

膜構造解析における材料非線形性の評価

日野 吉彦*1

石井 一夫*2

梗 概

一般に膜構造の応力変形解析は、実用的な妥当性と解析の困難さから、材料線形・形態非線形の立場で解析されることが多い。しかし実際の膜材料は、材料非線形性が強く、これを考慮しなければ、解析上、大きな誤差を生じる可能性がある。したがって、より実際に近い膜応力変形解析を行うためには材料非線形性と形態非線形性の2つを考慮する必要がある。本研究では、形態非線形性を前提として、あらかじめ数種の材料定数を設定し、それを解析時の発生応力によって取り替えることにより、材料非線形性を再現する試みを行う。このとき2軸応力の評価方法が問題となるが、これに関して、塑性体の降伏条件における“相当応力”の概念を取り入れた新しい膜面応力の評価方法を提案し、その妥当性を検討するとともに、これを用いた場合の問題点、留意点を示す。

1. はじめに

膜材料の力学的性質は、織布構造による幾何学的性質、コーティング材の材料特性、および糸そのものの性質が複雑に組み合わさったものと考えられる。この性質によって、図1-1に示されるように膜材料の引張試験による応力-ひずみ曲線(以下S-S曲線)は、直線

とはならず材料非線形性が強い。また、縦糸、横糸の応力比によっても、その性格は大きく変わる。

このことより、弾性体理論に基づいて解析を行う場合、1種類の材料定数によって膜材料の複雑な力学的特性を表すことは非常に困難であり、実験値のS-S曲線に近い曲線を得るためには、数種類の材料定数が必要であると考えられる。

本研究では、膜材料A種について、実験値のS-S曲線をn段階の割線で近似する多段線形近似方式²⁾の考えをベースに数種の材料定数を求め、これを応力変形解析時に発生応力によって取り替えることにより材料非線形性を考慮した解析を行う。ここで、まず材料定数の設定段階において留意すべき点を挙げる。

・解析上、膜材料は異方性の弾性体と仮定するため、縦糸・横糸方向の引張剛性と縦糸・横糸方向のポアソン比との間には常に“相反の定理”が成り立たねばならない。

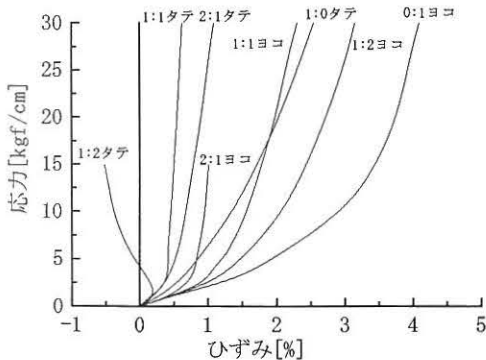


図1-1 引張試験による応力-ひずみ曲線
(膜材料A種)

*1 横浜国立大学 大学院

*2 横浜国立大学工学部建設学科教授 工博

・材料定数の試算方法として、最小二乗法や最良近似法などを用いる方法があるが、それぞれの利点や欠点を明確にする必要がある。

・実験値のS-S曲線を多段線形近似する場合、線形近似を行う区間幅や応力比(1:1), (1:2), (2:1)などの異応力比間で、その区間をどのように対応させるのかについて検討を行わねばならない。

・数種類の材料定数を設定する場合、その材料定数を用いる応力レベルが2軸応力場であるがゆえに、適正な応力の評価法が必要である。

これらの点に留意し、できる限り実験値のS-S曲線に近い近似曲線が得られるよう材料定数を決定する。そして、その材料定数を用いて材料非線形性を考慮した解析を行い、それが適正なものであるかを検証しつつ、より実際に近い膜応力変形解析を行うことが、本研究の目的である。

2. 材料定数決定のための計算手法

膜材料を線形の異方性弾性体と仮定すると、解析上次の材料定数が必要となる。

縦糸方向引張剛性	Et_1
横糸方向引張剛性	Et_2
縦糸方向に対するポアソン比	ν_1
横糸方向に対するポアソン比	ν_2
面内剪断剛性	Gt

引張剛性とは、引張ヤング率に膜厚を乗じたもので、同様に面内剪断剛性とは剪断弾性率に膜厚を乗じたものである。また、ここでいう縦糸方向に対するポアソン比とは、縦糸方向に引張ったとき、横糸方向は縮む、そのときの縦糸方向のひずみ ϵ_1 と横糸方向ひずみ ϵ_2 との比を示し、次のように表す。

$$\nu_1 = \frac{-\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2-1)$$

同様に横糸方向に対するポアソン比は、

$$\nu_2 = \frac{-\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2-2)$$

と表す。なお弾性体仮定であるため、引張剛性とポア

ソン比の間には、次の相反の定理が成り立たなければならない。

$$\frac{Et_1}{Et_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \quad (2-3)$$

相反の定理とは、弾性体に2種の力がはたらくとき、その2種の力によってなされた全仕事は力の加え方の順序に関係しないという定理で、膜材料を縦糸方向に引張り、その後、横糸方向に引張った時の全仕事と、最初、横糸方向に引張り、その後、縦糸方向に引張った時の全仕事とは等しいというものであり、これより導かれる関係が式(2-3)である。

2-1 最小二乗法

最小二乗法とは、一般に連続関数 $f(x)$ の近似式を $y(x)$ とすると、考える区間 $[a, b]$ においてその誤差の二乗和を最小にするような近似方法で、次のように記述される。

$$\int_a^b \{f(x) - y(x)\}^2 dx \rightarrow \min \quad (2-4)$$

これを膜材の材料定数決定問題に適用した例として文献(1)があるが、ここでは、ひずみを最小化する場合について示す。

縦糸、横糸方向の応力を T_1, T_2 ひずみを ϵ_1, ϵ_2 とし、応力とひずみの関係を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= E_{11} \cdot T_1 + E_{12} \cdot T_2 \\ \epsilon_2 &= E_{21} \cdot T_1 + E_{22} \cdot T_2 \end{aligned} \quad (2-5)$$

ただし

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{Et_1} & E_{22} &= \frac{1}{Et_2} \\ E_{12} &= E_{21} = -\frac{\nu_2}{Et_2} = -\frac{\nu_1}{Et_1} \end{aligned}$$

ここで、二軸引張試験によって得られた応力比(1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1)のS-S曲線を縦糸方向、横糸方向の各々について線形化し、それによって得られたひずみと式(2-5)によって与えられるひずみを比較し、その差の二乗和をとると

$$S = \sum \left\{ (E_{11} \cdot T_{1i} + E_{12} \cdot T_{2i} - \epsilon_{1i})^2 + (E_{12} \cdot T_{1i} + E_{22} \cdot T_{2i} - \epsilon_{2i})^2 \right\} \quad (2-6)$$

となる。ここで最小二乗法を適用して

$$\frac{\partial S}{\partial E_{11}} = \frac{\partial S}{\partial E_{22}} = \frac{\partial S}{\partial E_{12}} = 0 \quad (2-7)$$

これを解いて未知数 E_{11}, E_{22}, E_{12} を求める。これより、 $E_{t1}, E_{t2}, \nu_1, \nu_2$ が求まる。

2-2 最良近似法

最良近似法とは、一般に連続関数 $f(x)$ の近似式を $y(x)$ とするとき、考える区間 $[a, b]$ においてその誤差の絶対値の最大値を最小にするような近似方法で、次のように記述される。

$$\text{Max}_{a \leq x \leq b} |f(x) - y(x)| \rightarrow \min \quad (2-8)$$

最小二乗法では、実験によって求められるひずみと式(2-5)によって求められる理論上のひずみとの誤差の二乗和を最小化している。しかし、図2-1に示すように応力比によって、この誤差のばらつきが大きい場合、すなわち、ある応力比に対して特に誤差が大きくなるような場合、得られた材料定数は信頼性に欠ける。そこで、すべての応力比に対して誤差のばらつきが最小となるように材料定数を決定する方法（最良近似法）が考えられる。

