

材料非線形を考慮した膜材料の構成方程式の定式化

— 織構造格子モデル —

加藤史郎^{*1}

Pongpo Petch^{*2}

梗概

膜構造に用いられる膜材は強い非線形性をもつ異方性材料であり、それを等方性弾性体として処理するのは矛盾を生むことになる。その矛盾を避けるために様々な努力がなされたが、膜材を直線材に置換する織構造格子モデルが性状を定量的に分析する上で最も簡単でかつ望ましいと思われる。しかし直線材置換された膜材を直接対象として解析する事は実用的ではないと考え、本研究は、それを考慮しながら有限要素法へ適用できる構成式を誘導する。この手法の導入によって、大規模な膜構造の材料非線形性問題の扱いがより簡単になる。

1. まえがき

膜構造用の膜材料は、それを構成している縦糸と横糸の強さによって、引張に対する剛性、破断強度が得られる。しかし膜材は、本来の剛性に達する前に低い荷重領域で非常に複雑な非線形挙動を示す。この力学的な挙動については、数多くの研究者により様々な視点から研究がなされてきた。初めに、F.T.Peirce^[1]らはコーティングされない平織りの織布について縦糸と横糸との相互作用を明らかにし、この作用をクリンプ交換と名付けた。その後、コーティングされた膜材の解析モデルがいくつか提案されたが、そのほとんどがこの特徴を基本とするモデルである。

特にB.Meffert^[2]らは糸およびコーティング材を直線部材に置換し、解析モデルを単純化して、その有効性を実証している。さらに、H.Schock^[3]や小松^[5]らによってこの考え方が展開され、物理的により適格な膜材のモデル化が試みられたが、いずれも材料非線形性は考慮されるまでには至っていない。しかし、石井^[4]

やH.Schockらが指摘したように、膜材の変形メカニズムの中には弾性範囲内だけでは説明しきれない非常に複雑な部分が含まれている。

一方、従来の設計における膜構造解析は、矛盾が生じるにもかかわらず膜材を弾性体と考え、主に二次元有限要素法を適用してきた。この矛盾をなくすために、小松らは直線材置換された膜材を大規模な立体構造として直接に解析する方法を提案している。しかし実務レベルでの適用性を考えると、クリンプ交換等の幾何学的非線形性および材料非線形性を考慮しながら、従来使われている有限要素法へ適用できるような膜材のモデルの開発が必要である。本研究の目的は、Meffert型織構造格子モデルに基づいてエネルギーの等価性を用いて有限要素法に使用できるような構成則を定式化することにある。また、あわせて低い荷重レベルで起こりうるクリープ現象や応力緩和のような時間依存型材料非線形性も、この手法で定式化する。

*1 豊橋技術科学大学工学部建設工学科教授

*2 豊橋技術科学大学工学部建設工学専攻修士課程

2. モデルの概要

2.1 単位要素

コーティングされた平織りの織物をB.Meffertらによって提案された解析モデルに基づいて直線部材に置換する。これを図1に示す。

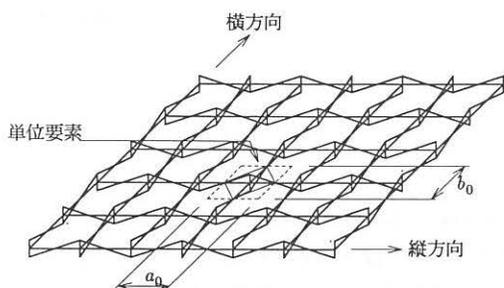


図1. 平織り膜材のモデル化

この立体構造モデルを用いて直接解析することもできるが、前章で述べたように、本研究では有限要素法に適用できるようにこのモデルを用いて構成式を誘導する。そのために図2に示される糸の交点を中心とした両辺の長さ a_0 、 b_0 をもつ単位要素を導入する。

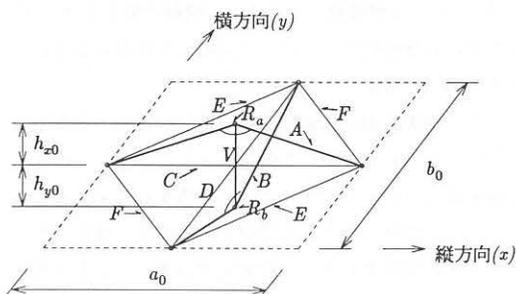


図2. モデルの単位要素

この単位要素の構成は、織布を代表する部材とコーティング材を代表する部材とに大別できる。織布を代表する部材に関しては、部材Aは縦糸、部材Bは横糸を表す。また、鉛直部材Vは糸の交点における変形メカニズムを表現し、クリンプ交換を引き起こす重要な役割をもつ。コーティング材を代表する部材に関しては、主に伸び作用を表す部材C、D、せん断作用を表すブレース材E、Fを用いる。糸の交点の上部と下部

にはコーティング材による見かけの曲げバネ R_A 、 R_B を導入する。なお、糸の波の形状を表すクリンプ高は h_{x0} 、 h_{y0} とする。

2.2 弾塑性履歴特性

膜材に荷重を与えたのち除荷すると、残留ひずみが生ずることは既往の試験結果より明らかである。この材料非線形性をモデル化するには、織布およびコーティング材の特徴を考慮しながら、単位要素を構成する部材の履歴特性を考える必要がある。本節では、履歴特性を区分的な弾性領域を用いて表現し、その物理的な解釈を行なう。

2.2.1 糸材 A、B (引張耐力型)

