極小曲面の数値解析法に関する研究

石原　競[2]
大森　博司[1]
八木　孝憲[2]

概　要

この論文では膜構造を設計する初期段階における原型曲面を数値解析により求める手法に関して記述している。これまで、多くの研究が原型曲面として等張力曲面そのものを解析対象としてきているが、我々の一連の研究では、等張力曲面と極小曲面が等価であることから、極小曲面を変分問題としてとらえ有限要素法解析を行ってきた。しかしながら、各節点の x, y, z 座標全てを未知量とした解析は、強い非線形性のため収束解を得ることは困難となる場合があることがこれまでの解析でわかっている。そこで本論では、面積に関する拘束条件を汎関数に加えることによって、解を得る手法を提案する。また、これとは別に曲面をフーリエ級数により仮定して Ritz 法により解曲面を得る方法についても併せて述べる。

1　序

膜構造に用いられる膜材は、面外方向の剛性をもたず、面内張力のみにより架構を形成するため、その形状には自ずから制約がある。さらに、力学的に合理的な曲面とするために、膜面全体にできるだけ均一な張力が作用する状態となる曲面、すなわち、等張力曲面を設計時の原型曲面とすることが望ましい。この等張力曲面により与えられる形状は、ある閉曲線に張る膜面の面積を最小とする曲面である、極小曲面と理論的に同一となることが知られている。本論では、このことを積極的に利用して、等張力曲面という力学的な観点によらず、膜面の表面積を最小にするという幾何学的な立場から膜構造の原型曲面を見いだす方法について論ずる。

極小曲面を見いだす具体的な方法として、曲面の表面積を汎関数とする変分問題を考え、ここでは、曲面を三角形多面体近似して有限要素法により解析を行う。しかしながら、強い非線形性のため、解析において、節点の自由度を変更するという繁雑な操作を行わなければ解曲面を得ることができなかった。これに対して、鈴木ら [1] は、解ベクトルの方向余弦を考えることにより近似曲面を求める方法を提案している。文献 [3][4] では、この方法により、求解過程にある程度の改善が得られることを示している。しかしながら、条件によっては、要素形状が大きく歪んだ曲面が収束解として求められたり、解曲面が求解過程の履歴に依存するという問題点があることも同時に明らかになった [4](Fig.1)。本論では、すべての節点座標を未知量として、恣意的な拘束条件を設けないで解を得るという立場に基づき理論展開を行っている。また、これとは別に解曲面をフーリエ級数で仮定し Ritz 法による解析についても議論し、極小曲面を求める統一的な解析手法について述べる。

2　理論背景

前述の方向余弦を用いて自由度を低減させて解析する手法は収束性向上の観点から非常に良い結果を示しているが、自由度低減をしない停留条件式を完全には満たしてはいない。また、そこで用いられている方向余弦の設定は経験に基づくものであり、理論的な根拠を持つものではない。

極小曲面を FEM で離散化する時、各節点において

[1]名古屋大学　助教授　工学博士
[2]名古屋大学　大学院生

x, y, zの 3 つの空間座標を全て独立な未知量として解析することが困難な理由として、以下の 2 点が考えられる。

まず第一点は、未知量の間に存在すると考えられる従属関係である。有限要素法を用いて解く時、各節点の未知量 x, y, z座標全てを独立した未知量として扱うと、結果として係数マトリクスが特異になる場合が存在することが認められる。これは、未知量の間に何らかの従属関係が存在するためと考えるのが自然である。自由度を低減する手法はこの従属関係を恣意的に陽に表していると考えられる。

第二点は、多面体の表面積を最小にするという変分問題が極小曲面を多面体で近似するための尺度を一意には与えていないという事実である。端的にいえば、解形状を表す節点位置はその曲面を表すことのできる位置ならば、如何なるところにあってもよいということである (Fig.2)。従って、自由度の低減は節点を強制的に拘束していることに他ならない。