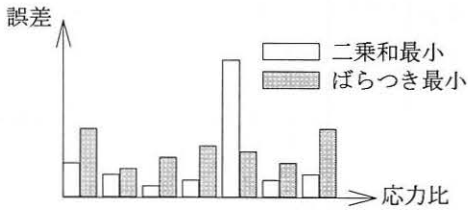


図2-1 誤差とばらつき

いま、ある応力比について、縦糸方向、横糸方向の実験値のひずみに対する理論値の誤差は、式(2-5)より次のように表される。

$$\begin{aligned} d_1 &= E_{11} \cdot T_1 + E_{12} \cdot T_2 - \varepsilon_1 \\ d_2 &= E_{21} \cdot T_1 + E_{22} \cdot T_2 - \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2-9)$$

これをすべての実験値の応力比に対してあてはめ、最良近似法を用いると

$$\text{Max}\{|d_{1i}|, |d_{2i}|\} \rightarrow \min \quad (2-10)$$

として直接探索法により未知数 E_{11}, E_{22}, E_{12} を求める。これより、 $E_{t1}, E_{t2}, \nu_1, \nu_2$ が求まる。

最小二乗法、最良近似法のどちらがよいかはいえないが、出てくる誤差の大きさとそのばらつき、また材料定数の使用方法によって使い方を判断する必要があるだろう。

3. 材料定数決定問題に関するこれまでの研究

膜材の二軸引張試験によって得られたS-S曲線より材料定数を求め、これを膜応力変形解析に適用する方法は、文献(1)による単純線形近似方式、文献(2)による多段線形近似方式などがある。

単純線形近似方式にしたがって、応力比(1:1)、(1:2)、(2:1)のS-S曲線より材料定数を求めるとすれば、図3-1に示されるように、まずそれぞれの応力比のS-S曲線を縦糸方向、横糸方向について適当に線形近似しなければならない。ただし、このとき縦糸方向応力 T_1 と横糸方向応力 T_2 はそのときの応力比関係を満たすものでなければならない。このようにして得られた応力-ひずみ関係に前章で述べた最小二乗法を適用して材料定数を求めることができる。しかし、ここで求めた材料定数は近似的に求められたものであるため、逆にこれを用いて得られる応力-ひずみ関係は、図3-2に示すようにもとの線形近似線には重ならず、少なからぬ誤差を生じてしまう。また、もともと非線形性の強いものを線形近似するところにも無理が感じられる。これを改善する方法として多段線形近似方式がある。

多段線形近似方式は、図3-3に示すように、 n 本の割線によってS-S曲線をより近い形で近似し、各応力比の m ($m \leq n$) 段目の割線より得られる応力-ひずみ関係に最小二乗法を適用することによって n 種類の材料定数を求め、これを膜応力変形解析に適用する方法である。

例えば先の例と同様に、応力比(1:1)、(1:2)、(2:1)のS-S曲線を3段階の割線で近似し、これに最小二乗法を適用して材料定数を求めると表3-2のようになる。また得られた材料定数によって応力-ひずみ関係を求めてみると図3-4のようになる。なお線形化の区間は文献(2)にしたがい基準応力（最終段の割線の終点の縦糸、横糸方向応力のどちらか大きい方の値）を30kgf/cmとし、割線連続点の応力を順に1.5、3.5、8.0kgf/cmとした。

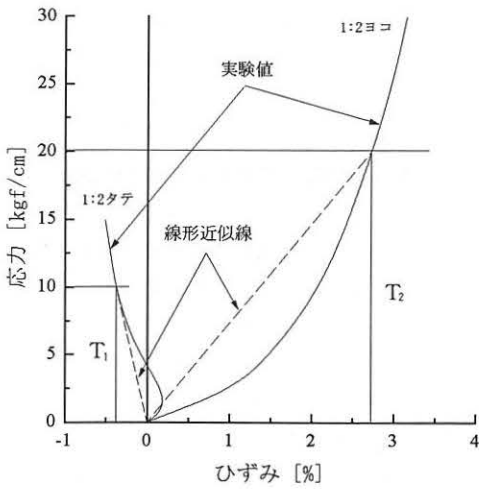


図3-1 直線によるS-S曲線の近似

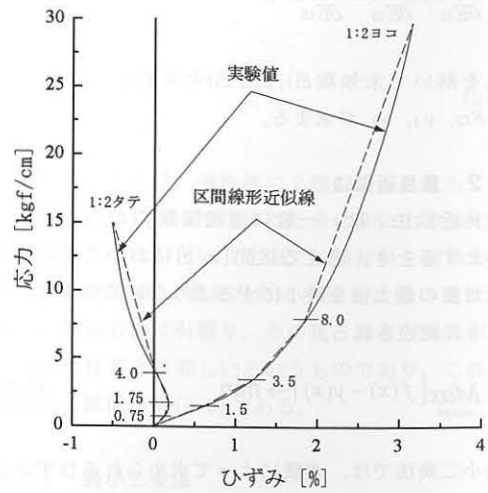


図3-3 割線によるS-S曲線の近似

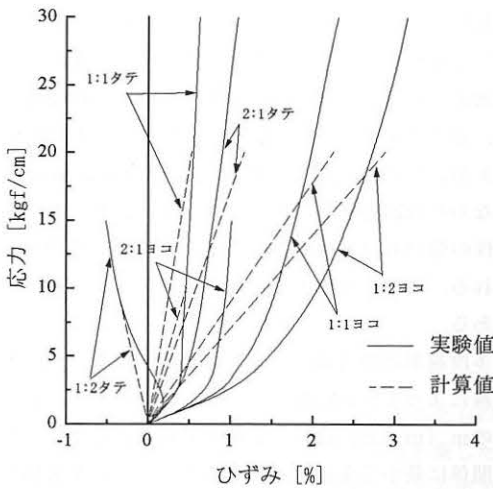


図3-2 単純線形近似による応力-ひずみ関係

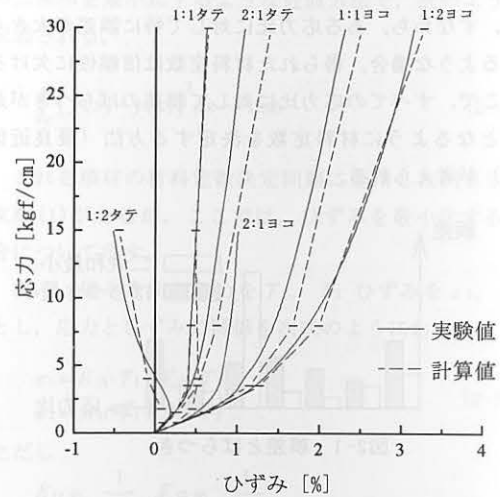


図3-4 多段線形近似による応力-ひずみ関係

表3-1 単純線形近似用材料定数 (膜材料A種)

線形化の範囲 (kgf/cm)	縦糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	横糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	縦糸方向 ポアソン 比	横糸方向 ポアソン 比
0.0~20.0	1112	567	0.71	0.36

本研究では、この多段線形近似における線形化の区間 (以下線形化区間) と基準応力とを更に検討することによって、もとのS-S曲線により近い近似曲線を追求することとする。

表3-2 多段線形近似用材料定数 (膜材料A種)

線形化の範囲 (kgf/cm)	縦糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	横糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	縦糸方向 ポアソン 比	横糸方向 ポアソン 比
0.0~1.5	483	227	0.18	0.08
1.5~3.5	605	272	0.56	0.25
3.5~8.0	1041	490	0.90	0.42
8.0~30.0	2007	1281	0.82	0.52

4. 線形化区間と基準応力

図4-1に示されるように、膜面の応力比が $m:n$ であるとき、縦糸方向応力を $T_1[m:n]$ 、横糸方向応力を $T_2[m:n]$ とし、その応力状態での膜の剛性を $\{E\}$ とすると、剛性 $\{E\}$ は図4-2に示されるS-S曲線の $T_1[m:n]$ 、 $T_2[m:n]$ における接線勾配として表される。ただし $\{E\}$ は、引張剛性 E_{t1} 、 E_{t2} ポアソン比 ν_1 、 ν_2 よりなり、相反の定理を満足するものとする。