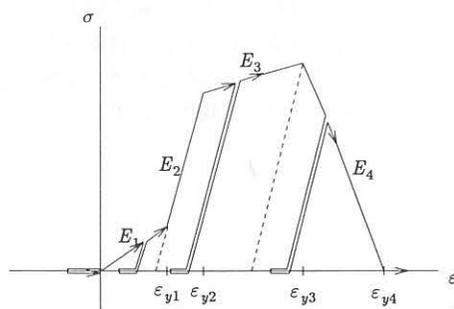


図3. 糸材の履歴特性

図に示すように、糸の圧縮剛性は完全に無視できると仮定する。引張領域については、はじめは初期ゆるみが存在するが、ある程度ひずみが生ずると常時の高い剛性をもつものとする。糸の応力が降伏点に至ると降伏しはじめ、ある時点で糸が劣化しはじめる。その後耐力が低下して行き、糸が完全に切れると、その剛性がなくなる。ここで注意すべきことは、膜材としての初期ゆるみは主として繊維間のゆるみと波打つ糸のクリンプ交換から構成されることである。

2.2.2 束材 V (圧縮耐力型)

Schock らは、縦と横糸の交点における変形メカニズムは複雑であることを指摘した。しかし時間に依存する成分を除けば、その剛性は初期ゆるみを除いた後、一定値に漸近する傾向がある。ここでは、図4に示す特性を仮定し、糸材と逆に、引張剛性を無視することにする。

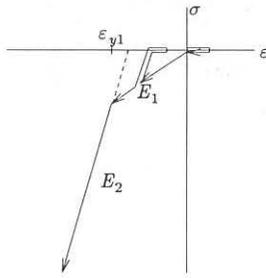


図 4. 束材の履歴特性

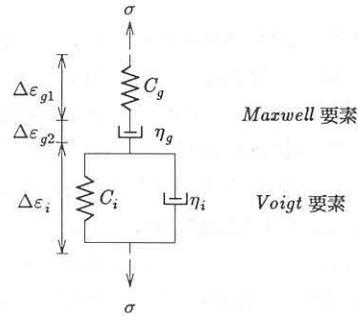


図 6. 単軸部材の力学的モデル化

2.2.3 コーティング材 C、D、E、F (Tri-linear型)

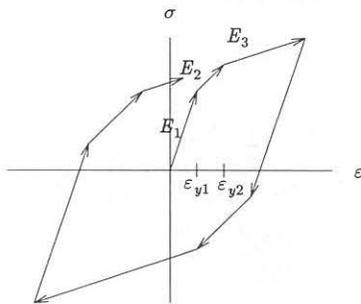


図 5. コーティング材の履歴特性

コーティング材そのものは、延性のある材料特性を示す。ここでは、コーティング材部材の履歴特性として、延性の表現しやすい Tri-linear 型特性を用いる。

2.3 粘弾性特性

膜構造物へ膜材を適用する際、比較的低い初期張力が導入される。この低い張力の下でも、一般に時間依存変形状が十分に起こりうる。この粘弾的な材料非線形性はコーティング材の塑性変形状に大きく左右されるといわれている。しかし、解析の立場からこのことを考慮するのは非常に困難であるので、本研究では弾塑性と粘弾性の両者が互いに独立していると考えて定式化を行なう。繊維構造格子モデルを構成する部材の粘弾性特性を表現するために、図 6. に示される単純 Maxwell(g)要素と単純 Voigt(i)要素が直列結合した 4要素 Voigtモデルを採用する。

ただし、 $C_g = 1/E_g$ で、 E_g は区分的弾性係数であり、弾塑性特性を支配する定数である。また、 C_i はコンプライアンス、 η_g および η_i は粘性係数であり、粘弾性特性を支配する定数である。膜材の弾塑性成分と粘性成分が独立していると仮定しているため、Maxwell 要素のバネで部材の弾塑性特性を表す。したがって、全増分ひずみは (2.1) 式のように得られる。

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{g1} + \Delta \varepsilon_{g2} + \Delta \varepsilon_i \quad (2.1)$$

ただし、

$\Delta \varepsilon_{g1}$: Maxwell 要素の弾塑性ひずみ増分成分

$\Delta \varepsilon_{g2}$: Maxwell 要素の粘性ひずみ増分成分

$\Delta \varepsilon_i$: Voigt 要素の粘性ひずみ増分成分

任意時刻 t から $t + \Delta t$ への応力が線形的に変化すると仮定すれば、この材料の力学的モデルから (2.2) 式のような時刻 t における増分応力 $\Delta \sigma$ が得られる。

$$\Delta \sigma = E_T \Delta \varepsilon + f \quad (2.2)$$

ただし、

$$E_T = \left[C_g + \frac{\Delta t}{2\eta_g} + \left(1 - \frac{T_i}{\Delta t} + \frac{T_i}{\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{T_i}}\right) C_i \right]^{-1}$$

$$f = E_T \left[\frac{\Delta t}{\eta_g} \sigma(t) + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T_i}}\right) C_i \left[\sigma(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{C_i} \right] \right]$$

T_i : Voigt 要素の遅延時間 ($= C_i \eta_i$)

なお、膜構造への適用にあたっては、膜材の粘弾性実験結果に基づいて繊維構造格子モデルの各部材について、定数 C_i 、 T_i 等を求めておく必要があるが、現在では、データはきわめて限られている。この定数の特定は、今後の課題である。

$$\begin{aligned} a_0 &\longrightarrow a \\ b_0 & \quad b \\ h_{x0} & \quad h_x + \Delta h_x \\ h_{y0} & \quad h_y + \Delta h_y \end{aligned}$$

3. 単位要素の増分形構成方程式

本章では、織り構造格子モデルを形成する単位要素に仮想仕事の原理を適用し、単位要素に関する増分形構成方程式を誘導する。初めに、無ひずみ状態における要素の横、縦の辺の長さを a_0 、 b_0 、クリンプ高を h_{x0} 、 h_{y0} とおき、部材記号 K を有する部材の断面積と長さを A_{0K} 、 l_{0K} とする。要素内に ε_x 、 ε_y 、 γ の面内ひずみが発生したとき、辺の長さは a 、 b に、クリンプ高は h_x 、 h_y に変化し、各部材に生じたひずみ ε_K により部材長は l_K に変化する。また、この ε_x 、 ε_y 、 γ における各部材の応力を σ_{0K} とおく。この状態から要素内に増分ひずみ $\Delta\varepsilon_x$ 、 $\Delta\varepsilon_y$ 、 $\Delta\gamma$ が生じ、クリンプ高が Δh_x 、 Δh_y だけ変化した状態を考える。ただし、各部材の接線剛性 E_{TK} は前節で考察した粘弾性および弾塑性効果が含まれているものとする。

