捩りを受ける円形張力膜のしわ後挙動解析

宮村倫司 *1
半谷裕彦 *2

梗概

張力膜構造において発生するしわが、発生後にどのような挙動を示すのかを解析する。ここでは、しわを分岐座屈による変形と考え、有限要素法による大変形解析を行う。しわの詳細な形状を解析するため、膜を薄肉の板であると考える。膜の面外方向の剛性として初期張力による幾何剛性だけではなく、曲げ剛性も考慮する。

例題として、張力の入った円形膜を面内に捩る場合に発生するしわを取り上げる。最初に非線形釣合方程式の誘導を行い、次にその数値解析法を示す。しわ発生点すなわち分岐点は固有値解析によって求め、しわ発生後の挙動は、強制変位型の修正荷重増分法によって追跡する。

1 はじめに

膜構造において、初期張力の導入および外力の作用に伴うしわの発生は設計要因のひとつとなる。張力膜に発生するしわの研究はこれまでにも数多くなされてきた。なかでも張力場理論は代表的な考え方のひとつである [1] 。特定のモデルに対しては理論解が求められており、また、張力場理論に基づく数値解析法もいくつか提案されている[4]-[6] 。しわの発生によるしわと直交方向の剛性低下を、その方向の材料定数を変化させることで表現している例が多い。つまり、しわの発生している状態では、直交異方性であると考えるわけである。古典的な張力場理論では、膜面全体にしわが発生している状態のみを解析しているのに対し、部分的な領域に発生するしわの理論的解析法も提案されている[2][3] 。

一方、しわの詳細な形状までも解析するために、しわを座屈による変形と考え大変形解析を行うという方法が提案されている[8]-[12] 。著者らもこの考え方に基づき、面内捩りを受ける円形張力膜に発生するしわの分岐解析を行ってきた [15][16] 。そこでは、発生するしわをせん断分岐座屈による変形と考え、しわの発生荷重と発生点におけるモードを求めている。解析手法として有限要素法を利用しており、しわの発生点、すなわち、接線剛性行列の最小固有値が0となる点を、固有値解析と中点法を組合わせることで計算した。また、固有値0に対応する固有ベクトルよりしわの発生点におけるモードを求めた。これまでの解析でしわの発生荷重とそのモードは、初期張力、膜の曲げ剛性、ポアソン比等に依存することがわかっている。特に、膜の曲げ剛性は、しわの形状を求める問題の場合には無視できない。従って、しわ発生後の挙動解析においても、膜は初期張力による幾何剛性と同時に、曲げ剛性も持つと考える。

なお、面内捩りを受ける円形張力膜のしわの問題は、古典的なものであり、張力膜のしわの解析における標準的な例題となっている。

*1 東京大学　大学院
*2 東京大学生産技術研究所　教授

本論文の目的は、分岐経路の追跡によりしわ発生後の挙動を明らかにすることである。解析するのは、先に述べた面内振りを受ける円形張力膜である。ここでも、解法として有限要素法を利用する[13]。最初に接線剛性行列の固有値解析によりしわ発生点を求める。次に、固有値0に対応する固有ベクトルを用いて分岐経路への切り換えを行い、修正荷重増分法により分岐経路を追跡する。

2　解析モデル

図1.のように円形膜の中心に剛体の円盤を取り付け、膜の外周を半径方向に一様に引張ることにより初期張力を導入する。次に、振りモーメント M_t を与えることで、面内方向にこの円盤を強制回転させる。膜の材料は等方弾性体、また、膜は薄肉の板であると仮定する。この時、膜面に発生するしわについて解析する。

なお、数値解析において、初期張力は円形膜の外周境界を半径方向に強制変位させることで導入し、振りは中央の円盤の境界を接線方向に強制変位することにより表す。

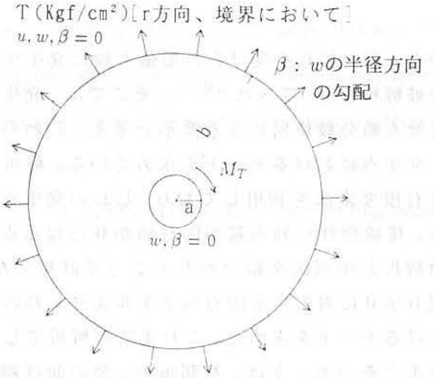

図1.解析モデル

3　有限要素法による非線形釣合方程式の誘導

図2.のようなリング型有限要素による有限要素法を用いる。座標系は極座標系である。パラメーター　r、s、ξ、l、θ　は図のようになっている。

3-1　歪-変位関係

初期張力の導入および振りによる面内変位が、微小な範囲で解析を行うこととする。従って、膜の中央面の

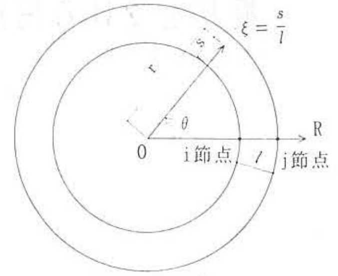

図2.有限要素

歪として、次のような極座標系によって表現したGreen歪において、面内変位に関する非線形項を省略したものを用いる。

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{3-1}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \tag{3-2}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{3-3}$$