これより、膜の剛性 $\{E\}$ を求めるためには、この接線勾配を求めなくてはならないが、実際は、図4-3に示すようにS-S曲線上の2点を結ぶ割線勾配を求めることとなる。いま仮に、この割線が多段線形近似における最終段であるとする、基準応力 T_s は T_{s1} と T_{s2} のうち大きい方となる。

これまで、この基準応力 T_s は膜面の応力比がどのように変わっても一定であるとしてきた。すなわちこれは、違った応力比の膜面が2種以上あるとき、そこにあらわれる剛性は、縦糸、横糸方向応力のうち大きい方の値が等しければ、すべて同じということである。しかし図4-4に示されるように一軸方向に 10kgf/cm の応力をかけた場合に膜面にあらわれる剛性 $\{E\}$ と、縦横の二軸方向に 10kgf/cm の応力をかけた場合に膜面にあらわれる剛性 $\{E\}$ 'は異なっていると考えた方が自然である。

したがって、本研究では膜面の剛性 $\{E\}$ は縦糸方向と横糸方向の二軸応力状態によって決定される、すなわち応力比によって基準応力が変化すると仮定し、応力比に対応した基準応力の算定方法を検討することとした。

いま図4-3における割線について応力とひずみの関係は図中 ΔT_1 、 ΔT_2 、 $\Delta \epsilon_1$ 、 $\Delta \epsilon_2$ ($\Delta T_1 : \Delta T_2 = m : n$) によって表されている。これに対応させるべき、もう1つの応力-ひずみ関係を $\Delta T_1'$ 、 $\Delta T_2'$ 、 $\Delta \epsilon_1'$ 、 $\Delta \epsilon_2'$ ($\Delta T_1' : \Delta T_2' = i : j$) とし、そのときの基準応力を T_s' で表すとすれば、従来は必ず $T_s = T_s'$ であった。しかし前述のような理由によって $T_s \neq T_s'$ と仮定するならば、線形化区間の決定に際して T_s' が T_s に対してどのような値をとるのが適当かを調べなければならない。(図4-5参照)

もし応力比が $m:n$ と $i:j$ の2種に限られるような場合は、図4-6のように一方の線形化区間に他応力比の適当に区切った線形化区間をすべて対応させ、それ

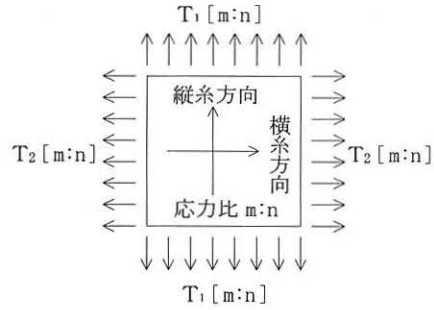


図4-1 膜面応力状態

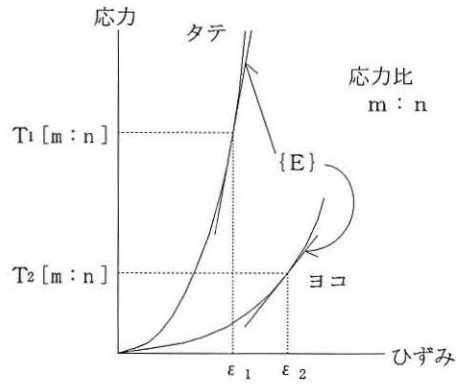


図4-2 S-S曲線と膜の接線剛性

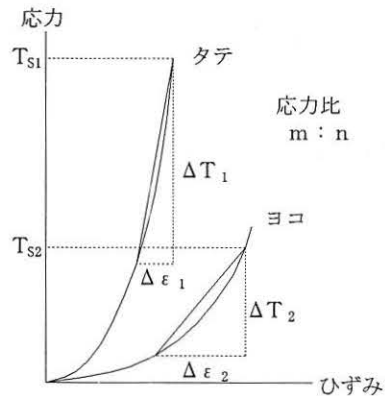


図4-3 線形化区間と割線近似

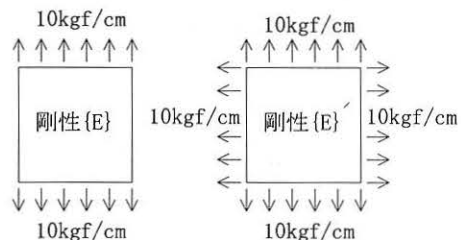


図4-4 応力状態と剛性

それに最小二乗法などを適用して最も誤差の小さくなる区間を選び出し、それより T_s と T_s' の関係を推測することは可能である。本研究においてもこの方法によって応力比 (1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1) の基準応力を推定したところ $T_{s(1:0)} : T_{s(0:1)} : T_{s(1:1)} : T_{s(1:2)} : T_{s(2:1)} = 20 : 15 : 8 : 11 : 16$ となった。しかし応力比はこれ以外にも無限に考えられ、この考えを膜応力変形解析に適用するためには応力比と基準応力に何らかの関係付けが必要である。

そこで、膜の剛性が縦糸方向と横糸方向の2軸応力状態によって決定されているという仮定より、2軸の応力が単軸で評価できればあらゆる応力比に対して容易に基準応力が決定できであろうと考え、金属の降伏条件などに用いられる相当応力の概念を導入して応力比と基準応力を関連付ける試みを行うこととした。

材料非線形問題における塑性体の降伏条件は、その材料によって Tresca の条件、Huber-von Mises の条件、Mohr-Coulomb の条件、Drucker-Prager の条件、R-Hill の条件などが有名である。この中でも直交異方性材料の降伏条件として用いられるのが R-Hill の2次形式の降伏条件であろう。これは、直交異方性材料が多軸応力場にあるとき、それらの多軸応力を相当応力 $\bar{\sigma}$ という単軸状態の応力に換算するためのものである。なお、平面応力場では次のように表される。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [(G+H)\sigma_x^2 + (F+H)\sigma_y^2 - 2H\alpha\sigma_x\sigma_y + 2N\tau_{xy}^2]} \quad (4-1)$$

F, G, H, N は材料によって決まる異方性パラメータであるから、仮に

$$F = 1 + \alpha_0, \quad G = \alpha_0(1 + \alpha_0) \\ H = -\alpha_0, \quad N = 0$$

とおくと式(4-1)は次のようになる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(1 + \alpha_0 + \alpha_0^2)} [\alpha_0^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\alpha_0 \sigma_x \sigma_y]}$$

さらに

$$\alpha = \sqrt{\frac{3\alpha_0^2}{2(1 + \alpha_0 + \alpha_0^2)}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{2(1 + \alpha_0 + \alpha_0^2)}}$$

とおくと

$$\bar{\sigma} = \alpha\sigma_x + \beta\sigma_y \quad (4-2)$$

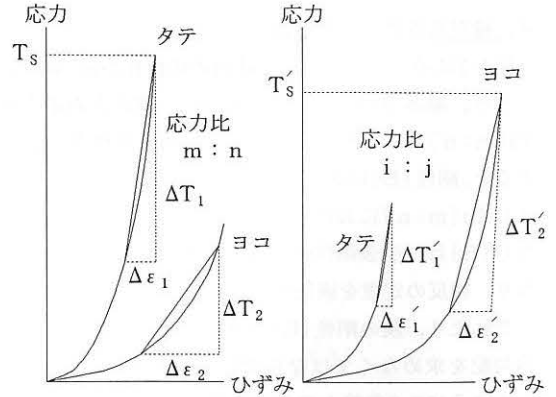


図4-5 2種応力比での応力-ひずみ関係

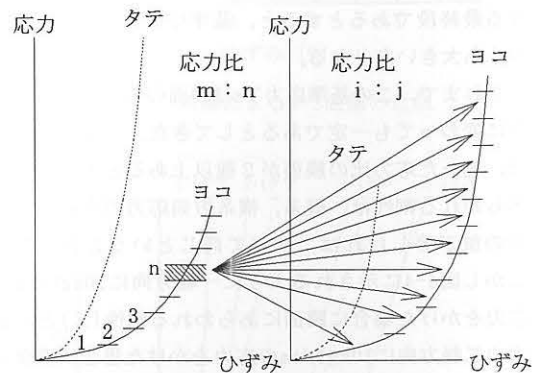


図4-6 線形区間の対応

これを膜材に適用すると、式(4-2)は係数 α , β によって縦糸方向応力、横糸方向応力のどちらかに重みをもたせ、その和で膜面の応力評価を行うということで、 α , β のどちらかを固定しても差し支えない。また、先の考察より応力比 (1:0), (0:1) の基準応力が明らかに $T_{s(1:0)} > T_{s(0:1)}$ であることより横糸方向応力に重みをつけて次のように書き直した。

$$\bar{T} = \alpha T_1 + T_2 \quad (4-3)$$

ただし T_1 : 縦糸方向応力

T_2 : 横糸方向応力

\bar{T} : 膜相当応力

α : 定数 ($0 \leq \alpha \leq 1$)