3.1 各部材の増分ひずみおよび増分後の軸力

仮想仕事の原理の適用について述べる前に、要素内の各部材の増分ひずみ $\Delta\varepsilon_K$ を単位要素の増分ひずみ $\Delta\varepsilon_x$ 、 $\Delta\varepsilon_y$ 、 $\Delta\gamma$ を用いて表現する必要がある。

3.1.1 糸材 A、B

縦糸部材 A の変形後の幾何形状を考える。

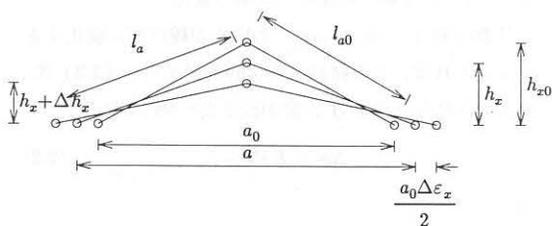


図 7. 糸材 A の幾何

図 7. より、増分前の部材 A の長さ l_A は

$$l_A = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_x^2} \quad (3.1)$$

となり、変形後の長さ \bar{l}_A は

$$\bar{l}_A = \sqrt{\left[\frac{a_0}{2}(1+\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_x)\right]^2 + (h_x+\Delta h_x)^2} \quad (3.2)$$

である。 $\Delta\varepsilon_x$ が微小と考えれば、(3.2) 式は次のように展開できる。

$$\bar{l}_A = l_A \left[1 + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Delta\varepsilon_x}{l_A^2 (1+\varepsilon_x)} + \frac{h_x \Delta h_x}{l_A^2} + \frac{(\Delta h_x)^2}{2l_A^2} \right] \quad (3.3)$$

したがって、部材 A の増分ひずみ $\Delta\varepsilon_A$ は次式のように得られる。

$$\Delta\varepsilon_A = \frac{\bar{l}_A - l_A}{l_{0A}} = \Delta\varepsilon_A^L + \Delta\varepsilon_A^N \quad (3.4)$$

ただし、

$$\Delta\varepsilon_A^L = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} \Delta\varepsilon_x + \frac{h_x}{l_A l_{0A}} \Delta h_x$$

$$\Delta\varepsilon_A^N = \frac{(\Delta h_x)^2}{2l_A l_{0A}}$$

同様にして、横糸部材 B の増分ひずみも得られる。

$$\Delta\varepsilon_B = \Delta\varepsilon_B^L + \Delta\varepsilon_B^N \quad (3.5)$$

ただし、

$$\Delta\varepsilon_B^L = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} \Delta\varepsilon_y + \frac{h_y}{l_B l_{0B}} \Delta h_y$$

$$\Delta\varepsilon_B^N = \frac{(\Delta h_y)^2}{2l_B l_{0B}}$$

3.1.2 コーティング材部材 C、D、E、F

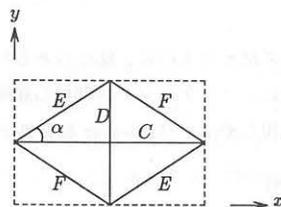


図 8. x-y 平面上の部材

図 8. に示されるように、コーティング材を表現する部材は x-y 平面上に配置されており、ひずみの二次元座標変換より $\Delta\varepsilon_C$ 、 $\Delta\varepsilon_D$ 、 $\Delta\varepsilon_E$ 、 $\Delta\varepsilon_F$ を得る。

$$\Delta\varepsilon_C = \Delta\varepsilon_x \quad (3.6)$$

$$\Delta\varepsilon_D = \Delta\varepsilon_y \quad (3.7)$$

$$\Delta\varepsilon_E = \cos^2 \alpha \Delta\varepsilon_x + \sin \alpha \cos \alpha \Delta\gamma + \sin^2 \alpha \Delta\varepsilon_y \quad (3.8)$$

$$\Delta\varepsilon_F = \cos^2 \alpha \Delta\varepsilon_x - \sin \alpha \cos \alpha \Delta\gamma + \sin^2 \alpha \Delta\varepsilon_y \quad (3.9)$$

また、それらの初期部材長は以下のように計算できる。

$$l_{0C} = a_0 \quad (3.10)$$

$$l_{0D} = b_0 \quad (3.11)$$

$$l_{0E} = \frac{1}{2} \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \quad (3.12)$$

$$l_{0F} = \frac{1}{2} \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \quad (3.13)$$

3.1.3 束材 V

束材は鉛直方向に配置されているので、縦、横クリンプ高の変化のみで増分ひずみ $\Delta\varepsilon_V$ を表現できる。

$$\Delta\varepsilon_V = \frac{\Delta h_x + \Delta h_y}{h_{x0} + h_{y0}} \quad (3.14)$$

以上で計 9本の部材の増分ひずみを求めたが、部材記号 K を有する部材の増分後の軸力は次式のようにまとめられる。

$$N_K = E_{TK} A_{0K} \Delta\varepsilon_K + (\sigma_{0K} + f_K) A_{0K} \quad (3.15)$$

