

材料非線形性を考慮した膜構造解析

— 織構造格子モデルによる構成方程式の適用 —

加藤史郎*¹

PONGPO PETCH*²

概 要

有限要素法への適用を目的に、膜材料の疑似的な物理モデルによって誘導された構成方程式に基づいて、材料的・幾何学的非線形性を考慮した膜構造解析を行う。対象とする構造物は所定の張力が導入されているサスペンション膜構造であり、大きな積雪荷重を受け除荷された後の初期張力の減少状況を観察する。その結果より、提案された構成方程式の構造解析上の有用性が指摘された。

1. まえがき

膜構造の構造材料としてコーティングされた織布が主に使用されている。この種の材料は、(1)糸の初期ゆるみやコーティングの降伏等の弾塑性的な材料非線形性、(2)糸の相互作用(クリンプ交換)による材料内部の幾何学的非線形性、(3)応力緩和等の粘弾性特性を含んでいる事が既往の研究により明かである。^[2]

薄く曲げ剛性のほとんどない膜材を構造材料として適用するためには、面内に初期張力を導入し見かけの面外剛性を高める必要がある。膜面内に存在している張力が小さければ面外剛性が小さくなり、構造物に過剰な振動やしわなどが発生する原因となる。

一方、構造物が大きな外乱を受けた後、また時間の経過と共に上述した特性が原因となって初期張力が減少する事がしばしば見られ、また、このような現象は斉藤ら^{[4]・[5]}の実験結果から明らかにされている。しかしながら、今日の膜構造解析において膜材を直交

異方性弾性材料として処理しているため、このような問題を扱うのは不可能である。様々な努力がなされた中で、著者ら^[1]は Meffertら^[3]により提案された織構造格子モデルをもとに有限要素法へ適用可能な膜材の構成則を誘導した。

本論文は [1] で誘導された構成則を三角形低次ひずみ要素に適用し、膜構造の材料的・幾何学的非線形性を考慮した構造解析を行い、膜構造の初期張力減少問題を指摘する。なお、解析においては応力緩和等の粘弾性特性を考慮しないものとする。

2. 織構造格子モデル及び構成則

2.1 織構造格子モデル

Meffert モデルをもとに図-2.1 のような膜材を表現する織構造格子モデルを材料モデルとして導入した。

*1 豊橋技術科学大学建設工学系教授

*2 (株)巴コーポレーション海外部技師

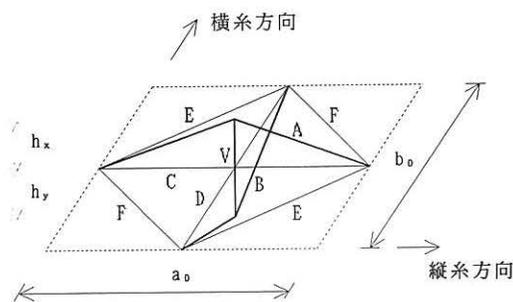


図-2.1 織構造格子モデル

モデルの初期形状として a_0 , b_0 は横糸方向及び縦糸方向の糸の中心間隔、 h_x , h_y は糸の波の形状を表すクリンプ高さを意味する。また、膜材を構成している材料を表現するものとして、部材 A , B は縦糸と横糸、部材 C , D , E , F はコーティングを代表している。これらの部材はそれぞれ代表する部材の特徴を考慮した上で履歴特性を仮定し、区分的線形関数を用いて表現した。その特性の詳細については参考文献 [1] を参照されたい。