ここに、u は半径方向変位、v は接線方向変位、w は面外変位である。また、次のような線形化された曲率を用いる。

$$\kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{3-4}$$

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{3-5}$$

$$\tau = 2\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{3-6}$$

式(3-1)～式(3-3)からわかるように、しわが発生して面外変位 w が生じるまでは、歪は線形であるので、しわ発生点を求める問題は線形固有値問題に帰着されることになる。

3-2　形状関数

変位に関して次のような形状関数を仮定する。円周方向には波数 n の三角関数、および、半径方向には代数関数による補間関数を用いている。

$$u = u^{(0)}(\xi) + u_s^{(n)}(\xi)\sin n\theta + u_c^{(n)}(\xi)\cos n\theta \quad (3\text{-}7)$$

$$v = v^{(0)}(\xi) + v_s^{(n)}(\xi)\sin n\theta + v_c^{(n)}(\xi)\cos n\theta \quad (3\text{-}8)$$

$$w = w_s^{(n)}(\xi)\sin n\theta + w_c^{(n)}(\xi)\cos n\theta \quad (3\text{-}9)$$

ここに、$u^{(0)}$ 、$v^{(0)}$ 、$u_s^{(n)}$ 、$u_c^{(n)}$ 、$v_s^{(n)}$、$v_c^{(n)}$は 1 次の補間関数であり、$w_s^{(n)}$ 、$w_c^{(n)}$ は 3 次の補間関数である。節点の正弦関数、余弦関数に対する変位と勾配および一様変位が未知量である。右上の添字 (0) は一様変位を表しており、(n) は n 波に対応する変位を表している。半径方向の一様変位 $u^{(0)}$ は初期張力を導入するため、接線方向の一様変位 $v^{(0)}$は捩りによる変位を表すためのものである。

3-3 エネルギー積分と釣合方程式

膜の中央面の歪を ε_i、応力を σ_i と表せば、応力-歪関係は次の形式となる。

$$\sigma_i = E_{ij}\varepsilon_j \quad (3\text{-}10)$$

従って、歪エネルギー積分は、

$$U = \frac{1}{2}\int \sigma_i \varepsilon_i dV = \frac{1}{2}\int E_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j dV \quad (3\text{-}11)$$

となる。式 (3-1) ~ (3-3) に式 (3-7) ~ (3-9) を代入し、歪を未知節点変位により表せば、式 (3-11) は次のような形式で表される。

$$\begin{aligned} U = {} & U_{1kl}^{(00)} D_k^{(0)} D_l^{(0)} + U_{1mn}^{(nn)} D_m^{(n)} D_n^{(n)} \\ & + U_{2kpq}^{(0nn)} D_k^{(0)} D_p^{(n)} D_q^{(n)} \\ & + U_{3pqrs}^{(nnnn)} D_p^{(n)} D_q^{(n)} D_r^{(n)} D_s^{(n)} \end{aligned} \quad (3\text{-}12)$$

ここに、$D_k^{(0)}$は一様な未知節点変位、$D_m^{(n)}$ は n 波に対応する未知節点変位である。添字については総和規約に従う。また、積分は数値積分により求める。$D_k^{(0)}$、$D_m^{(n)}$ について式 (3-12) の変分をとり、荷重項を加えて停留条件を求めれば、要素レベルでの釣合方程式、

$$k_{kl}^{(00)} D_l^{(0)} + k_{kmn}^{(0nn)} D_m^{(n)} D_n^{(n)} = -\Lambda p_k^{(0)} \quad (3\text{-}13)$$

$$\begin{aligned} & k_{mn}^{(nn)} D_n^{(n)} + k_{mnk}^{(nn0)} D_n^{(n)} D_k^{(0)} + k_{mnpq}^{(nnnn)} D_n^{(n)} D_p^{(n)} D_q^{(n)} \\ & = -\Lambda p_m^{(n)} \end{aligned} \quad (3\text{-}14)$$

が得られる。ここに式 (3-13) は荷重の軸対称成分に対応し、式 (3-14) は非軸対称成分に対応している。要素における釣合方程式を重ね合わせることにより、全体系の釣合方程式を求めることができる。