以上の考察から、ここで問題としている極小曲面問題を FEM により数値的に解析する際、各節点の位置を何らかの規準の下で拘束することが必要であることがわかる。ここでは、解析過程で FEM の要素に大きな歪を生じさせないようにすることを目的として、各要素の面積を付帯条件とすることにより節点の位置を拘束する方法について考察を加えてみる。

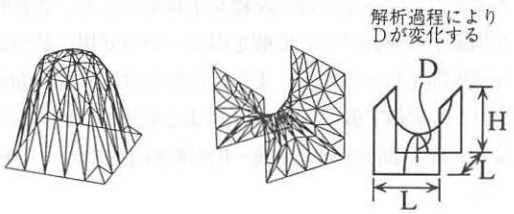


図 1: 自由度低減が及ぼす影響

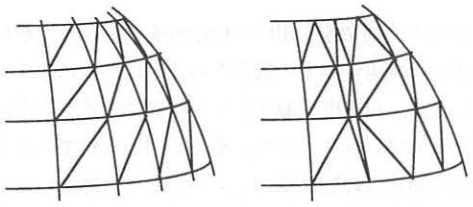


図 2: 同一曲面で異なる節点位置が存在する例

3 定式化

曲面の内包体積を付帯条件とする極小曲面の汎関数に、前節で述べた各要素面積に関する拘束として、要素面積を等しくするという付帯条件を導入する。この場合の汎関数は次式のようになる。

$$J(\boldsymbol{r}, \lambda_V, \lambda_S) = \sum_e S_e + \lambda_V (V_0 - \sum_e V_e) + \lambda_S \sum_e (S_e - \frac{1}{m} \sum_e S_e)^2 \qquad (1)$$

各パラメータは、以下のようなものである。

$\boldsymbol{r}$:位置ベクトル（節点座標）, S_e:要素表面積
V_e:要素内包体積, V_0:指定する内包体積
λ_V:内包体積に関する Lagrange の未定乗数
λ_S:要素面積に関する Lagrange の未定乗数
m:要素数

(1) 式の第三項が新たに導入された付帯条件である。これは、表面積を要素数で除したもの、つまり各要素面積全体の平均と各要素面積を等しくする付帯条件である。今後、この付帯条件を等面積付帯条件と呼ぶことにする。次に (1) 式を$\boldsymbol{r}, \lambda_V$及び$\lambda_S$について変分し停留条件式を求める。三角形有限要素による要素毎の停留条件式は次のとおりである。

$$\delta \boldsymbol{r}_1^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{32}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{32}^{e\prime} \\ \frac{1}{3} S_e' \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\delta \boldsymbol{r}_2^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{13}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{13}^{e\prime} \\ \frac{1}{3} S_e' \end{Bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

$$\delta \boldsymbol{r}_3^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{21}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{21}^{e\prime} \\ \frac{1}{3} S_e' \end{Bmatrix} = 0 \qquad (4)$$

$$\delta \lambda_V : V_0 - \frac{1}{3} \sum_e S_e' (Z_1^e + Z_2^e + Z_3^e) = 0 \qquad (5)$$

$$\delta \lambda_S : (D_e)^2 = 0 \qquad (6)$$

ここに、

$$\boldsymbol{r}_{ij}^e = \boldsymbol{r}_i^e - \boldsymbol{r}_j^e, \quad \boldsymbol{r}_{ij}^{e\prime} = \boldsymbol{r}_i^{e\prime} - \boldsymbol{r}_j^{e\prime}$$

$$A = \frac{1 + 2\lambda_S D_e}{2}, \quad D_e = S_e - \frac{1}{m} \sum_e S_e$$

$$\Delta \boldsymbol{g}_e = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_i^e - \boldsymbol{r}_i^{e\prime})$$

新たなパラメーターは、

$\boldsymbol{n}^e$:要素の法線ベクトル
$\Delta\boldsymbol{g}$:要素の重心の移動を表すベクトル
$\boldsymbol{r}^e$:要素に関する位置ベクトル
なお、プライム記号 (′) は、xy平面への斜影を表す。(z成分を削除したもの)