なお、 f_K は粘弾性を考慮したときの見かけの応力を表す。

3.1.4 交点における回転バネ R_A 、 R_B

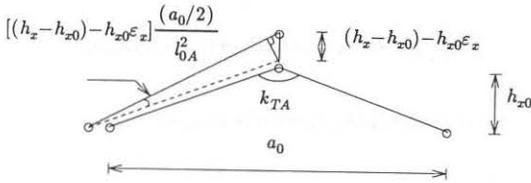


図 9. 縦系材の回転変形

$$\begin{aligned} & N_A \delta(\Delta\varepsilon_A) l_{0A} \\ & = N_A \delta(\Delta\varepsilon_A^L + \delta\varepsilon_A^N) l_{0A} \\ & = N_A \delta(\Delta\varepsilon_A^L) l_{0A} \end{aligned}$$

図9.に示される縦系部材の回転変形について考える。その時の回転バネの回転量 θ_A は

$$\theta_A = \frac{2(a_0/2)}{l_{0A}^2} [(h_x - h_{x0}) - h_{x0}\varepsilon_x] \quad (3.16)$$

として得られる。この状態からひずみおよびクリンプ高がわずかに $\Delta\varepsilon_x$ 、 Δh_x だけ変化したと考えると、増分回転量は次式となる。

$$\Delta\theta_A = \frac{a_0}{l_{0A}^2} [\Delta h_x - h_{x0}\varepsilon_x] \quad (3.17)$$

同様にして、横系部材増分回転量についても得られる。

$$\Delta\theta_B = \frac{b_0}{l_{0B}^2} [\Delta h_y - h_{y0}\varepsilon_y] \quad (3.18)$$

さらに、それぞれの回転量に対応する増分後の曲げモーメントを M_K とし、次式のように表現できる。

$$M_K = k_{TK} \Delta\theta_K + M_{0K} \quad (3.19)$$

ただし、 k_{TK} は回転バネの回転剛性、 M_{0K} は増分前の曲げモーメントである。

3.2 仮想仕事の原理による構成方程式の誘導

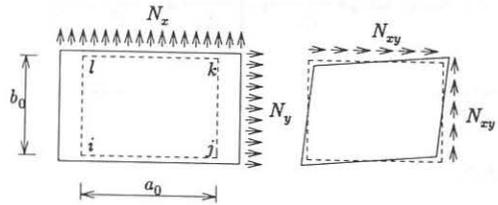


図 8. 単位要素の断面力

二次元要素 $ijkl$ を考え、増分後この要素に作用する断面力を N_x 、 N_y 、 N_{xy} とする。仮想増分ひずみ $\delta(\Delta\varepsilon_x)$ 、 $\delta(\Delta\varepsilon_y)$ 、 $\delta(\Delta\gamma)$ および仮想増分クリンプ高 $\delta(\Delta h_x)$ 、 $\delta(\Delta h_y)$ を仮定すると、断面力がなす仕事は

$$\delta W = a_0 b_0 [N_x \delta(\Delta\varepsilon_x) + N_y \delta(\Delta\varepsilon_y) + N_{xy} \delta(\Delta\gamma)] \quad (3.20)$$

と表せる。一方、上記の仮想仕事は単位要素内の部材軸力がなす仕事と等しいので、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 [N_x \delta(\Delta\varepsilon_x) + N_y \delta(\Delta\varepsilon_y) + N_{xy} \delta(\Delta\gamma)] \\ & = 2\delta(\Delta\varepsilon_A^L l_{0A}) N_A + 2\delta(\Delta\varepsilon_B^L l_{0B}) N_B \\ & \quad + 2[\delta(\Delta\varepsilon_A^N) (\sigma_{0A} + f_A) A_{0A} l_{0A}] \\ & \quad + 2[\delta(\Delta\varepsilon_B^N) (\sigma_{0B} + f_B) A_{0B} l_{0B}] \\ & \quad + \delta(\Delta\varepsilon_C l_{0C}) N_C + \delta(\Delta\varepsilon_D l_{0D}) N_D \\ & \quad + 2\delta(\Delta\varepsilon_E l_{0E}) N_E + 2\delta(\Delta\varepsilon_F l_{0F}) N_F \\ & \quad + \delta(\Delta\theta_A) M_A + \delta(\Delta\theta_B) M_B \\ & \quad + \delta(\Delta\varepsilon_V l_{0V}) N_V \end{aligned} \quad (3.21)$$

前節で得られた各部材の増分ひずみおよび軸力を代入し、 $\delta(\Delta\varepsilon_x)$ 、 $\delta(\Delta\varepsilon_y)$ 、 $\delta(\Delta\gamma)$ 、 $\delta(\Delta h_x)$ 、 $\delta(\Delta h_y)$ が任意であること、 $\Delta\varepsilon_x$ 等の 2次の項が微小であることを考慮すると、次式が得られる。ただし、 Δh_x 、 Δh_y につ