2.2 構成則

構成則は、任意の増分ステップにおいて辺の長さ $a_0 \times b_0$ をもつ膜材の仮想増分ひずみエネルギーと織構造格子モデルの仮想増分ひずみエネルギーが等しいと考え理論展開を進めた。したがって、(2.1) 式が成立する事になる。

$$\begin{aligned}
 & a_0 b_0 [N_x \delta(\Delta \epsilon_x) + N_y \delta(\Delta \epsilon_y) + N_{xy} \delta(\Delta \gamma)] \\
 &= 2\delta(\Delta \epsilon_A^L l_{0A}) N_A + 2\delta(\Delta \epsilon_B^L l_{0B}) N_B \\
 &+ 2[\delta(\Delta \epsilon_A^N)(\sigma_{0A} + f_A) A_{0A} l_{0A}] \\
 &+ 2[\delta(\Delta \epsilon_B^N)(\sigma_{0B} + f_B) A_{0B} l_{0B}] \\
 &+ \delta(\Delta \epsilon_C l_{0C}) N_C + \delta(\Delta \epsilon_D l_{0D}) N_D \\
 &+ 2\delta(\Delta \epsilon_E l_{0E}) N_E + 2\delta(\Delta \epsilon_F l_{0F}) N_F \\
 &+ \delta(\Delta \epsilon_V l_{0V}) N_V
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし、

- $\Delta \epsilon_x$: 縦糸方向の膜材の増分伸びひずみ
- $\Delta \epsilon_y$: 横糸方向の膜材の増分伸びひずみ
- $\Delta \gamma$: 膜材の増分せん断ひずみ
- N_x : 縦糸方向の膜材の増分後の単位長さ当たりの断面力
- N_y : 横糸方向の膜材の増分後の単位長さ当たりの断面力

- N_{xy} : 膜材の増分後の単位長さ当たりのせん断力
- $\Delta \epsilon_K$: 部材番号 K の増分ひずみ
- $\Delta \epsilon_K^L$: 部材番号 K の増分ひずみの線形成分
- $\Delta \epsilon_K^N$: 部材番号 K の増分ひずみの非線形成分
- N_K : 部材番号 K の増分後の軸力
- l_{0K} : 部材番号 K の初期長さ
- σ_{0K} : 部材番号 K の増分前の応力
- f_K : 部材番号 K の粘弾性特性による見かけの応力

(2.1) 式を展開し、整理すると (2.2) 式のような増分形の構成則が得られる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{N}_{x0} \\ \bar{N}_{y0} \\ \bar{N}_{xy0} \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\{N\} = [D]\{\Delta \epsilon\} + \{N_0\} + \{\bar{N}_0\} \tag{2.2a}$$

(2.2) 式の D_{ij} , N_{x0} , \dots , \bar{N}_{xy0} は織構造格子モデルの増分前の諸量の関数として得られる。

3. 解析手法

本論文では、(2.1) 式の増分形式の構成則を三角形低次ひずみ要素に適用し、各増分ステップ毎に座標を更新するいわゆる Updated Lagrangian 流の定式化に基づいて解析を行う。

3.1 座標系の定義

無ひずみ状態では縦糸と横糸が互いに直交しているため、その状態における膜面上の任意点 P の局所座標系を糸の方向と一致するように定義する。

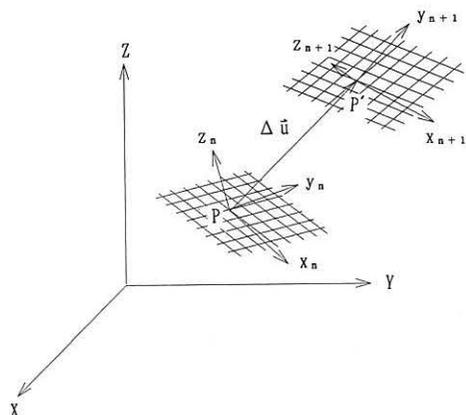


図-3.1 座標系

任意 n ステップ目において要素にはひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ および γ が存在し、この時の要素の直交局所座標系 $[x_n, y_n, z_n]$ と固定座標系 $[X, Y, Z]$ との座標変換マトリックスを $[R_n]$ とする。

$$\{x_n\} = [R_n]\{X\} \quad (3.1)$$

増分後、点 P に増分変位 $[\Delta u, \Delta v, \Delta w]$ が発生し、膜面に増分ひずみ $[\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma]$ が生ずる。増分変位が微小である事を考慮して、 n ステップ目における局所座標系 $[x_n, y_n, z_n]$ は $n+1$ ステップ目のための局所座標系 $[x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}]$ は以下の近似式により更新される。