4 増分型釣合方程式の誘導と修正荷重増分法の定式化

この節では式 (3-13)、(3-14) を増分型に変形し、この増分型釣合方程式を線形化する。しわ発生前には歪が線形であることから、分岐点を求める解析は線形固有値問題となる。そのためしわ発生前には、未知量には非線形項による誤差は含まれない。一方、しわ発生後には面外変位によって幾何学的非線形性が現れるので、線形化による誤差が生じる。この誤差を解消するために修正荷重増分法を用いることとし、その基礎式を導く。なお、主経路から分岐経路への切り換え法は次節で説明する。

4-1 増分型釣合方程式

式 (3-13)、(3-14) は連立非線形方程式なので、このままでは解けない。そこで、この式を増分型に変形する。ある増分ステップにおける釣合点の変位と荷重パラメーターが $(D_l^{(0)}, D_m^{(n)}, \Lambda)$ であったとする。この変位に誤差が含まれている場合、次のような残差（不釣合い力）が発生する。

$$e_k^{(0)} = -\Lambda p_k^{(0)} - k_{kl}^{(00)} \quad D_l^{(0)} - k_{kmn}^{(0nn)} D_m^{(n)} D_n^{(n)} \quad (4\text{-}1)$$

$$\begin{aligned} e_m^{(n)} = {} & -\Lambda p_m^{(n)} - k_{mn}^{(nn)} D_n^{(n)} - k_{mnk}^{(nn0)} D_n^{(n)} D_k^{(0)} \\ & - k_{mnpq}^{(nnnn)} D_n^{(n)} D_p^{(n)} D_q^{(n)} \end{aligned} \quad (4\text{-}2)$$

増分 $(d_l^{(0)}, d_m^{(n)}, \lambda)$ を現ステップの変位に加え、その点における釣合方程式を残差の式 (4-1)、(4-2) を用いて変形すれば、残差を含んだ形の増分型釣合方程式、

$$\bar{k}_{kl}^{(00)} d_l^{(0)} + \bar{k}_{kn}^{(0n)} d_n^{(n)} + \bar{k}_{kmn}^{(0nn)} d_m^{(n)} d_n^{(n)} = e_k^{(0)} - \lambda p_k^{(0)} \quad (4\text{-}3)$$

$$\begin{aligned} & \bar{k}_{mk}^{(n0)} d_k^{(0)} + \bar{k}_{mn}^{(nn)} d_n^{(n)} + \bar{k}_{mnk}^{(nn0)} d_n^{(n)} d_k^{(0)} + \bar{k}_{mnp}^{(nnn)} d_n^{(n)} d_p^{(n)} \\ & + \bar{k}_{mnpq}^{(nnnn)} d_n^{(n)} d_p^{(n)} d_q^{(n)} = e_m^{(n)} - \lambda p_m^{(n)} \end{aligned} \quad (4\text{-}4)$$

を導くことができる。この式は増分変位 $(d_l^{(0)}, d_m^{(n)}, \lambda)$ について非線形であるので、増分は微小であるとして線形化する。行列形式で書けば、

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kl}^{(00)} & \bar{k}_{kn}^{(0n)} \\ \bar{k}_{ml}^{(n0)} & \bar{k}_{mn}^{(nn)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_l^{(0)} \\ d_n^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_k^{(0)} \\ e_m^{(n)} \end{Bmatrix} - \lambda \begin{Bmatrix} p_k^{(0)} \\ p_m^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}5)$$

となる。ここに、

$$\bar{k}_{kl}^{(00)} = k_{kl}^{(00)} \quad (4\text{-}6)$$

$$\bar{k}_{kn}^{(0n)} = \left(k_{kmn}^{(0nn)} + k_{knm}^{(0nn)}\right) D_m^{(n)} \quad (4\text{-}7)$$

$$\bar{k}_{ml}^{(n0)} = k_{mnl}^{(nn0)} D_n^{(n)} \tag{4-8}$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_{mn}^{(nn)} &= k_{mn}^{(nn)} + k_{mnk}^{(nn0)} D_k^{(0)} \\ &+ \left(k_{mpnq}^{(nnnn)} + k_{mnpq}^{(nnnn)} + k_{mqpn}^{(nnnn)}\right) D_p^{(n)} D_q^{(n)}\end{aligned} \tag{4-9}$$

4-2　強制変位型への変形

ここでは、中央の円盤の境界に接線方向変位 v を与えることで、近似的に捩りを表す。強制変位は一様変位であるから d_1^0 と表し、その他の変位を $\mathbf{d}_2^0$ 、$\mathbf{d}^n$ と表せば、式(4-5)は、

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{00} & \mathbf{K}_{12}^{00} & \mathbf{K}_{13}^{0n} \\ \mathbf{K}_{21}^{00} & \mathbf{K}_{22}^{00} & \mathbf{K}_{23}^{0n} \\ \mathbf{K}_{31}^{n0} & \mathbf{K}_{32}^{n0} & \mathbf{K}_{33}^{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^0 \\ \mathbf{d}_2^0 \\ \mathbf{d}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1^0 \\ \mathbf{e}_2^0 \\ \mathbf{e}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta R_1^0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{4-10}$$