いては対応する外力がないので、0 となる。

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_x = & \\
& + \frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} (2E_{TA} A_{0A} l_{0A}) \left[\frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} \Delta \varepsilon_x + \frac{h_x}{l_A l_{0A}} \Delta h_x \right] \\
& + \cos^2 \alpha (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x + \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& + \cos^2 \alpha (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x - \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& + (E_{TC} A_{0C} l_{0C}) \Delta \varepsilon_x + \frac{a_0 h_{x0}}{l_{0A}^2} k_{TA} \left[\frac{a_0 h_{x0}}{l_{0A}^2} \Delta \varepsilon_x - \frac{a_0}{l_{0A}^2} \Delta h_x \right] \\
& + a_0 b_0 N_{x0} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_y = & \\
& + \frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} (2E_{TB} A_{0B} l_{0B}) \left[\frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} \Delta \varepsilon_y + \frac{h_y}{l_B l_{0B}} \Delta h_y \right] \\
& + \sin^2 \alpha (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x + \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& + \sin^2 \alpha (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x - \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& + (E_{TD} A_{0D} l_{0D}) \Delta \varepsilon_y + \frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} k_{TB} \left[\frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} \Delta \varepsilon_y - \frac{b_0}{l_{0B}^2} \Delta h_y \right] \\
& + a_0 b_0 N_{y0} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_{xy} = & \\
& + \sin \alpha \cos \alpha (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x + \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& - \sin \alpha \cos \alpha (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}) (\cos^2 \alpha \Delta \varepsilon_x - \sin \alpha \cos \alpha \Delta \gamma + \sin^2 \alpha \Delta \varepsilon_y) \\
& + a_0 b_0 N_{xy0} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_x}{l_A l_{0A}} (2E_{TA} A_{0A} l_{0A}) \left[\frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} \Delta \varepsilon_x + \frac{h_x}{l_A l_{0A}} \Delta h_x \right] \\
& + \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (E_{TV} A_{0V} l_{0V}) \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (\Delta h_x + \Delta h_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_0}{l_{0A}^2} k_{TA} \left[-\frac{a_0 h_{x0}}{l_{0A}^2} \Delta \varepsilon_x + \frac{a_0}{l_{0A}^2} \Delta h_x \right] \\
& + \frac{h_x}{l_A l_{0A}} \cdot 2(\sigma_{0A} + f_A) A_{0A} l_{0A} + \frac{1}{l_A l_{0A}} \cdot 2(\sigma_{0A} + f_A) A_{0A} l_{0A} \Delta h_x \\
& + \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (\sigma_{0V} + f_V) + \frac{a_0}{l_{0A}^2} M_{0A} = 0 \tag{3.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_y}{l_B l_{0B}} (2E_{TB} A_{0B} l_{0B}) \left[\frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} \Delta \varepsilon_y + \frac{h_y}{l_B l_{0B}} \Delta h_y \right] \\
& + \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (E_{TV} A_{0V} l_{0V}) \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (\Delta h_x + \Delta h_y) \\
& + \frac{b_0}{l_{0B}^2} k_{TB} \left[-\frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} \Delta \varepsilon_y + \frac{b_0}{l_{0B}^2} \Delta h_y \right] \\
& + \frac{h_y}{l_B l_{0B}} \cdot 2(\sigma_{0B} + f_B) A_{0B} l_{0B} + \frac{1}{l_B l_{0B}} \cdot 2(\sigma_{0B} + f_B) A_{0B} l_{0B} \Delta h_y \\
& + \frac{1}{h_{x0} + h_{y0}} (\sigma_{0V} + f_V) + \frac{b_0}{l_{0B}^2} M_{0B} = 0 \tag{3.26}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_{x0} = & \\
& + \frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} \cdot 2(\sigma_{0A} + f_A) A_{0A} l_{0A} + (\sigma_{0C} + f_C) A_{0C} l_{0C} \\
& + \cos^2 \alpha \cdot 2(\sigma_{0E} + f_E) A_{0E} l_{0E} + \cos^2 \alpha \cdot 2(\sigma_{0F} + f_F) A_{0F} l_{0F} \\
& - \frac{a_0 h_{x0}}{l_{0A}^2} M_{0A},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_{y0} = & \\
& + \frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} \cdot 2(\sigma_{0B} + f_B) A_{0B} l_{0B} + (\sigma_{0D} + f_D) A_{0D} l_{0D} \\
& + \sin^2 \alpha \cdot 2(\sigma_{0E} + f_E) A_{0E} l_{0E} + \sin^2 \alpha \cdot 2(\sigma_{0F} + f_F) A_{0F} l_{0F} \\
& - \frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} M_{0B},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 N_{xy0} = & \\
& + \sin \alpha \cos \alpha \cdot 2(\sigma_{0E} + f_E) A_{0E} l_{0E} - \sin \alpha \cos \alpha \cdot 2(\sigma_{0F} + f_F) A_{0F} l_{0F}
\end{aligned}$$

(3.27)

(3.25)、(3.26)式より Δh_x 、 Δh_y を求める事ができる。この結果を次のように略記する。

$$\Delta h_x = S_x + l_{zx} \Delta \varepsilon_x + l_{zy} \Delta \varepsilon_y \quad (3.28)$$

$$\Delta h_y = S_y + l_{yx} \Delta \varepsilon_x + l_{yy} \Delta \varepsilon_y \quad (3.29)$$

ただし、上式の係数 S_x, \dots, l_{yy} の式は省略する。 Δh_x 、 Δh_y を (3.22) ~ (3.24) 式に代入すると、求めるべき増分形構成方程式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{N}_{x0} \\ \bar{N}_{y0} \\ \bar{N}_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

ここで

$$a_0 b_0 D_{11} = \frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} (2E_{TA} A_{0A} l_{0A}) \left[\frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} + \frac{h_x l_{zz}}{l_A l_{0A}} \right]$$

$$+ \cos^4 \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) + \cos^4 \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F})$$

$$+ (E_{TC} A_{0C} l_{0C}) + \frac{a_0 h_{z0}}{l_{0A}^2} k_{TA} \left[\frac{a_0 h_{z0}}{l_{0A}^2} - \frac{a_0 l_{zz}}{l_{0A}^2} \right],$$

$$a_0 b_0 D_{12} =$$

$$+ \frac{(a/2)^2}{l_A l_{0A} (1+\varepsilon_x)} (2E_{TA} A_{0A} l_{0A}) \frac{h_x l_{zy}}{l_A l_{0A}}$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F})$$

$$- \frac{a_0 h_{z0}}{l_{0A}^2} k_{TA} \frac{a_0 l_{zy}}{l_{0A}^2},$$

$$a_0 b_0 D_{13} =$$

$$+ \sin \alpha \cos^3 \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) - \sin \alpha \cos^3 \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}),$$

$$a_0 b_0 D_{22} =$$

$$+ \frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} (2E_{TB} A_{0B} l_{0B}) \left[\frac{(b/2)^2}{l_B l_{0B} (1+\varepsilon_y)} + \frac{h_y l_{yy}}{l_B l_{0B}} \right]$$