式 (2)~(6) をもとに修正方程式を作成し Newton-Raphson 法を用いて解くことにより、曲面形状を決定することができる。

4 数値解析例

以上のような付帯条件の導入により得ることのできた解形状は、Fig.3~8に示す帯モデルと正方形境界モデルの2つだけであった。これ以外のモデルの解析では、平面状態より内包体積を指定すると収束解を得ることができない。これは、離散上の曲面において各要素面積が等しくなるような分割が一般に存在しないためである。

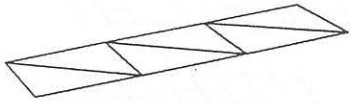


図 3: 帯モデル:初期形状

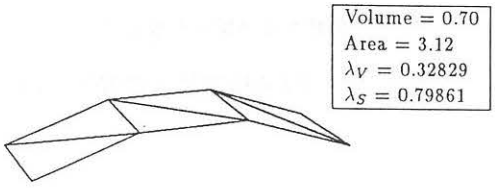


図 4: 帯モデル:内包体積　小

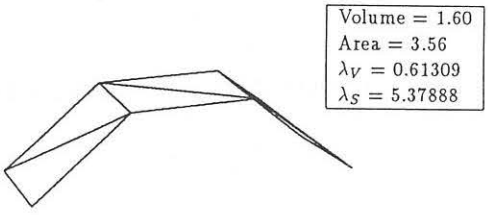


図 5: 帯モデル:内包体積　大

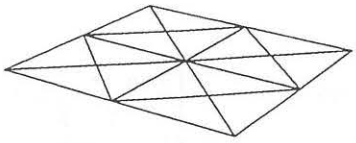


図 6: 正方形境界モデル:初期形状

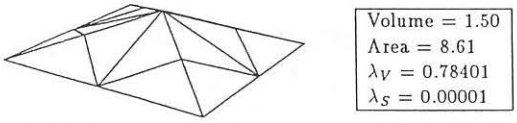


図 7: 正方形境界モデル:内包体積　小

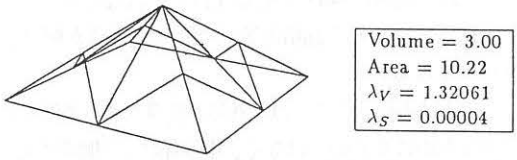


図 8: 正方形境界モデル:内包体積　大

5 複合変分汎関数について

次に、式 (1) の新たに導入した第三項を、付帯条件ではなく、独立した汎関数として扱い、第一、二項で構成される汎関数と第三項で表される汎関数との線形結合により得られる新しい汎関数を考える。具体的には、未知量λ_Sを既知量αに置き換えればよい。

この場合の汎関数は次のようになる。

$$J(\boldsymbol{r},\lambda_V) = \sum_e S_e + \lambda_V(V_0 - \sum_e V_e) + \alpha\sum_e (S_e - \frac{1}{m}\sum_e S_e)^2 \tag{7}$$

上式は、各要素面積を等しくする汎関数に重み係数αを乗じて、元々の汎関数を線形結合した形となっている。元々別の意味を持つ2つの汎関数の結合により表されるこの汎関数をここでは複合変分汎関数と呼ぶことにする。

停留条件式は、αが既知であることから次のようになる。

$$\delta\boldsymbol{r}_1^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{32}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{32}^{e\prime} \\ \frac{1}{3}S_e' \end{Bmatrix} = 0 \tag{8}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_2^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{13}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{32}^{e\prime} \\ \frac{1}{3}S_e' \end{Bmatrix} = 0 \tag{9}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_3^e : A\{\boldsymbol{n}^e \times \boldsymbol{r}_{21}^e\} - \lambda_V \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{g}_e \times \boldsymbol{r}_{21}^{e\prime} \\ \frac{1}{3}S_e' \end{Bmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$\delta \lambda_V : V_0 - \frac{1}{3}\sum_e S_e'(Z_1^e + Z_2^e + Z_3^e) = 0 \tag{11}$$