と書くことができる。ここに、ΔR_1^0 は増分変位 d_1^0 に対応する反力の増分であり、捩りモーメント M_t の増分に相当する。この式は次の2式に分離できる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{00} & \mathbf{K}_{13}^{0n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_2^0 \\ \mathbf{d}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta R_1^0 \end{Bmatrix} \tag{4-11}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21}^{00} \\ \mathbf{K}_{31}^{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{00} & \mathbf{K}_{23}^{0n} \\ \mathbf{K}_{32}^{00} & \mathbf{K}_{33}^{0n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_2^0 \\ \mathbf{d}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_2^0 \\ \mathbf{e}^n \end{Bmatrix} \tag{4-12}$$

捩りモーメント M_tは元の釣合方程式(3-13)、(3-14)から計算するので、式(4-11)は使わない。式(4-12)は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{00} & \mathbf{K}_{23}^{0n} \\ \mathbf{K}_{32}^{n0} & \mathbf{K}_{33}^{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_2^0 \\ \mathbf{d}^n \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21}^{00} \\ \mathbf{K}_{31}^{n0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_2^0 \\ \mathbf{e}^n \end{Bmatrix} \tag{4-13}$$

と変形できて、これを

$$\mathbf{K}_a(\mathbf{D})\mathbf{d} = -\mathbf{K}_b(\mathbf{D})\mathbf{d}_1^0 + \mathbf{e} \tag{4-14}$$

と表すと、

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_a(\mathbf{D})^{-1}\{-\mathbf{K}_b(\mathbf{D})\mathbf{d}_1^0 + \mathbf{e}\} \tag{4-15}$$

というように増分変位 $\mathbf{d}$ を求めることができる。式(4-13)が強制変位型の場合の修正荷重増分法の基礎式となる。

5　分岐点と、分岐経路への切り換え

ここで発生するしわの発生機構は、軸力を受ける柱がEuler座屈により曲がることと同様に説明できる。先にも述べたように、解析モデルはしわ発生前には線形である。しかし、しわ発生前においても接線剛性行列の中には面内応力と、面内歪の面外変位による非線形項との連成項が含まれており、この部分が非線形となっている。接線剛性行列の行列式が0となる分岐点において、この非線形項の影響が現れ、この時点でしわが発生することになる。

5-1　分岐点の求め方

式(4-5)の増分変位ベクトルの係数行列を $\mathbf{K}_T$ とおく。しわが発生する前には、面外変位 w は0なので、$\bar{k}_{kn}^{(0n)} = 0$、$\bar{k}_{ml}^{(n0)} = 0$ でありまた、$\bar{k}_{kl}^{(00)} = k_{kl}^{(00)}$ 、$\bar{k}_{mn}^{(nn)} = k_{mn}^{(nn)} + k_{mnk}^{(nn0)} D_k^{(0)}$ である。従って、

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \bar{k}_{kl}^{(00)} & 0 \\ 0 & \bar{k}_{mn}^{(nn)} \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

となる。歪がしわ発生前には線形であることから、未知変位も捩りの強制変位に対して線形である。従って、初期張力による変位ベクトルを $\mathbf{D}_{INT}$ 、式(4-13)の変位 $d_1^0 = 1$ に対応する面内捩りによる変位モードベクトルを $\mathbf{D}_0$ とすれば、変位ベクトルは、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{INT} + \mu\mathbf{D}_0 \tag{5-2}$$

となる。ここに、μ は強制変位のパラメーターである。$\mathbf{K}_T$ は変位ベクトル $\mathbf{D}$ の関数であることから、パラメーター μ の関数となる。$\mathbf{K}_T$ を特異にするような μ が、しわ発生点における中央の円盤の接線方向変位となる。固有値解析と中点法を組み合わせることによって、この点を見つけることができる。また、形状関数に用いた三角関数の波数 n は、最小のしわ発生荷重を与える n を採用することで決定する。

なお、本解析では、周方向の形状関数に正弦関数と余弦関数の両方を用いているため、全ての固有値は2個ずつ対になっている。従って、固有値の種類は系の自由度数の半分である。最小固有値も2個存在するので、固有値0に対応する固有ベクトルは2個あることになる。物理的には、本モデルが軸対称であり周方向に位相のずれたしわはどれでも存在し得るということに対応する。最小固有値に対応する2つの固有ベクトルの線形結合により、位相のずれた全てのしわ発生モードが表せるわけである。

5-2　分岐経路への切り換え

本解析のしわの発生点は、しわの形態から明らかに対称分岐点である。従って、分岐経路の分岐点における接線ベクトルは固有値0に対応する固有ベクトルと一致する。先に述べたように、固有値0に対応する固有ベクトルは2個あるが、ここではその中の1つのみを用いる。分岐点を求めた直後の第1ステップの増分として、固有ベクトルに適当な係数をかけたものを与えることにより、分岐経路へ切り換えることができる。