$$+ \sin^4 \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) + \sin^4 \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F})$$

$$+ (E_{TD} A_{0D} l_{0D}) + \frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} k_{TB} \left[\frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} - \frac{b_0 l_{yy}}{l_{0B}^2} \right],$$

$$a_0 b_0 D_{23} =$$

$$+ \sin^3 \alpha \cos \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) - \sin^3 \alpha \cos \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}),$$

$$a_0 b_0 D_{33} =$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot (2E_{TE} A_{0E} l_{0E}) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot (2E_{TF} A_{0F} l_{0F}),$$

$$D_{ij} = D_{ji},$$

$$a_0 b_0 \bar{N}_{x0} =$$

$$+ \frac{(a/2)^2}{(1+\varepsilon_x) l_A l_{0A}} (2E_{TA} A_{0A} l_{0A}) \frac{h_x s_x}{l_A l_{0A}} - \frac{a_0 h_{z0}}{l_{0A}^2} k_{TA} \frac{a_0 s_x}{l_{0A}^2},$$

$$a_0 b_0 \bar{N}_{y0} =$$

$$+ \frac{(b/2)^2}{(1+\varepsilon_y) l_B l_{0B}} (2E_{TB} A_{0B} l_{0B}) \frac{h_y s_y}{l_B l_{0B}} - \frac{b_0 h_{y0}}{l_{0B}^2} k_{TB} \frac{b_0 s_y}{l_{0B}^2},$$

$$a_0 b_0 \bar{N}_{xy0} = 0$$

(3.31)

求められた増分形の構成方程式 (3.29) を用いれば、断面力 N_x 、 N_y 、 N_{xy} に対して、増分ひずみ $\Delta \varepsilon_x$ 、 $\Delta \varepsilon_y$ 、 $\Delta \gamma$ が求められる。求められた $\Delta \varepsilon_x$ 、 $\Delta \varepsilon_y$ に対して式 (3.27)、(3.28) から Δh_x 、 Δh_y が計算できるので、新しい形状が決定しうる。ここで確認しておくべきことは、増分前の要素の等価断面力は N_{x0} 、 N_{y0} 、 N_{xy0} であるが、 $\Delta \varepsilon_x$ 、 $\Delta \varepsilon_y$ 、 $\Delta \gamma$ に関する増分形構成式をたてたとき、エネルギー的に得られた等価断面力がクリンプ交換が原因して $N_{x0} + \bar{N}_{x0}$ 、 $N_{y0} + \bar{N}_{y0}$ 、 N_{xy0} となることである。

4. 構成式に基づく数値計算例

4.1 単位要素のパラメータの決定

一般に膜材は、用途に応じて選択され、それぞれ長所と短所を持っている。膜構造でよく用いられる膜材 A 種、B 種および C 種については、小松らによりその

断面形状が電子顕微鏡によって観察された。その断面形状と同論文の引張試験結果による膜材の力学的挙動は、高い相関関係を持つ傾向にある。特に、高い破断強度が期待されるような膜材 A 種は、単位幅当たりの糸の密度が高く、結果として糸の初期ゆるみも大きくなる。本節はその膜材 A 種を対象に、単位要素のパラメータの定め方を考える。なお、縦および横糸ピッチ a_0 、 b_0 は小松ら^[5]による測定値を用いることにし、各部材の断面積は同文献の詳細図により推定した。

4.1.1 引張剛性を支配するパラメータ

束材 V が代表する糸の交点における弾塑性的な変形メカニズムは複雑であり、引張試験のみでは把握できない部分がある。しかしながら、縦と横糸の材料非線形性、クリンプ交換が非線形性の大半を占めると仮定すれば、束材 V の役割はクリンプ交換を引き起こすことにあると想定されるので、剛体に近い剛性が必要となる。

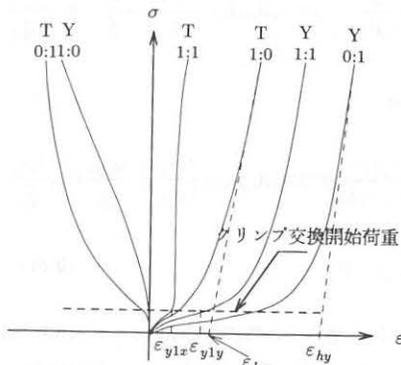


図 10. 膜材 A 種の引張試験結果^[5]

図 10. は小松らによる荷重比 1:1、1:0、0:1 の引張試験結果を示す。同図より、膜材の挙動はクリンプ交換前領域とクリンプ交換領域とに大別できる。クリンプ交換前領域における引張剛性は、糸の初期ゆるみがまだ存在している領域であるので、コーティング材の剛性に左右される領域となる。したがって、部材 C、D の剛性はその領域における縦および横方向の引張剛性より得られる。

糸材 A、B について定める必要のあるパラメータは、図 3. における初期ゆるみ時の剛性 E_1 、常時の剛性 E_2 およびゆるみ量 ε_{y1} である。常時の剛性は、膜材の高い荷重レベルの一軸引張における剛性より推定できる。また、荷重比 1:1 の二軸引張試験において、クリンプ

交換が発生しはじめる時点が初期ゆるみがなくなった点と考えられるので、その時点のひずみ ε_{y1z} 、 ε_{y1y} で図 3. における縦糸と横糸のゆるみ量 ε_{y1} に近似できる。さらに、糸がゆるんでいる時の剛性 E_1 は非常に小さいと考えられる。

以上のパラメータが決定された後、両方向の一軸引張状態を想定し、縦糸と横糸が一直線に伸びた状態のひずみを ε_{hz} 、 ε_{hy} とすると、クリンプ高 h_{z0} 、 h_{y0} は (4.1)、(4.2) 式より推定できる。

$$h_{z0} = \frac{a_0}{2} \sqrt{\left[\frac{1 + \varepsilon_{hz}}{1 + \varepsilon_{y1z}} - 1 \right]} \quad (4.1)$$

$$h_{y0} = \frac{b_0}{2} \sqrt{\left[\frac{1 + \varepsilon_{hy}}{1 + \varepsilon_{y1y}} - 1 \right]} \quad (4.2)$$