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\{x_{n+1}\} = [\Omega]\{x_n\} \quad (3.2a)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial \Delta w}{\partial y_n} \\ \omega_y &= -\frac{\partial \Delta w}{\partial x_n} \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y_n} - \frac{\partial \Delta v}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$

(3.1) 式を (3.2a) に代入すると、次式が得られる。

$$\{x_{n+1}\} = [\Omega][R_n]\{X\} \quad (3.3)$$

したがって、 $n+1$ ステップ目の座標変換マトリックス $[R_{n+1}]$ が以下のように更新される。

$$[R_{n+1}] = [\Omega][R_n] \quad (3.4)$$

3.2 増分ひずみの定義

ここでは (3.5) 式の増分ひずみを採用する。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ &= \Delta \varepsilon_x^L + \Delta \varepsilon_x^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_y &= \frac{\partial \Delta v}{\partial y_n} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y_n} \right)^2 \right] \\ &= \Delta \varepsilon_y^L + \Delta \varepsilon_y^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \gamma &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y_n} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x_n} + \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} \frac{\partial \Delta u}{\partial y_n} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x_n} \frac{\partial \Delta v}{\partial y_n} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x_n} \frac{\partial \Delta w}{\partial y_n} \right] \\ &= \Delta \gamma^L + \Delta \gamma^N \end{aligned} \quad (3.5)$$

ただし、

$\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma$: 増分ひずみ

$\Delta u, \Delta v, \Delta w$: 局所座標系における増分変位

3.3 つり合い方程式

物体力を無視し、任意増分ステップにおける仮想増分ひずみエネルギーと仮想増分外力ポテンシャルエネルギーが等しい事を考慮して (3.6) 式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \iint_{s_e} [\delta \Delta \varepsilon_x, \delta \Delta \varepsilon_y, \delta \Delta \gamma] \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} ds_e \\ = \sum_{e=1}^N \iint_{s_e} [\delta \Delta u, \delta \Delta v, \delta \Delta w] \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} ds_e \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\sum_{e=1}^N \iint_{s_e} [\delta \Delta \varepsilon] \{N\} ds_e = \sum_{e=1}^N \iint_{s_e} [\delta \Delta u] \{p\} ds_e \quad (3.6a)$$

ただし、

$\delta \Delta \varepsilon_x, \delta \Delta \varepsilon_y, \delta \Delta \gamma$: 仮想増分ひずみ

N_x, N_y, N_{xy} : 増分後の単位長さ当たりの断面力

$\delta \Delta u, \delta \Delta v, \delta \Delta w$: 仮想増分変位

p, q, r : 増分後の単位面積当たりの外力

ここで、織構造格子モデルによる増分形の構成則

(2.2) 式を代入し、微小項の高次を無視すると、次のようなつり合い式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \iint_{s_e} \left([\delta \Delta \varepsilon^L] [D] [\Delta \varepsilon^L] + [\delta \Delta \varepsilon^N] [\{N_0\} + \{\bar{N}_0\}] \right) ds_e \\ = \sum_{e=1}^N \iint_{s_e} \left([\delta \Delta u] \{p\} + [\delta \Delta \varepsilon^L] [\{N_0\} + \{\bar{N}_0\}] \right) ds_e \end{aligned} \quad (3.7)$$

変位関数を導入し、上式をまとめると次式のようになる。

$$\sum_{e=1}^N [\delta \Delta d] \left([k^0] + [k^G] \right) \{\Delta d\} = \sum_{e=1}^N [\delta \Delta d] \left(\{f\} + \{r\} \right) \quad (3.8)$$