A は書き換えられて、次のようになる。

$$A = \frac{1 + 2\alpha D_e}{2}$$

上記の停留条件式 (8)~(11) をこれまでの停留条件式 (2)~(6) と比較すると未知量であったλ_Sが既知量αとなったため、式 (6) が新しい停留条件式ではなくなっている。従って、各要素面積を等しくする条件式が陽に表されなくなる。

この方法の良いところは、外部より導入する条件を絶対的なものにするのではなく、重み係数αの加減によって、拘束を強くしたり弱くしたりできることにある。

次に、複合変分汎関数の意味を考えてみる。Fig.9及び Fig.10は、想定される二種類の問題における面積汎関数で表される曲面考えている。Fig.9は、停留点が存在する場合を想定している。これは、重み係数αに適当な値を与え、αの値を減少させて等面積汎関数の拘束を少しずつ緩和していく、最終的にはαを 0 にして収束解が得られれば付帯条件のない純粋な極小曲面形状が得られたことになる。Fig.10は、面積汎関数で表される曲面がフラットで解が見いだせない場合つまり通常では解を求めることができない場合を想定している。この場合は、等面積汎関数により外部から停留点をえることになる。当然ながら、αを 0 にすれば、解は求められない。

6 複合変分汎関数による数値解析例

複合変分汎関数による解析結果を示す。Fig.11 ~ 14は、四半円を 9 分割したモデルである。初期形状より、αに適当な数値を与えて、最終的にαを 0 にする。従って、Fig.13及び 14は、純粋な極小曲面形状を成している。次に、Fig.15 ~ 18は、順にαの値を下げながら内包体積を増加する。Fig.18の解形状でαを減少することができなくなった。

Fig.11~Fig.14は、Fig.9に示されるような、停留点を持つ解析であり、αを減少して解を得ることによって解を見いだすことができる。Fig.15~Fig.18は、Fig.10に示されるような、面積を等しくする拘束の追加によって解を得るそれぞれの例に対応した解である。

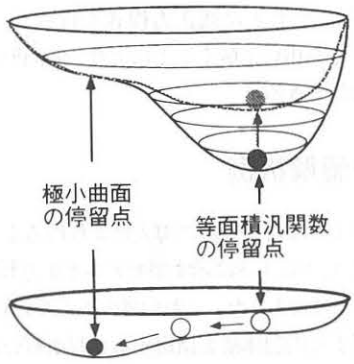


Figure 9: 重み係数αの操作により極小曲面を見いだす過程

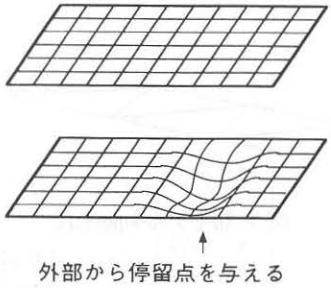


Figure 10: 等要素面積汎関数が停留点を与える例

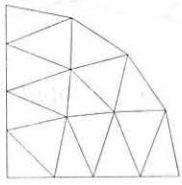


Figure 11: 四半円境界モデル:初期形状:Top View

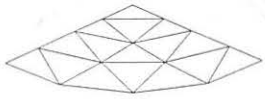
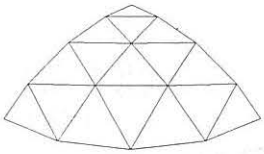
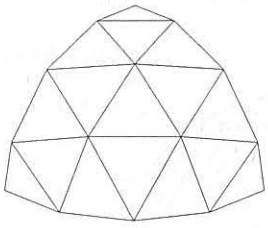