ただし、 ε_{hz} 、 ε_{hy} は、両方向の一軸引張試験より、高い荷重レベルにおける剛性の接線が横軸を交差するひずみ量とする。

4.1.2 セン断剛性を支配するパラメータ

ブレース材 E、F の剛性が直接せん断剛性を左右するので、せん断試験の結果に基づいて (3.29) 式を用いてブレース材の剛性が定められる。

なお、曲げバネは本解析では用いない。

4.1.3 各部材の諸定数の特定方法

4.1.1、4.1.2 を議論してきたように、本モデルを用いる場合には、各部材の諸定数を適切に決定しなければならない。精度のある諸定数を定めるには、非線形挙動に関するシステムアイデンティフィケーション法を開発する必要があることは言うを待たないが、これについては別稿で報告の予定である。

4.2 数値計算例

膜材 A 種を対象とした単位要素のパラメータを以下のように仮定し、それに基づく数値計算を行なう。なお、表中に (×) が示されているが、この場合解析では、このデータを必要とする変形領域には材が到達しないと仮定して、結果を求めていることを断っておく。その結果を、小松ら^[5]の 5 ケースの荷重比の試験結果と比較し、図 11.1~11.5 に示した。

形状パラメータ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.1138 \text{ cm} & b_0 &= 0.0921 \text{ cm} \\ h_{z0} &= 0.0098 \text{ cm} & h_{y0} &= 0.0135 \text{ cm} \end{aligned}$$

部材パラメータ :

$E_2 A_0$
288 kg
592
60
30
2.8
2.8
80

部材	$A_0(\text{cm}^2)$	$E_1(\text{kgf/cm}^2)$	$E_2(\text{kgf/cm}^2)$	$E_3(\text{kgf/cm}^2)$	$\varepsilon_{y1}(\%)$	$\varepsilon_{y2}(\%)$
A	1.6×10^{-3}	1.8×10^3	1.8×10^5	×	1.1	×
B	1.6×10^{-3}	3.7×10^3	3.7×10^5	×	2.2	×
C	2.0×10^{-3}	1.0×10^5	3.0×10^4	1.0×10^4	0.02	0.2
D	2.0×10^{-3}	1.0×10^5	1.5×10^4	5.0×10^3	0.02	0.5
E	1.4×10^{-3}	2.0×10^3	×	×	×	×
F	1.4×10^{-3}	2.0×10^3	×	×	×	×
V	2.5×10^{-2}	3.2×10^3	×	×	×	×

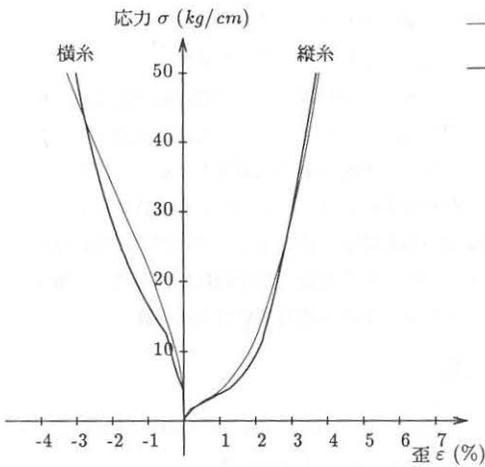


図 11.1 縦方向一軸引張

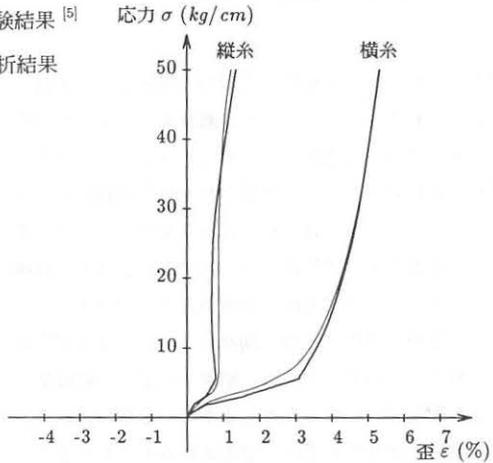


図 11.3 二軸引張 (荷重比 1:1)

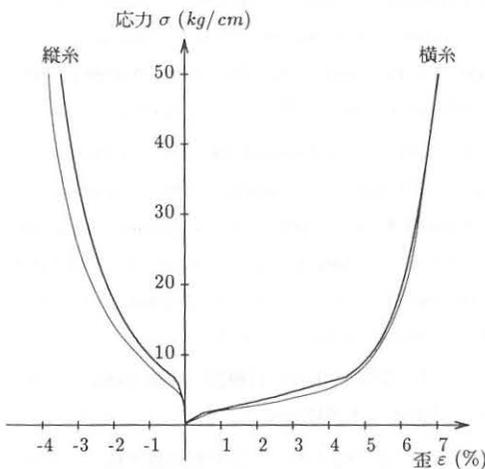


図 11.2 横方向一軸引張

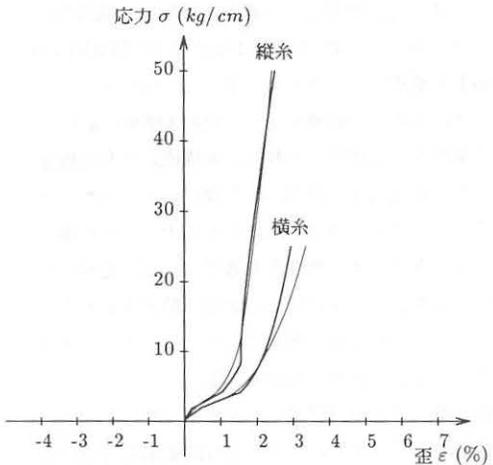


図 11.4 二軸引張 (荷重比 2:1)