ただし、

$[k^0]$: 剛性マトリックス

$[k^G]$: 幾何剛性マトリックス

$\{f\}$: 一般か外力

$\{r\}$: 一般化内力

部材	A ₀ (cm ²)	l ₀ (cm)	E ₁ (kgf/cm ²)	E ₂ (kgf/cm ²)	E ₃ (kgf/cm ²)	ε _{y1}	ε _{y2}
A	0.0016	0.0576	1800.0	180000.0	×	0.0090	×
B	0.0016	0.0478	3400.0	340000.0	×	0.0180	×
C	0.0020	0.1138	30000.0	10000.0	×	0.0035	1.0000
D	0.0020	0.0921	19000.0	4500.0	×	0.0050	1.0000
E	0.0014	0.0732	1600.0	×	×	1.0000	×
F	0.0014	0.0732	1600.0	×	×	1.0000	×
V	0.0025	0.0220	32000.0	×	×	-1.000	×

表-4.1 各部材の材料定数

{Δd} : 一般化増分変位
座標変換を行い、全体座標系における一般化変位
{ΔD} が任意である事を考慮すると次のつり合い
式が得られる。

$$([K^0] + [K^G])\{\Delta D\} = \{F\} - \{R\} \quad (3.9)$$

なお、形状解析を行うときには剛性マトリックス
[K⁰]のみを用いる。

解析は以下の手順及び仮定の基で行われる。

(1) 与えられる応力比のもとに、三角形要素の幾何
剛性を用いて形状解析を行い、それを構造物の初期形
状として応力解析を行う。

(2) 構造物に初期応力が存在しているため、膜材に
は初期ひずみが存在している。それを考慮し、初期歪
みが存在している状態から応力解析を行う必要がある。

4. 解析モデル

4.1 膜材料

解析の対象とする構造物に用いる膜材料は膜材 A 種
(ガラス布-テフロン) とする。この種の膜材の材料
試験結果から織構造格子モデルの諸定数を推定した結
果、表-4.1 のように推定された。

上表の定数を用いてシミュレーションすると図-4.1
に示されるような載-除荷の応力-ひずみ曲線が得ら

れた。ただし、図中の縦糸及び横糸は縦糸方向と横糸
方向の曲線を意味している。

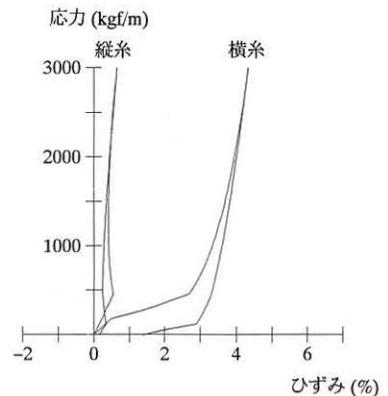


図-4.1a 応力比 1:1 時の応力-ひずみ曲線

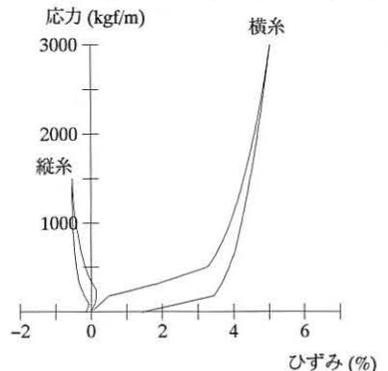


図-4.1b 応力比 1:2 時の応力-ひずみ曲線

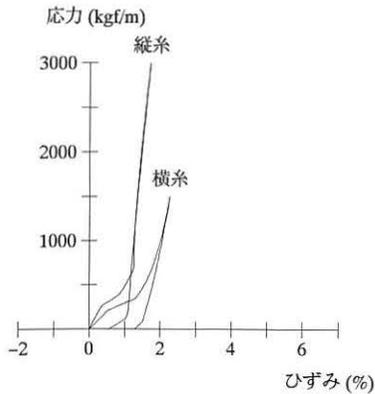


図-4.1c 応力比 2:1 時の応力-ひずみ曲線

4.2 構造モデル

構造解析モデルには等張力曲面（極小曲面）として理論解のよく知られている Catenoid 曲面を応力解析の初期形状とする。この Catenoid 曲面は、平面上の外部と内部リングを境界とした膜面に内部リングを面外方向に所定の強制変位を与える事によって得られたものである。