いま縦横の応力比が $m:n$ であれば多段線形近似における最終段の割線の終点は式(4-3)より次のように表される。

$$T_{s1} = \frac{m}{\alpha m + n} \cdot \bar{T} \quad (4-4)$$

$$T_{s2} = \frac{n}{\alpha m + n} \cdot \bar{T}$$

これはある応力比の基準応力を決定すれば式(4-3)によって膜相当応力 \bar{T} が決まり、その \bar{T} を用いてあらゆる応力比の基準応力が決定できるということであり、同様に割線の連続点も式(4-4)によって判断できる。

例えば応力比(1:0)の縦糸方向S-S曲線を10段階の等区間に多段線形近似する場合、 $T_s=30\text{kgf/cm}$ とするならば割線の連続点は順に3, 6, 9, 12, ..., 27, 30 kgf/cmとなる。これより他の応力比の対応応力を式(4-3), (4-4)を用いて求めることができる。本研究では応力比(1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1)のS-S曲線をこの方法によって線形化区間に分割するが(1:0), (0:1)の無張力方向については実験上極めて不安定であるためデータとして信用性に欠ける。したがって今回は対象外とした。

以上によって得られた線形化区間の各々に最小二乗法や最良近似法を適用して区間ごとに材料定数を求めれば、各応力比の応力-ひずみ関係を折れ線によって示すことができる。以下、この折れ線を線形近似曲線と呼ぶこととする。また、このようにして求めた線形近似曲線は α 値によって変化する。図4-7は α 値が変化することによってS-S曲線と線形近似曲線の基準応力における誤差がどのように変化するかを示したものである。図中の累積誤差とは応力比(1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1)の縦横方向の誤差を合計したものである。図4-7によれば $\alpha=0.6$ のとき最も誤差が小さくなっている。したがってこのときの各膜相当応力に対する材料定数とそれによる線形近似曲線を表4-1, 図4-8にそれぞれ示す。なお材料定数の試算には最小二乗法を用い、誤差の最小化はひずみに対して行った。

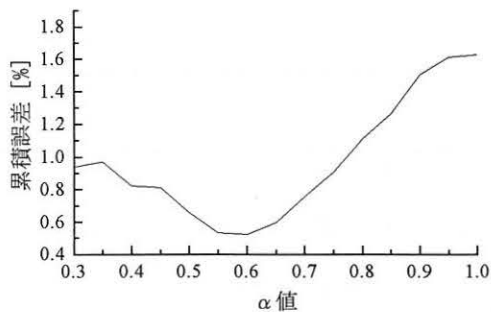
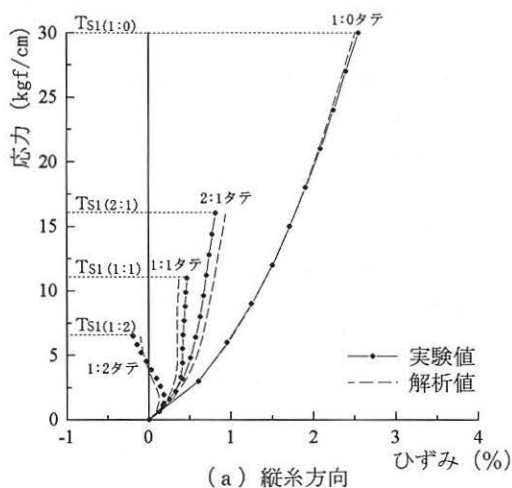


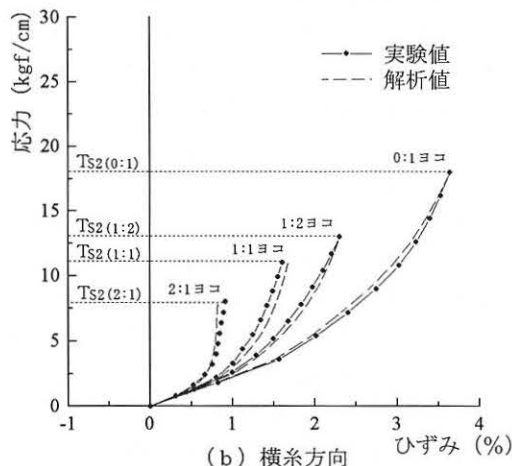
図4-7 α 値と累積誤差

表4-1 材料定数 (ひずみの最小二乗法による)

膜相当応力 \bar{T} $\alpha=0.6$ (kgf/cm)	縦糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	横糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	縦糸方向 ポアソン 比	横糸方向 ポアソン 比
0.0~1.8	506	223	0.17	0.08
1.8~3.6	807	258	0.31	0.10
3.6~5.4	1030	404	0.49	0.19
5.4~7.2	1217	486	0.83	0.33
7.2~9.0	1428	539	1.00	0.38
9.0~10.8	1565	645	1.00	0.41
10.8~12.6	1756	793	0.99	0.45
12.6~14.4	1968	968	0.91	0.45
14.4~16.2	2119	1137	0.83	0.45
16.2~18.0	2201	1300	0.77	0.46



(a) 縦糸方向



(b) 横糸方向

図4-8 線形化区間の対応および実験値のS-S曲線と線形近似曲線の比較

5. 材料定数の決定

以上のことより $\alpha=0.6$ として式(4-3)によって線形化区間を決定すれば、ほぼ実験値のS-S曲線に一致する線形近似曲線が得られることがわかった。なお、いくつの線形化区間に分割すれば適切かという問題があるが、これは、実験値のS-S曲線の傾向を失わない範囲であれば任意にとってよさそうである。ただ、表5-1に示されるように、あまりに細かく分割するのは、かえって実験値のS-S曲線と線形近似曲線との誤差を増すこととなる。また分割数を多くすると解析時に収束性が悪くなり、計算に時間がかかるというデメリットもある。

4章では応力レベルの対応を考える都合上、線形化区間を10区間と比較的多くとったが、ここでは、実験値のS-S曲線を最もよく近似し、かつ最小限に区間分割することを念頭におき、6区間に分割した。分割のしかたは、応力比(1:0)の縦糸方向S-S曲線に対する割線連続点の応力を、順に2, 6, 10, 20, 30kgf/cmと定め、式(4-3)によって膜相当応力を算定することにより、他応力比の線形化区間を決定した。応力比(1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1)の各線形化区間の応力 \bar{T} ひずみ関係を最小二乗法および最良近似法を適用して求めた材料定数を表5-2, 5-3に示す。なお(1:0), (0:1)の無張力方向については、4章に挙げた理由により対象外としている。また誤差の最小化はひずみに対して行っている。

最小二乗法及び最良近似法によって得られた材料定数Aと材料定数Bを用い、線形近似曲線を描くと、図5-1, 5-2のようになる。2つの結果に大きな差異はみられないが、表5-4に示されるように最良近似法を利用すれば、最大誤差をいくらか低減することのできることをわかる。しかし全体としての誤差が大きくなることは避けられない。これは、図5-2における(1:2)縦糸方向誤差が、図5-1のそれに比べてわずかに低減されているのに対し、図5-2の(1:1)縦糸方向誤差が、図5-1に比べて大きく増大していることから明らかである。