Figure 12: 四半円境界モデル:初期形状



α = 0.0000
Volume = 10.0
λv = 0.352392
Area = 14.18

図 13: 四半円境界モデル:内包体積　小



α = 0.0000
Volume = 25.0
λv = 0.509191
Area = 21.03

図 14: 四半円境界モデル:内包体積　大

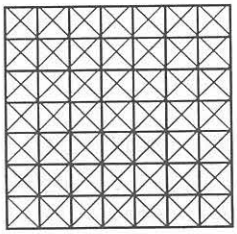


図 15: 正方形境界モデル:初期形状:Top View

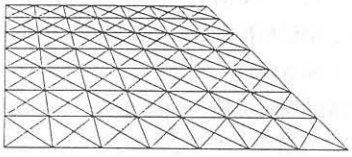
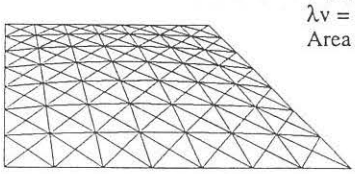
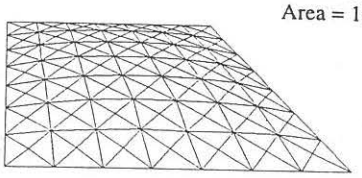


図 16: 正方形境界モデル



α = 1.000
Volume = 40.0
λv = 0.030172
Area = 196.60

図 17: 正方形境界:内包体積　小



α = 1.000
Volume = 70.0
λv = 0.052318
Area = 197.84

図 18: 正方形境界:内包体積　大

7　Ritz 法による極小曲面の解析

これまで、有限要素法による解析を行ってきた。ここでは、解曲面をフーリエ級数で仮定し Ritz 法により解析を行う。有限要素法では、節点の位置を一意に定めることが不可能であるとの判断から収束解を得ることが困難であったが、解曲面をフーリエ級数で展開した場合は、節点の問題は、もはや存在しなくなり安定して収束解を求めることができると考えられる。

次に、解曲面の微小部分の表面積と内包体積を Fig.19 に示す。Fig.19より、表面積と内包体積は次のように定式化される。

$$d\boldsymbol{r}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ z_y dy \end{Bmatrix}, \quad d\boldsymbol{r}_2 = \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ z_x dx \end{Bmatrix}$$

$$d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2 = \begin{Bmatrix} z_x dxdy \\ z_y dydx \\ -dxdy \end{Bmatrix}$$

$$dS = |d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

従って、表面積は次式のようになる、

$$S = \int\int_{S_0} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

そして、内包体積は $dV = zdxdy$ より

$$V = \int\int_{S_0} zdxdy$$

のように表される。なお、S_0は考慮すべき x, yの領域である。仮定関数は次式のように定義する。

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sin\alpha_i x \cos\alpha_j y \tag{12}$$

$$(\alpha_i = \frac{2i-1}{a}\pi, \alpha_j = \frac{2j-1}{b}\pi)$$

$$z_x = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i \cos\alpha_i x \sin\alpha_j y \tag{13}$$

$$z_y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\alpha_j \sin\alpha_i x \cos\alpha_j y \tag{14}$$

各パラメータは、 A_{ij}:重み係数、m, n:波数 である。

以上の定式化より、汎関数は次のようになる。

$$J(A_{ij}, \lambda_s) = S(A_{ij}) + \lambda_V(V_0 - V(A_{ij}))$$
$$= \int\int_{S_0} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy + \lambda_V \int\int_{S_0} zdxdy \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

重み係数 A_{ij} とλ_Vについて変分し停留条件式を求めると、次のようになる。

$$\delta A_{ij}:$$
$$\int\int_{S_0} \frac{z_x\alpha_i \cos\alpha_i x \sin\alpha_j y + z_y\alpha_j \sin\alpha_i x \cos\alpha_j y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}dxdy$$
$$= 0 \cdots\cdots \tag{17}$$

$$\delta\lambda_V: \quad V_0 - \int\int zdxdy = 0 \tag{18}$$

(17) 及び (18) 式を解いて得られる解形状を Fig.(20) ~(22) に示す。

当初の予測どおり汎関数に外部から拘束を与えることなく、収束解を得た。考慮すべき領域全体に仮定関数を用いる Ritz 法では、その解法の性質上、境界形状が単純である場合に限られるが、安定的に解析を行なうことが可能である。

