰ)-(Ⅲ)」日本複合材料学会誌，Vol.16，1990，pp.75-82，pp.115-122，pp.256-265.

NONLINEAR DEFORMATION ANALYSIS OF FABRIC COMPOSITE MEMBRANES

Hisao FUKUNAGA*1

Hideki SEKINE*1

Naohito SAITOH*2

SYNOPSIS

The present paper analyzes the nonlinear deformation of fabric composite membranes under uniform internal pressure. A mathematical programming method is applied to obtain the relationship between internal pressure and membrane deformations by minimizing the potential energy. The nonlinear deformations and the corresponding stress distributions are obtained for a rectangular membrane and an elliptic membrane with various kinds of fiber orientation angles. The deformation characteristics are also analyzed for the membranes with deformation constraints by the mathematical programming method.

---

*1 Faculty of Engineering, Tohoku University.

*2 Graduate Student, Tohoku University.