フローチャート

エネルギー積分を数値積分により求める。
↓
剛性行列の組立。
↓
捩りによる変位のモードを計算。
↓
初期張力による変位を求める。
↓
幾何剛性行列の組立。
↓
固有値解析、中点法により分岐点および分岐点におけるしわのモードを求める。
↓
第1ステップの増分を固有ベクトルより与える。
↓
第1ステップの変位を計算。
↓
現ステップ変位より残差ベクトルを求める。
↓
現ステップ変位より、強制変位による荷重項を計算。
↓
現ステップ変位より、接線剛性行列を求める。
↓
次ステップの増分変位の計算。
↓
次ステップの変位の計算。

6　数値解析例

表1.の諸元とする。

表1. 諸元

ヤング率　E	6000 kgf/cm ^{2}
ポアソン比　ν	0.4
中央円盤の半径 a	25cm
円形膜の半径 b	160cm
膜の厚さ t	0.1cm
初期張力(外周境界の半径方向で)	10kgf/cm ^{2}

要素分割は図3.のように、半径方向に28等分割とする。

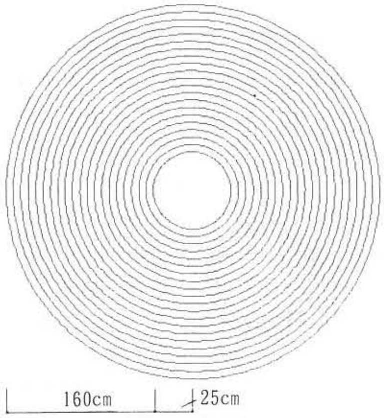

図3.　要素分割

6-1　分岐解析の結果

図4.は、しわの波数としわ発生荷重の関係である。この図からわかるように、$n=12$が最小のしわ発生荷重を与えていることがわかる。従って、この波数を採用して分岐経路の追跡、すなわち、しわ後挙動の解析を行う。

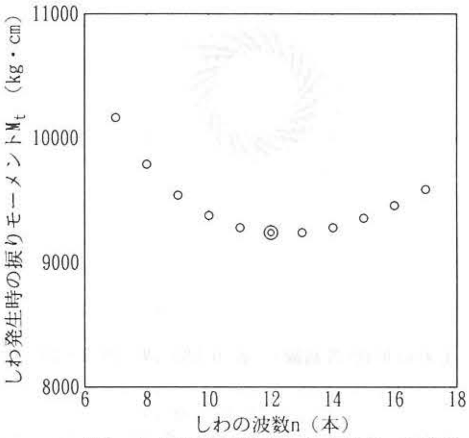

図4.　しわ発生荷重としわの波数nの関係

6-2　しわ後挙動の解析

分岐経路への切り換え時には、成分の最大値が1となるように規準化した、固有値0に対応する固有ベクトルに、係数0.002をかけたものを用いる。また、中央円盤の接線方向の強制増分変位は0.002cmとした。

図5.～8.は発生したしわの等高線図である。図9.,10.はそれぞれ図5.,8.の鳥瞰図である。鳥瞰図は変位を拡大して描いている。図5.は、しわ発生点すなわち分岐点におけるモードである。図5.から図8.にかけて、中

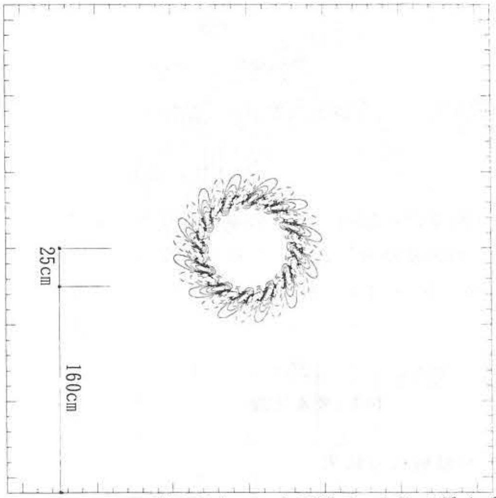

図5. しわの形状(等高線)　ϕ=0.305°, M_t=9.2×10^3 kgf・cm

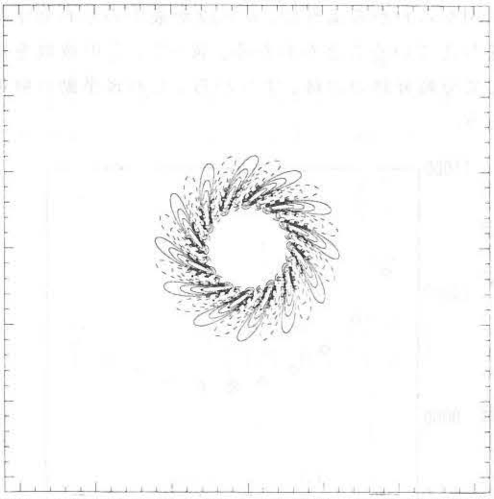
図6. しわの形状(等高線)　ϕ=0.580°, M_t=16.3×10^3 kgf・cm