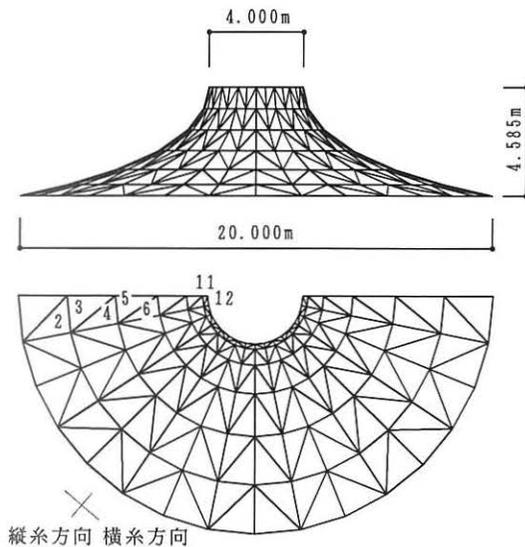


図-4.2 解析モデル

解析条件

境界条件

上部（内部）及び下部（外部）リングの固定境界

初期張力

500 kgf/m の等張力

荷重条件

60 kgf/m² の等分布の積雪荷重の载荷及び除荷

5. 解析結果及び考察

要素 No.1-12 の縦糸方向と横糸方向の応力-ひずみ関係は図-5.1a-5.11 に示されている。図中の点 P、Q は载荷時及び除荷時の縦糸方向の応力を指し、点 R、S は载荷時及び除荷時の横糸方向の応力を指している。これらの点における応力の値は表-5.1に示している。明らかに、積雪荷重载荷時にはクリンプ交換により応力が再配分されており、また除荷時には初期張力が減少している。

三角形低次ひずみ要素を用いたため、本来等しいであろうと思われる要素 No.1 と No.2 , . . . , No.11 と No.12 が大きく異なっている部分があった。

要素 No.	点 P	点 Q	点 R	点 S
1	579	232	487	390
2	545	207	211	310
3	713	188	257	312
4	667	197	145	219
5	949	164	215	221
6	951	205	469	186
7	1176	175	529	187
8	1281	184	891	161
9	1383	181	934	162
10	1437	189	1169	172
11	1610	203	1217	174
12	1384	169	719	397

表-5.1 各要素の载荷、除荷時の応力(kgf/m)

6. あとがき

本論文は、織構造格子モデルによる増分形の構成則を有限要素法に適用した場合の一考察として、大きな外乱を受けた後の膜構造の初期応力減少シミュレーションを試みた。その結果、初期張力の減少及び再配分が見られ、また減少の傾向が観察できた。このような構造解析シミュレーションは、今後の膜構造の初期張力減少問題対策のために必要だと思われる。しかしながら、解析の精度及び構造物の挙動に対する理解をよりよくするためには、今後の課題として以下のような項目が考えられる。