しかしながら全体的な傾向としては、最小二乗法、最良近似法とも実験値のS-S曲線によく近似されており、適正な線形化区間及び材料定数を設定することができたと思われる。今回は、最大誤差にほとんど差がないことから、誤差和の小さい材料定数Aを応力変形解析用材料定数として採用することとする。

表5-1 線形化区間数とひずみによる誤差

分割区間数	累積誤差(%)	分割区間数	累積誤差(%)
5	0.60	20	0.54
10	0.52	30	0.58
15	0.56		

累積誤差とは応力比(1:0), (0:1), (1:1), (1:2), (2:1)の縦横方向の基準応力における誤差(ただし(1:0)横糸方向, (0:1)縦糸方向は除く)を合計したものである。

表5-2 材料定数A (ひずみの最小二乗法による)

膜相当応力 \bar{T} $\alpha=0.6$ (kgf/cm)	縦糸方向	横糸方向	縦糸方向	横糸方向
	引張剛性 (kgf/cm)	引張剛性 (kgf/cm)	ポアソン 比	ポアソン 比
0.0~1.2	469	228	0.14	0.07
1.2~3.6	749	248	0.31	0.10
3.6~6.0	1048	424	0.59	0.24
6.0~12.0	1476	597	1.00	0.40
12.0~18.0	2063	1096	0.86	0.46
18.0~	3784	1845	0.78	0.38

表5-3 材料定数B (ひずみの最良近似法による)

膜相当応力 \bar{T} $\alpha=0.6$ (kgf/cm)	縦糸方向	横糸方向	縦糸方向	横糸方向
	引張剛性 (kgf/cm)	引張剛性 (kgf/cm)	ポアソン 比	ポアソン 比
0.0~1.2	474	234	0.16	0.08
1.2~3.6	727	245	0.24	0.08
3.6~6.0	1102	437	0.54	0.22
6.0~12.0	1538	597	1.00	0.39
12.0~18.0	2252	1105	1.00	0.49
18.0~	4559	2002	0.93	0.41

表5-4 ひずみによる誤差の比較

	誤差最大となる 応力比	最大誤差(%)	誤差和(%)
最小二乗法	1:2縦糸方向	0.2655	0.8490
最良近似法	1:1縦糸方向	0.2417	0.9967

誤差和とは各応力比の最大応力におけるS-S曲線と線形近似曲線の誤差の合計である。

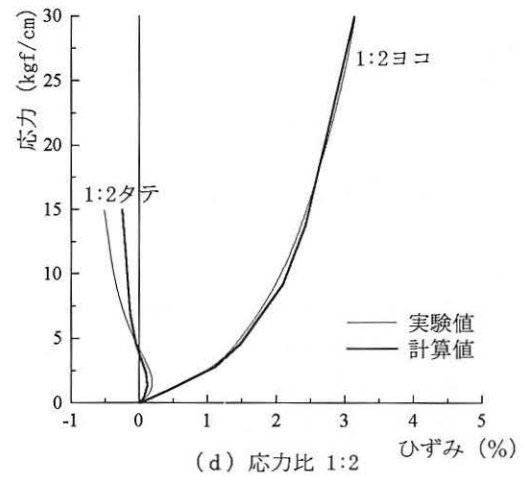
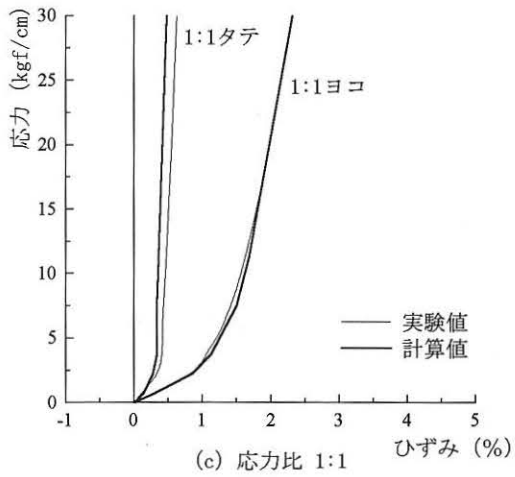
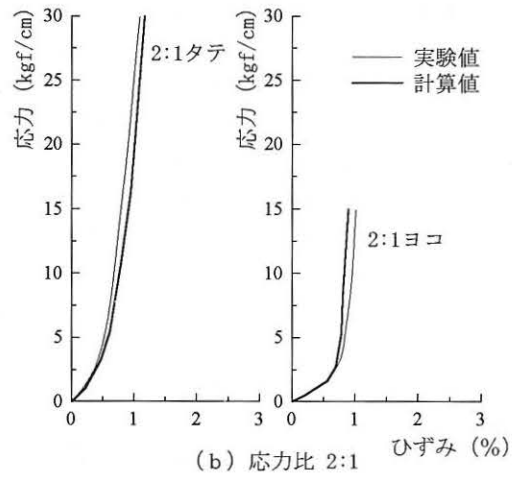
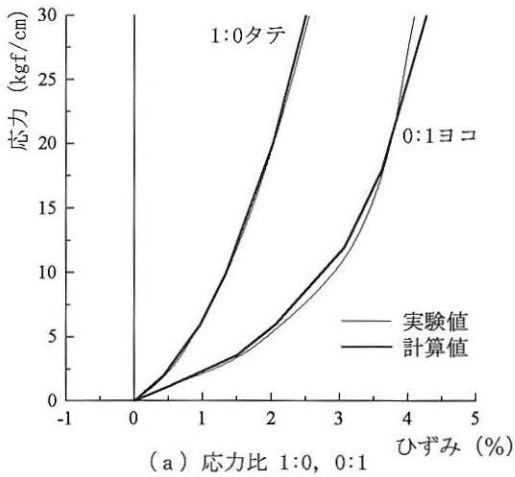


図5-1 材料定数Aによる線形近似曲線と実験値のS-S曲線との比較

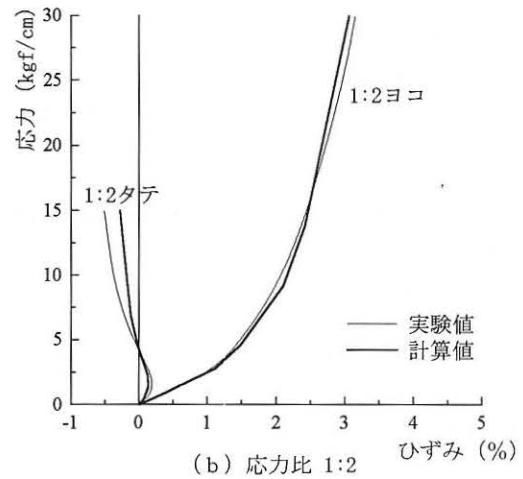
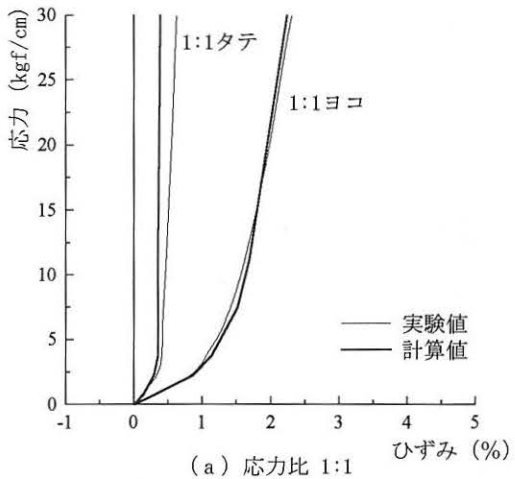


図5-2 材料定数Bによる線形近似曲線と実験値のS-S曲線との比較

6. 有限要素法による材料非線形解析

膜構造の解析は、材料による非線形性と、形態による非線形性を考慮して行わなければならない。しかし、一般には、実用的な妥当性と、解析の困難さから、材料線形・形態非線形として解析されることが多い。

しかし、膜材料の種類によっては、材料非線形性が強く、S-S曲線を直線で近似すると、実際とは全く違った挙動をしめすことも考えられる。この場合、より実際に近い解析を行うためには、材料非線形性を考慮した解析が不可欠である。