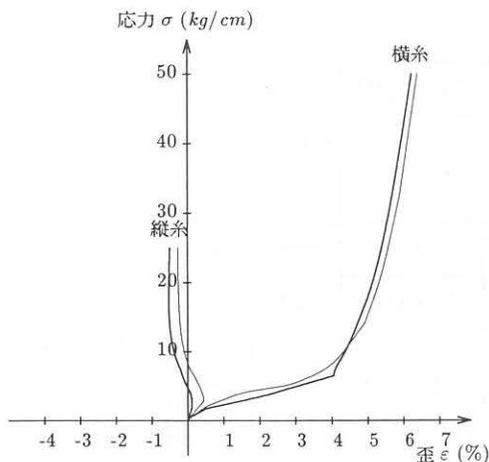


図 11.5 二軸引張 (荷重比 1:2)

以上の比較より、対象とする膜材の挙動を良く追跡できたと思われるが、いくらかかけ離れている部分が存在している。その主な原因は二つ考えられ、一つは弾塑性的な材料非線形性を区分的な限られた数の直線にモデル化したこと、もう一つは交点における変形メカニズムを糸の初期ゆるみとして処理したことである。また、提案したパラメータの決定方法よりおおよそのパラメータは推定できるが、中には糸の初期ゆるみのような推定しにくいものもあるので、より良い結果を得るためには微調整する論理展開が必要となり、また材料定数のばらつきを考えれば、統計的な手法が要求されると思われる。

5. あとがき

本論文は、有限要素法への適用を目指して織構造格子モデルを導入し、第 3 章では単位要素の構成則 (D Matrix) を誘導した。さらに、第 4 章ではモデルのパラメータの定め方の概略を示し、膜材 A 種を対象とした数値計算例を試験結果と比較し、本構成則の有効性を実証した。本論文より誘導された構成則はせん断変形を考慮していないため、せん断変形の大きい変形場へ適用するときは、せん断変形を考慮した定式化が必要となる。なお、モデルに用いる定数の精密な定め方については、非線形挙動に関するシステムアイデンティフィケーションの開発が必要とする。

数値計算例では単位要素レベルのみの結果を示したが、構造解析レベルでは、二次元有限要素の各積分点に提案された単位要素を組み込んだ形で適用する。一

般に膜材は、強い面内剛性をもっているが、それに比べると面外剛性は非常に弱く、構造物レベルでは大変形を起こす場合がほとんどである。したがって、本論文より提案された手法を用いる場合、構造レベルの大変形および積分点における単位要素の大変形の両者を考慮しながら解析する必要がある。また、粘弾性特性に関する解析は、実験データを収集したのち今後実行する予定である。

謝辞

本研究は、平成 4 年度能村膜構造技術振興財団の研究助成 (研究代表者: 加藤史郎) を受けて実施された成果であり、ここに能村膜構造技術振興財団に深く感謝の意を表します。

膜構造に関する興味を日頃から与えていただいている多くの方々のうち、特に構造形式についてご指導いただいた太陽工業磯野義人氏、膜構造研究論文集を通して研究の方向を与えていただいた横浜国立大学教授石井一夫博士、太陽工業小松清博士、また、研究の遂行にあたり研究にご協力いただいた豊橋技術科学大学助教授山田聖志博士、徳山工業高等専門学校助教授原隆博士、石川工業高等専門学校助教授石川浩一郎博士、豊橋技術科学大学助手高島英幸博士に感謝します。

参考文献

- 1) F.T.Peirce, The Geometry of Cloth Structure, J. Textile inst., 28, T 45 (1937-3)
- 2) G.Menges, B.Meffert, P.Geisbusch, Spannungs-Deformations- und Versagensverhalten PVC-beschichteter Polyestergewebe unter einachsiger und biaxialer Beanspruchung, Int. Sym. Weitgespannte Flachentragwerke, SFB-64, Univ. Stuttgart, 1976
- 3) H.J.Schock, Some General Remarks on the Structural Behavior and Load-Extension Characteristics of Coated Fabrics with Special Reference to PTFE-Coated Glass-Fiber Fabric, Proc. of the Structural Congress'89, Applications of Tension Structures ASCE, San Francisco, May, 1989
- 4) 石井一夫、膜構造用膜材料概説、膜構造研究論文集 '92、(社)日本膜構造協会、1992
- 5) 小松清、局部破断を有する膜材料の織り構造モデルによる応力変形シミュレーション、膜構造研究論文

集 '92、(社)日本膜構造協会、1992

6) 南宏和、クラックを有するコーティング織布の強度、日本複合材料学会誌、4、2(1978)

7) 山田嘉昭、有限要素法の基礎と応用シリーズ6—
塑性：粘弾性、培風館、1980

FORMULATION OF THE CONSTITUTIVE EQUATION OF MEMBRANE MATERIAL
SHOWING A MATERIAL NONLINEARITY

— Fabric Lattice Model —

Shiro KATO *1

Petch PONGPO *2

Synopsis

Membrane material is an anisotropic material including material high nonlinearity. Therefore, a contradiction will occur if it is treated as an isotropic elastic material. There have been many efforts to avoid this contradiction, and the method that seems to be the most desirable is to adopt the fabric lattice model. However, to directly analyze such membrane material modeled by the lattice model is not appropriate in practice. In this paper, the constitutive equations based on this model which could be applied in the finite element method will be derived. Because of introducing this procedure, it is expected that treatment of a material nonlinearity will be easier in large membrane structures.

*1 Professor, Department of Regional Planning, Faculty of Engineering, Toyohashi University of Technology

*2 Student of Master Course, Department of Regional Planning, Faculty of Engineering, Toyohashi University of Technology