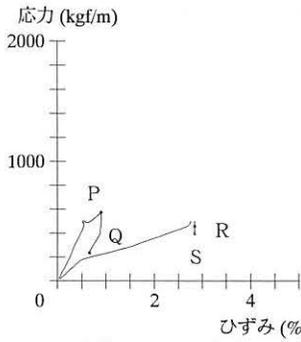


図-5.1a 要素 No.1 の応力-ひずみ

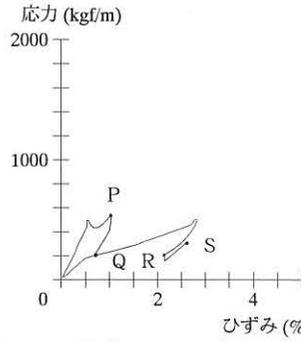


図-5.1b 要素 No.2 の応力-ひずみ

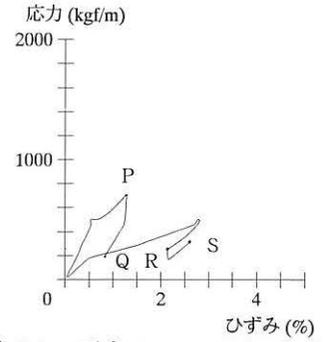


図-5.1c 要素 No.3 の応力-ひずみ

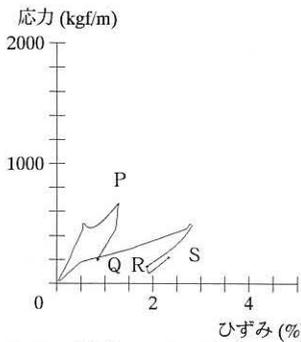


図-5.1d 要素 No.4 の応力-ひずみ

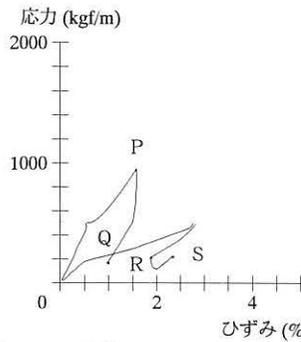


図-5.1e 要素 No.5 の応力-ひずみ

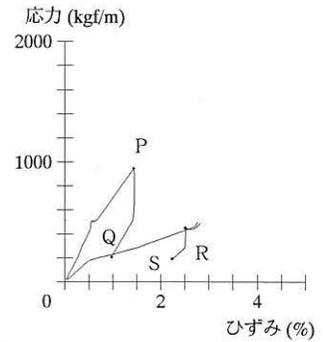


図-5.1f 要素 No.6 の応力-ひずみ

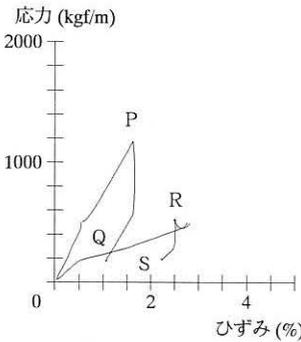


図-5.1g 要素 No.7 の応力-ひずみ

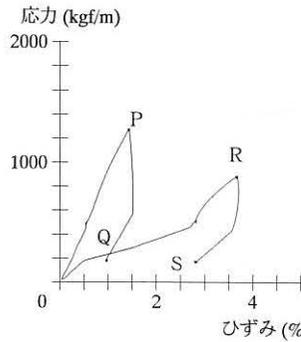


図-5.1h 要素 No.8 の応力-ひずみ

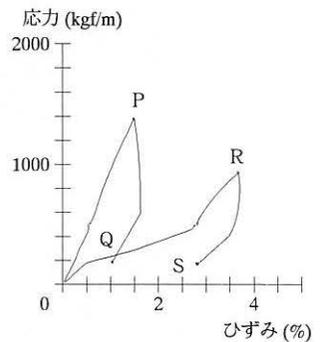


図-5.1i 要素 No.9 の応力-ひずみ

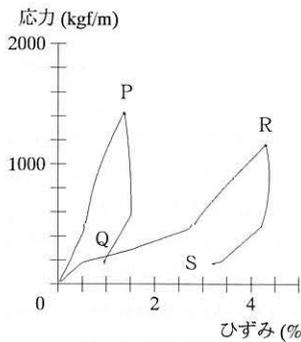


図-5.1j 要素 No.10 の応力-ひずみ

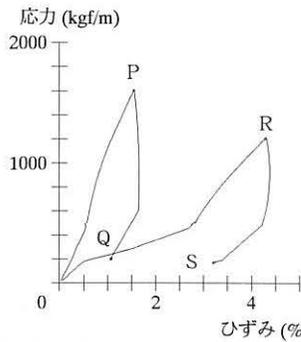


図-5.1k 要素 No.11 の応力-ひずみ

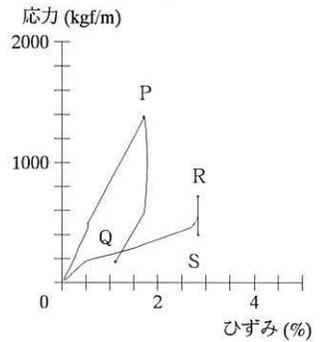


図-5.1l 要素 No.12 の応力-ひずみ

- 1) 曲面要素のような応力の精度のよい要素の適用
- 2) 膜材そのものの応力-ひずみ曲線を支配する要素の追求
- 3) 構造物レベルの実験と解析との実証

謝辞

本研究は、平成4年度能村膜構造技術振興財団の研究助成（研究代表者：加藤史郎）を受けて実施された成果であり、ここに能村膜構造技術振興財団に深く感謝の意を表します。

膜構造に関する興味を日頃から与えていただいている多くの方々のうち、特に構造形式についてご指導いただいた太陽工業磯野義人氏、膜構造研究論文集を通して研究の方向を与えていただいた横浜国立大学教授石井一夫博士、太陽工業小松清博士、研究にご協力いただいた太陽工業小田憲史博士に感謝します。

参考文献

- [1] 加藤史郎、PONGPO PETCH、材料非線形性を考慮した膜材料の構成方程式の定式化—織構造格子モデル、膜構造研究論文集'93、(社)日本膜構造協会、1993
- [2] 石井一夫、膜構造用膜材料概説、膜構造研究論文集'92、(社)日本膜構造協会、1992
- [3] G.Menges, B.Meffert, P.Geisbusch, Spannungs-Deformations-und Versagensverhalten PVC-beschichteter Polyestergewebe unter einachsiger und biaxialer Beanspruchung, Int. Sym. Weitgespannte Flachentragwerke, SFB-64, Univ. Stuttgart, 1976