本研究では、4章で求めた材料定数を用いて、材料非線形・形態非線形の立場で、正確に応力変形解析を行うこととする。以下にその解析理論を示す。

6-1 解析理論

構造全体の系について、内および外力の釣合い条件式は、次のように記述される。

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_S [B]^T \{n\} ds - \{R\} \quad (6-1)$$

$\{\delta\}$: 変位

$\{\psi\}$: 外部および内部一般化力の総和

$\{n\}$: 到達したひずみレベルに対応して得られる応力膜張力 n_x, n_y, n_{xy} よりなる。

$\{R\}$: 外荷重ベクトル

式(6-1)は、一要素について、膜張力 n_x, n_y, n_{xy} をその要素の各節点での節点力に変換する式であり、これを各要素について計算することにより、全体剛性マトリックスをつくる。非線形性を考慮すると、 $\{n\}$ 、 $[B]$ は、 δ の関数である。これによって得られた多元多次連立方程式を節点に作用する荷重 $\{R\}$ と加合せ、 $\{\psi\}$ を0となるように解く。

$[B]$ は、要素の節点変位と、要素内のひずみとの関係を示すマトリックスであり、ひずみの定義より次のように示される。

$$d\{\varepsilon\} = [B]d\{\delta\} \quad (6-2)$$

また、ひずみが十分小さい場合は、一般的な弾性関係として

$$\{n\} = [D]\{\varepsilon\} + \{n_0\} \quad (6-3)$$

が成り立つものとする。 $[D]$ は弾性定数からなるマトリックスであり、 $\{n_0\}$ は初期張力である。ここで材料非線形性を考慮すると $[D]$ は

$$[D] = [D(\{n\})] \quad (6-4)$$

という増分形の弾性マトリックスの形で表される。

式(6-1)を解くには、反復計算法によらなければならない。計算法として、ニュートン・ラフソン法を用いるならば、 $d\{\delta\}$ と $d\{\psi\}$ の関係が必要となる。そこで、式(6-1)の変分をとり

$$d\{\psi\} = \int_S d[B]\{n\} ds + \int_S [B]^T d\{n\} ds \quad (6-5)$$

が得られる。また式(6-2)、(6-3)より

$$d\{n\} = [D]d\{\varepsilon\} = [D][B]d\{\delta\} \quad (6-6)$$

となる。ここで、変位 $\{\delta\}$ が大きい場合、ひずみが変位に対して非線形関係で結ばれ、 $[B]$ は $\{\delta\}$ の関数となるから $[B]$ を線形部と非線形部にわけ、次のように表す。

$$[B] = [B_0] + [B_L(\{\delta\})] \quad (6-7)$$

これと式(6-5)より

$$d\{\psi\} = \int_S d[B_L]^T \{n\} ds + [K_E]d\{\delta\} \quad (6-8)$$

が得られる。ただし $[K_E]$ は弾性剛性マトリックスであり、式(6-9)において

$$[K_E] = \int_S [B]^T [D][B] ds + \int_S d[B_L]^T \{n\} ds = [K_G]d\{\delta\} \quad (6-9)$$

ここで $[K_G]$ は応力レベルに依存する幾何剛性マトリックスである。したがって式(6-8)、(6-9)より

$$d\{\psi\} = ([K_E] + [K_G])d\{\delta\} \quad (6-10)$$

が得られる。このように各々の荷重増分に対して非線形解を求めることとなる。

本研究では、 $[D]$ を未知数として全体剛性マトリックスに組み込んでいるわけではなく、荷重増分段階で、膜相当応力 \bar{T} を判定基準として $\{n\}$ がある一定値を超えるごとに $[D]$ を変化させ、その都度釣合式を解くことによって材料非線形性を再現している。したがって全荷重に対する変位は、各荷重増分に対する累積変位として求められる。

この方法は、材料非線形性を簡単にプログラムに組み込める反面、荷重増分を大きくとると、累積変位に大きなずれを生じる可能性がある。したがって、ずれを小さくするためには荷重増分を十分小さくする必要があるのである。これは、言い換えれば、ある構造物に対してかかる応力が高ければ高いほど荷重増分回数を増やさねばならず、計算時間上非常に問題となるところである。

これに対する対処法として、ある応力以上は、材料線形とみなし、荷重増分を行わないなどが考えられるが、精度を良くしようとするれば、非線形性の大きい応力範囲(0~10kgf/cm)では、線形化区間幅を考慮して荷重増分を0.4kgf/cm程度にする必要がある。

6-2 材料線形解析と材料非線形解析

5章で求めた材料定数Aを用い、6-1の理論によって材料非線形解析を行う。解析モデルは、図6-1に示す一辺100cmの正方形モデルを使用し、荷重増分は0.4kgf/cmとする。これによって応力比(1:0)、(0:1)、(1:1)、(1:2)、(2:1)の二軸引張試験のシミュレーションを行い、実験値との比較、および同モデルを用いての材料線形解析との比較を行う。なお、材料線形解析に用いた材料定数は、表6-1のとおりである。

図6-2に示されるように、材料定数Aを用いて材料非線形解析を行えば、ほぼ実験値のS-S曲線に一致する結果が得られることがわかった。

表6-1の線形解析用材料定数は、応力0~30kgf/cmまでの区間(応力比(1:2)、(2:1)の弱軸は0~15kgf/cm)を線形化し、各応力比間に最小二乗法を適用して求めたものである。この材料定数は線形化の範囲をどこまでとるかによって値が変化し、それによって解析の結果も変わってくる。すなわち、ある特定の応力に対して実験値にほぼ一致するひずみを得ることができるが、しかし、どのように線形化しても単純線形近似では、すべての応力比、すべての応力レベルに

あった材料定数を設定することは困難であり、これを使って解析を行うと、かなりの誤差を生じるであろうことは、図6-2からも容易に予想がつく。

材料定数の設定方法は、本研究に示した以外にも考えられるであろうが、これらの結果から式(4-3)はA種膜材料の材料定数を決定する上で、非常に有効なものであるといえよう。

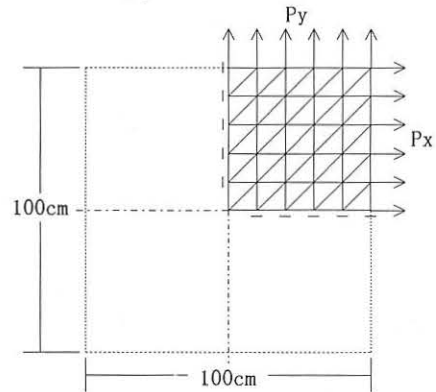
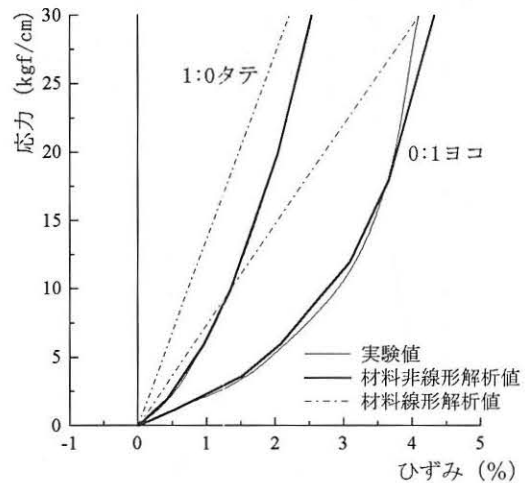