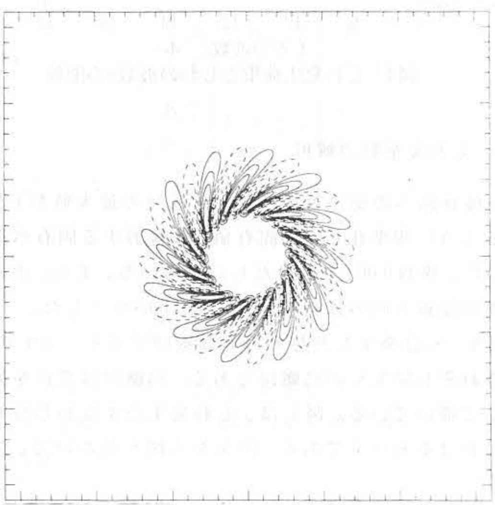
図7. しわの形状(等高線)　ϕ=0.855°, M_t=23.1×10^3 kgf・cm

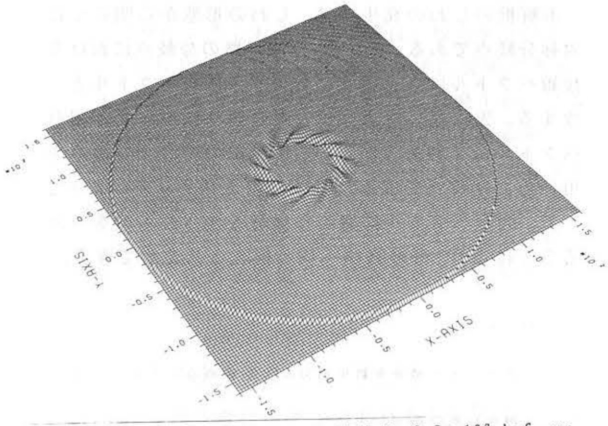

図9. しわの形状(鳥瞰図)　ϕ=0.305°, M_t=9.2×10^3 kgf・cm

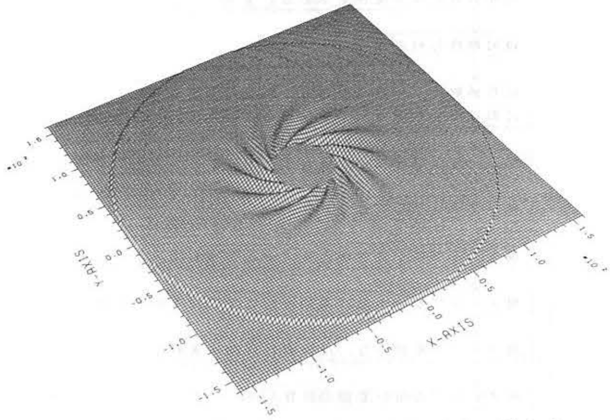

図10. しわの形状(鳥瞰図)　ϕ=1.135°, M_t=29.8×10^3 kgf・cm

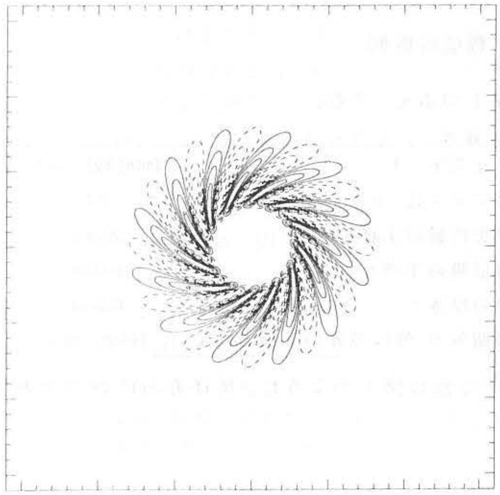
図8. しわの形状(等高線)　ϕ=1.135°, M_t=29.8×10^3 kgf・cm

央円盤の回転につれ、しわの発生領域が徐々に拡大していく様子がわかる。

6-3 荷重-変位曲線

以下の図では 195 増分ステップまで描いている。図 11. は、中央円盤の回転 ϕ と捩りモーメント M_T の関係である。分岐点は○をつけた点であり、ここから、主