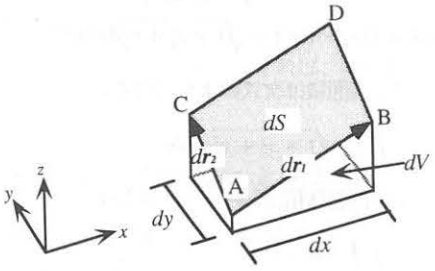


図 19: 表面積と内包体積の微小部分

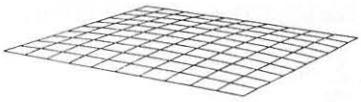


図 20: Ritz 法による解析:初期状態

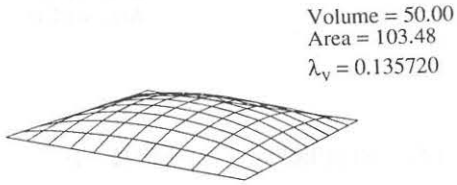


図 21: Ritz 法による解析:内包体積 小

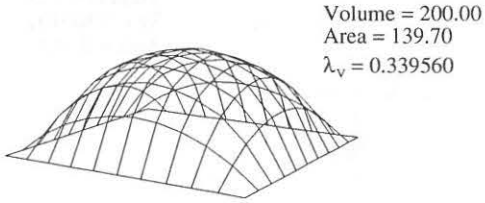


図 22: Ritz 法による解析:内包体積 大

8 結語

本論文では、節点座標のすべてを未知量として解を得る方法について議論を行い、面積を等しくする条件を付帯条件ではなく、汎関数として扱い線形結合により得られる複合変分汎関数として扱う方法を提案した。この方法は重み係数αにより面積を等しくする程度を加減することによって拘束に強弱を付けて解を求めることができ、数値解析を通して収束状況が非常に良好であることが示された。

有限要素法解析に続き、曲面をフーリエ級数展開し Ritz 法により解を求めることを試みたところ、安定的に求解できることが示された。極小曲面形状を求める際、空間をメッシュ分割する事により多面体近似解を求める FEM と空間内に関数仮定を行なう Ritz 法とで、求解過程の安定性が異なる点について、今後、さらに詳細に検討する予定である。

参考文献

[1] 鈴木俊男、半谷裕彦:極小曲面の変数低減による有限要素解析、日本建築学会構造系論文報告集、No.425、1991、pp.111-120

[2] 大森博司、萩原伸幸、松井徹哉、松岡理:有限要素法による極小曲面の数値解析、膜構造研究論文集'88

[3] 石原　競、大森博司:張力構造に関する基礎的研究(その8:自由度の低減について)、日本建築学会大会梗概集'92 pp.1819～1820

[4] K. Ishihara,H. Ohmori : Minimal Surface Analysis by using Finite Element Method, Theorical and Applied Mechanics Vol.42 pp.65-74

Study on Numerical Methods of Minimal Surface Analysis

Kay ISHIHARA[2]
Hiroshi OHMORI[1]
Takanori YAGI[2]

SYNOPSIS

In the beginning of the design process of the membrane structures, it is recommended to adopt the minimal surface as the original design surface. In the numerical calculation for pursuing the objective minimal surface, we, however, can not always obtain the converged solution because of the strong nonlinearity involved in the problem. In the present paper, we propose the "combined variational functional" which is composed of several different functionals. As a result, we can obtain the converged solution very easily. Additionally, the numerical results obtained by using Ritz's method is also discussed.

---

[1]Associate Professor, Nagoya University, Dr. Engineering
[2]Graduated Student, Nagoya University