- [4] 前島克朗、齊藤公男、岡田章、郷田哲雄、膜と張弦梁で構成された軽量複合構造の力学的特性に関する研究(その1)—実験・解析概要および形状形成時の挙動、建築学会大会学術講演梗概集(関東)、1993
- [5] 新田山直紀、齊藤公男、岡田章、武藤肇、山懸信一郎、膜と張弦梁で構成された軽量複合構造の力学的特性に関する研究(その2)—積雪時・風荷重時の挙動、建築学会大会学術講演梗概集(関東)、1993
- [6] 石井一夫、膜構造の形状解析概説、膜構造研究論文集'89、(社)日本膜構造協会、1989
- [7] 正岡典夫、石井一夫、低次四辺形要素による形状解析について、膜構造研究論文集'90、(社)日本膜構造協会、1990
- [8] 正岡典夫、石井一夫、低次四辺形要素による応力変形解析、膜構造研究論文集'91、(社)日本膜構造協会、1991

ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURE CONSIDERING MATERIAL NONLINEARITY

- Application of Constitutive Equation Based on Fabric Lattice Model -

Shiro KATO*¹

Petch PONGPO*²

SYNOPSIS

Basing on the constitutive equation which derived from a quasi-physical model for the purpose of using in Finite Element Method procedure, the membrane structure has been analyzed under consideration of material and geometrical nonlinearity. The reduction of initial tensions in the suspension membrane structure adopted in the present analysis is observed after removal of snow loading superposed on it. From that results, the performance of the proposed constitutive equation on structural analysis of membrane structures has been shown.

*1 Professor, Department of Architecture and Civil Engineering, Faculty of Engineering
Toyohashi University of Technology

*2 Engineer, Overseas Division, TOMOE CORPORATION