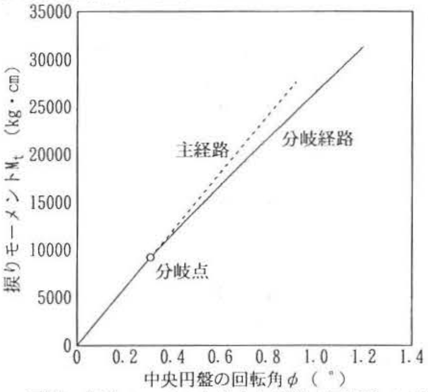

図11. 捩りモーメントと中央円盤の回転角 ϕ の関係

経路と分岐経路が分かれていく様子がわかる。破線が主経路であり、しわの発生により膜の捩りに対する耐力がやや低下していることがわかる。けれども、耐力低下はそれほど大きくなく、せん断座屈によってしわが発生しても、耐力低下は小さいという張力場理論による結果と一致する。図 12. は $r = 29.8cm$、$n\theta = 0°$ の点における面外変位 w と中央円盤の回転角 ϕ の関係である。また、図 13. は $r = 29.8cm$、$n\theta = 90°$ 、図 14. は $r = 44.3cm$、$n\theta = 0°$ 、図 15 は $r = 44.3cm$ 、$n\theta = 90°$ の点におけるものである。図 12.、図 14. は形状関数に用いた余弦関数の節点における振幅にあたり、また、図 13.、15. は正弦関数の振幅にあたる。従って、図 12. と 13.、あるいは、図 14. と 15. の曲線を合成することにより、それぞれの半径 r における全ての θ に対する、強制回転角-面外変位曲線を描くことができる。

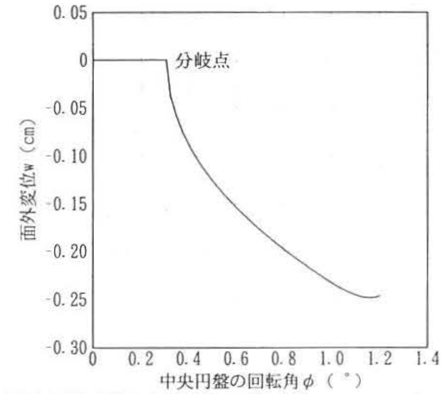

図12. 面外変位と中央円盤の回転角の関係 [$n\theta$=0°, r=29.8cm]

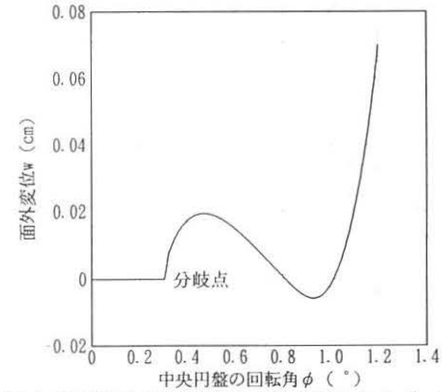

図14. 面外変位と中央円盤の回転角の関係 [$n\theta$=0°, r=44.3cm]

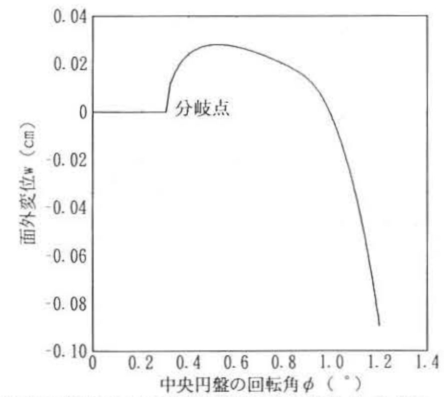

図13. 面外変位と中央円盤の回転角の関係 [$n\theta$=90°, r=29.8cm]

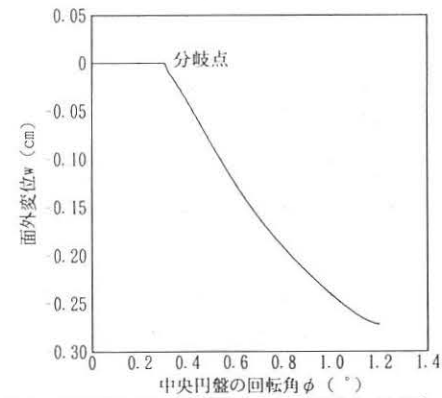

図15. 面外変位と中央円盤の回転角の関係 [$n\theta$=90°, r=44.3cm]

6-4 問題点

現在の解析では、計算結果が一定の値に収束するまで細かく要素分割を行っていない。等高線図からわかるように、この解析例ではしわの発生領域が徐々に変化していくため、要素分割の変化に対して敏感である。従って、定量的に十分な精度を得るためには、相当細かい分割が必要であると考えられる。

図11. ～15.の曲線は195増分ステップまでを描いている。計算はこの先のステップまで行っているが、この後数値的な不安定が生じており、原因は現在のところわかっていない。