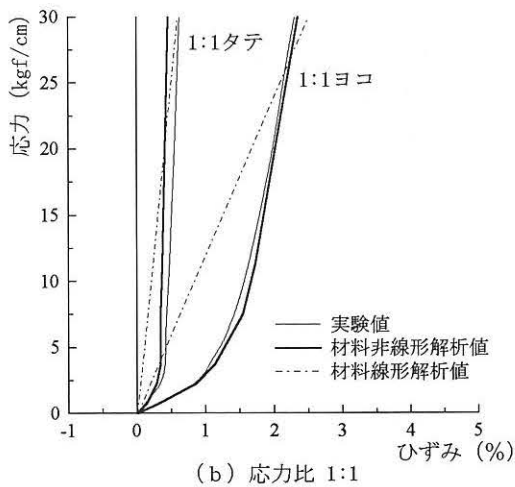
図6-1 2軸引張試験シミュレーションモデル

表6-1 線形解析用材料定数

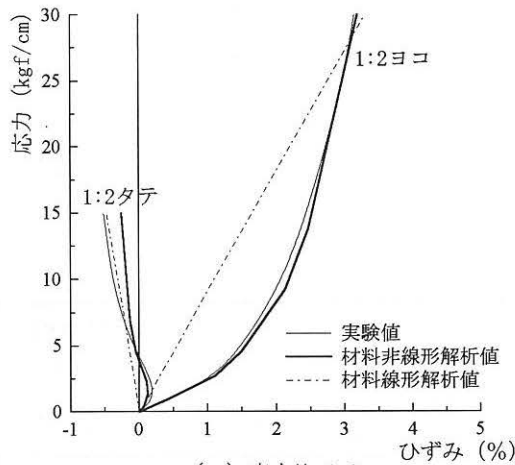
縦糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	横糸方向 引張剛性 (kgf/cm)	縦糸方向 ポアソン 比	横糸方向 ポアソン 比	剪断剛性 (kgf/m)
1383	744	0.70	0.38	5000



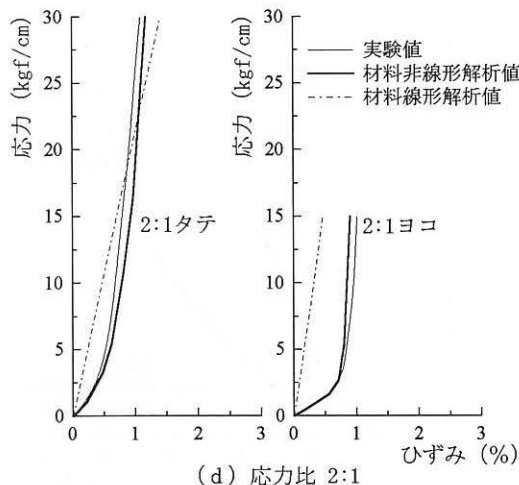
(a) 応力比 1:0, 0:1



(b) 応力比 1:1



(c) 応力比 1:2



(d) 応力比 2:1

図6-2 材料試験によるS-S曲線と材料非線形解析および材料線形解析によるS-S曲線の比較

6-3 剪断力に対する考察

フレーム法によって得られた荷重-変位曲線(図6-3参照)を区間線形化する。面内剪断剛性は、引張剛性・ポアソン比の場合とは異なり、1つの線形化区間に対して1つが定まる。したがって、もとの傾向を失わなければ、区間幅は任意にとることが出来る。今回は、その傾向から3区間に分割した。

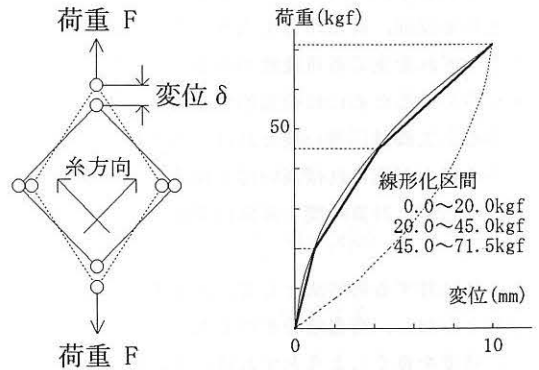


図6-3 荷重-変位曲線

区間内での各々の面内剪断剛性は、文献(9),(10)にしたがい次式より表6-2のように求めた。

$$Gt = \frac{N_{xy}}{\gamma} = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot L \cdot \gamma}$$

$$\gamma = 2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{L^2 - (\delta + L/\sqrt{2})^2}}{\delta + L/\sqrt{2}} \right\}$$

Gt : 面内剪断剛性

N_{xy} : 剪断応力

γ : 剪断変形角

δ : 変位

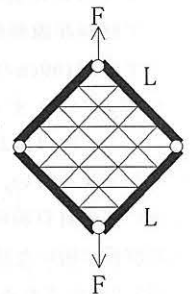


図6-4 剪断試験

シミュレーション
モデル

表6-2 材料定数C

荷重 F (kgf)	剪断応力 (kgf/m)	面内剪断剛性 (kgf/m)
0.0~20.0	88.39	8693.95
20.0~45.0	110.49	3187.75
45.0~71.5	117.11	2611.19

ただし $L=16\text{cm}$ のとき

これより、材料定数Cを用いて、剪断力に対する材料非線形解析を行う。解析は図6-4に示すモデルを用い、解析法は6-1に従い、荷重増分段階における発生剪断応力によって面内剪断剛性を取り替えることとした。

解析結果を図6-5に示す。剪断力についても、ほぼ実験値に一致する値が得られることがわかる。

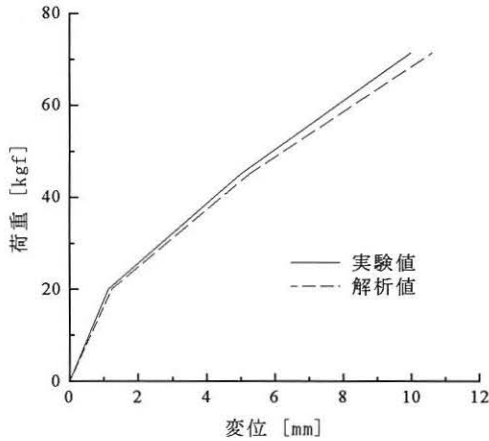


図6-5 剪断試験結果と材料非線形解析結果の比較

7. 解析例

図7-1に示す鞍型曲面に雪荷重0~300kgf/m²をかけたときの最大応力および中央変位について、材料線形解析と材料非線形解析を行い比較する。両者とも初期張力100kgf/mを仮定し、形態非線形として解析を行った。ただし、材料非線形解析においては軸方向力に対する非線形性と剪断力に対する非線形性の両方が考慮されているものとする。解析結果を図7-2~7-6に示す。

図7-2, 7-3において材料非線形解析の荷重-応力曲線が、なめらかでないのは材料定数が随時変化しているためだと考えられる。また図7-4~7-6の材料非線形解析結果には荷重(応力)と変位の間に非線形性が顕著に出ており、実際の膜の挙動により近いものであると思われる。

また計算時間について、雪荷重60kgf/m²をかけたときの解析にかかる時間を材料線形と材料非線形で比較すると、荷重増分を同じにした場合は、ほとんど同じ計算時間で、材料線形解析の荷重増分回数を1(材料非線形解析の荷重増分回数は9)としても材料非線形解析にかかる時間は2倍程度であった。

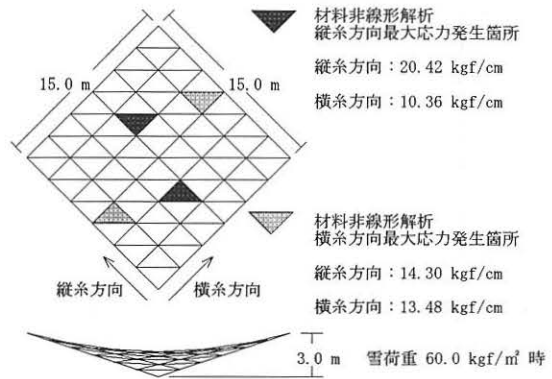


図7-1 鞍型曲面解析モデル

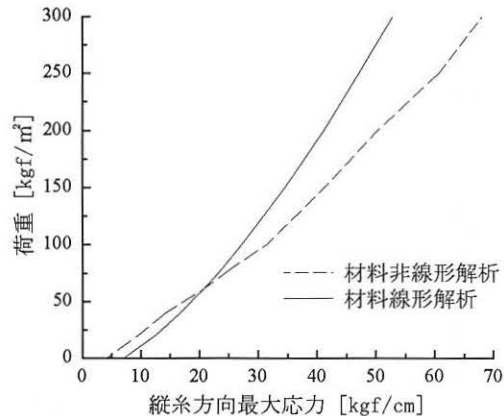


図7-2 荷重と縦糸方向最大応力の関係

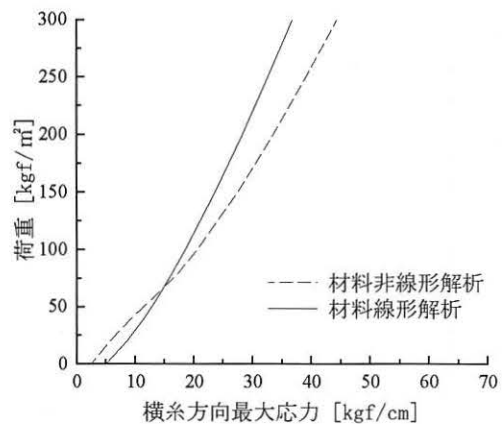


図7-3 荷重と横糸方向最大応力の関係

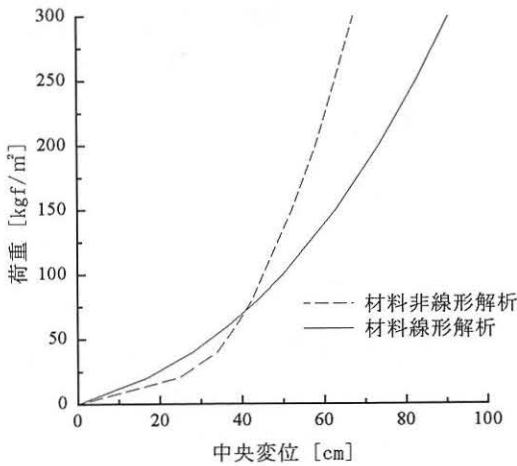


図7-4 荷重と中央変位の関係

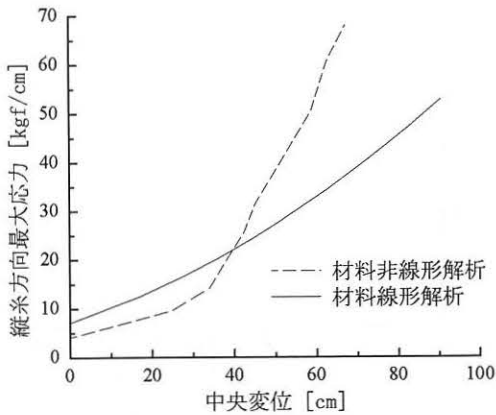


図7-5 縦糸方向最大応力と中央変位の関係

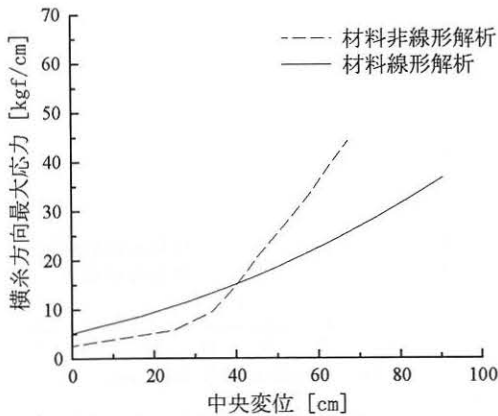


図7-6 横糸方向最大応力と中央変位の関係

8. まとめ

本研究において、膜構造の解析は、材料非線形性を考慮することによって、より実際に近い応力変形解析のことができることが示された。まず、材料定数の設定段階で得られたことを記す。

- 1) 材料定数の試算方法として、最小二乗法、最良近似法などが考えられるが、出てくる誤差の大きさやばらつきによって、最も信頼できる試算方法を選ばなければならない。
- 2) 線形化区間を決定するにあたって2軸応力を相当応力で評価する手法を取入れた。膜材A種の場合、膜の相当応力として

$$\bar{T} = 0.6 T_1 + T_2 \quad (8-1)$$

を提案し、これを満たすよう、線形化区間を決定すれば、ほぼ実験結果のS-S曲線に一致する線形近似曲線が得られる。

- 3) 線形化区間数をあまり多くすると、かえって実験値との誤差が大きくなる、また解析上、収束性が悪くなり計算に時間がかかる。

次に材料非線形解析を行う上で得られたことを示すと

- 4) 荷重増分段階で、式(8-1)の膜相当応力 \bar{T} を判定基準として材料定数を変化させれば簡単に材料非線形性をプログラムに組み込むことができる。
- 5) 荷重増分を大きくすると、変位に大きな誤差を生じる。そのため荷重増分の大きさには十分な配慮が必要で、特に材料非線形性の大きい低応力レベルでは、1回の荷重増分を十分小さくする必要がある。
- 6) 2軸引張試験および剪断試験のシミュレーションをすることによって膜相当応力 \bar{T} を判定基準とした材料非線形解析の妥当性が確かめられた。
- 7) 計算時間についても鞍型曲面を解析した限りでは、十分実用的な範囲であると考えられる。

などである。

本研究によって膜材料A種の力学的特性をほぼ正確に把握できたと考えられる。また応力変形解析においても、荷重増分の大きさに配慮が必要であるものの、膜材の材料非線形性を十分に評価できたとと思われる。

膜材料に関して今回は、A種膜材に限って考察を行ったが、これ以外の膜材料に関しても同様な考察を行えば、材料非線形性を適正に評価できる解析が可能となるであろう。

(参考文献)

- 1) 南 宏和: 膜構造に使用されるコーティング平織物の二軸変形特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 昭和59年10月
- 2) 南 宏和: PTFEコーテッド・ガラス繊維布(膜材料A種)の非線形伸長曲線への多段線形近似とその応用, 日本建築学会構造系論文報告集 第436号, 1992年6月
- 3) 石井 一夫: 膜構造用膜材料概説, 膜構造研究論文集'92, 日本膜構造協会, No. 6(1989)
- 4) 山田 嘉昭: 塑性・粘弾性(有限要素法の基礎と応用シリーズ6), P75-147, 培風館, 1980年
- 5) E. Hinton, D. R. J. Owen: "Finite Element Software for Plates and Shells", Pineridge Press (1984)
- 6) 石井 一夫: "膜構造の非線形解析", Proc. IASS Int. Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures, Tokyo Japan, Oct. 1993
- 7) 石井 一夫: 膜構造の応力・変形解析概説, 膜構造研究論文集'90, 日本膜構造協会, No. 4(1990)
- 8) O. C. Zienkiewicz著, 吉識雅夫・山田嘉昭訳: マトリックス有限要素法, P443-517培風館
- 9) 石井 一夫, 西川 薫, 萱島 誠: 膜材料の剪断剛性試験法開発研究報告書 1991年, 日本膜構造協会 1991年度研究報告書
- 10) 膜材料面内剪断剛性試験方法, 日本膜構造協会, 1993年6月
- 11) 平 修二: 現代 弾性力学, オーム社
- 12) 戸川 隼人: 数値計算(情報処理入門コース7), 岩波書店, 1991年
- 13) 戸川 隼人: 統計処理(情報処理入門コース8), 岩波書店, 1992年

AN EVALUATION METHOD ON THE MATERIAL NONLINEARITY IN THE ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES

Yosihiko HINO*1

Kazuo ISHII*2

SYNOPSIS

The stress and strain analysis of membrane structures is usually made based on the presumption of material linearity and geometry nonlinearity because of the application suitability and the difficulties in analysis. But the real membrane materials possess strong material nonlinearities, the analysis not considering this characteristics has the possibility of yielding large errors. Thus it is necessary to consider both material nonlinearity and geometry nonlinearity in order to make stress and strain analysis that is in accordance with the real situation. Based on the presumption of geometry nonlinearity, this paper in advance defined several kinds of material property constants, by taking them in according to the different levels of stresses occurred, the simulation of material nonlinearity was tried. During the analysis the evaluation method of 2-axis stress was a problem to be solved. To solve this problem, the author proposed a new evaluation method of membrane stresses by taking in the concept of effective stress that has something to do with the yielding condition of plastic body. In the meanwhile of discussing the suitability of the evaluation method, the problems and points to be taken care of in applying this method are also shown in this paper.

*1 Graduate Student of Master Course, Yokohama National University

*2 Professor, Dr.-Eng, Yokohama National University