7 おわりに

本論文では、張力膜に発生するしわのしわ発生後挙動の性質を明らかにすること、および、その解析手法を開発することを目的とした。ここでは、面内捩りを受ける円形張力膜を例題として取り上げた。有限要素法を利用して幾何学的非線形性を考慮した基礎式を導き、分岐解析および分岐経路の追跡を行った。解析結果から、しわの発生領域が徐々に拡大していく様子、および、しわ発生後の耐力低下のレベルが把握された。

参考文献

[1] E.Reissner."On Tension Field Theory",Proc. of the 5th Int. Congr. for Applied Mechanics Harvard Univ.& M.I.T.,1938,pp.88-92

[2] M.Stein,J.H.Hedgepeth."Analysis of Partly Wrinkled Membrane",NASA TN D-813,Jul. 1961

[3] M.M.Mikulas,Jr.,"Behavior of a Flat Stretched Membrane Wrinkled by the Rotation of an Attached Hub",NASA TN D-2456,Sept. 1964

[4] R.K.Miller,J.M.Hedgepeth, "An Algorithm for Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes", AIAA Journal,Vol.20,1982,pp1761-1763

[5] R.K.Miller,J.M.Hedgepeth et al.,"Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes",Computers & Structures,Vol.20,No.1-3,1985,pp.631-639

[6] 本間俊雄、登坂宣好「有限要素法による張力場解析」、日本鋼構造協会第15回大会研究集会、マトリックス解析法シンポジウム、昭和56年7月、pp287-292

[7] 西村敏雄、登坂宣好、本間俊雄「有限要素法による張力場解析手法について」、日本建築学会構造系論文報告集、第351号、昭和60年5月、pp.76-83

[8] T.Suzuki,T.Ogawa,S.Motoyui,T.Sueoka,"Investigation on Wrinkling Problem of Membrane Structure",Proc. of IASS-MSU Symposium on Domes from Antiquity to the Present,Istanbul,1988,pp695-702

[9] 鈴木敏郎、小河利行、元結正次郎、末岡利之「膜構造におけるシワ波発生現象に関する一考察」、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第12巻、昭和63年7月、pp437-442

[10] 鈴木敏郎、小河利行、元結正次郎、原郁雄「膜構造におけるシワ発生現象の解析」、日本建築学会大会学術講演梗概集（九州）、1989年、pp.1175-1176

[11] 鈴木敏郎、小河利行、元結正次郎、末岡利之「不安定な膜構造の動的応答解析」、日本建築学会大会学術講演梗概集（中国）、1990年、pp.1167-1168

[12] 鈴木敏郎、木村克次、元結正次郎「数値解析手法による薄板のせん断座屈後挙動に関する研究」、日本建築学会構造系論文報告集、第435号、1992年5月、pp109-117

[13] A.Endou,Y.Hangai,S.Kawamata,."Post-Buckling Analysis of Elastic Shells of Revolution by the Finite Element Method",Report of the I.I.S. the Univ. of Tokyo, Vol.26,No 2,1976

[14] 半谷裕彦、川口健一「形態解析」、1991年、培風館

[15] 宮村倫司、半谷裕彦、「捩りを受ける円形膜に発生するしわの分岐解析」、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第16巻、平成4年7月、pp.349-354

[16] 宮村倫司、半谷裕彦、「張力膜におけるしわの発生としわ後挙動に関する研究 -捩りを受ける円形張力膜に発生するしわの形状-」、日本建築学会大会学術講演梗概集（北陸）、1992年、pp.1817-1818

Post-wrinkling Analysis of a Circular Membrane under In-plane Torsion

Tomoshi MIYAMURA*1
Yasuhiko HANGAI*2

SYNOPSIS

Wrinkling is one of the factors which should be considered when membrane structures are designed. Tension field theory is a powerful idea to study the wrinkling on stretched membrane. But detailed configuration of the wrinkling cannot be investigated by using this theory. On the other hand, there is an idea to consider that wrinkling is a buckling deformation. The analysis of wrinkling using this idea was carried out, and the wrinkling mode at the point where wrinkling occurs could be obtained.

In this paper we analyze the post-wrinkling phenomena of stretched circular membrane under torsion. The wrinkling which occurs in this model should be considered as the deformation due to the bifurcation buckling. The problem is solved by using the finite element method considering geometrical non-linearity. At first the bifurcation point (the point where wrinkling occurs) is searched by the eigen-value analysis and the bisection method simultaneously. After finding the bifurcation point, the switching from the main path to the bifurcation path is done by using the eigen-vector which corresponds to the zero eigen-value at the bifurcation point. Modified load incremental method is used in pursuing the bifurcation path, and the configuration of the wrinkling, and the region of the wrinkling which spreads with every torque increment are analyzed.

---

*1 Graduate Student, University of Tokyo
*2 Professor, Institute of Industrial Science, University of Tokyo