低次四辺形膜要素による振動解析

正岡典夫*1

梗　概

複雑な曲面形状を有する膜構造物の動的非線形挙動を捉えることが重要な問題となってきている。

本報では、計算効率面で有効性の期待できる低次四辺形膜要素（双一次四辺形要素の面内積分次数を低減し、面内1点積分とした要素）をサスペンション膜構造振動解析問題に適用し、基礎的な振動特性の把握を試みる。

はじめに、数値時間積分にニューマークのβ法を用いた非線形応答解析手法の概要について述べる。そして、平面矩形膜の横振動解析により解析アルゴリズムの妥当性を確認し、減衰の影響について検討する。次に、最も基本的なＨＰ曲面の自由振動解析を行い、種々の設計条件が振動性状へ及ぼす影響と仮定する減衰の解析解への影響について検討を行う。

1．序

近年、サスペンション膜構造や骨組み膜構造を主体とした、多数の膜構造建築物が各地に建設されるようになってきた。そして、大規模建築物の増加に伴って、風による種々の問題を検討する必要が生じてきた。膜構造は軽量で、外力により大変形を生じやすく、一般に複雑な曲面形状となることが多い。また、実際の風は常に変動しているため、膜面の動的挙動を正確に捉えることは困難と思われる。しかし、膜構造の基礎的な振動性状を把握しておくことは設計上重要な問題と考えられる。

膜構造の構造特性を対象とした振動解析や振動性状の研究に関して、内圧力により支持される空気膜構造は振動実験や解析を通じて多数の報告がされている[1)-8)]。一方、二つの相反する曲面により構成されるサスペンション膜構造は研究が少なく、ケーブル置換モデルや三角形要素等の有限要素法による非線形応答解析で、非減衰時の振動性状に関して報告がされている以外にあまりない[9)-11)]。また、同構造に関する実験や減衰性を考慮した解析等の研究も殆ど行われていない。

膜構造は基布とコーティング材により構成される複合材料であり、その減衰性を定量的あるいは定性的に述べることは一般に難しい。しかし、膜構造振動解析では何らかの減衰力を仮定する必要があると考える。

そこで、本研究ではサスペンション膜構造を対象に、文献10と同一の解析モデルを用いて、膜材を直交異方性線形弾性体と仮定し、粘性減衰を考慮した応答解析を行う。そして、基礎的な振動性状の把握と減衰力の振動へ及ぼす影響について検討する。

次章では、計算効率面で有効性の期待できる低次四辺形膜要素を用いて、本研究で使用する解析理論の概要を述べる。次に、理論解を有する平面矩形膜の横振動解析により、解析アルゴリズムの妥当性を確認し、非線形性や減衰の影響について検討する。また、他の有限要素と解析解の比較を行う。数値解析例として、最も基礎的なＨＰ曲面を取り上げ、種々の設計条件に

*1 ㈱巴コーポレーション　建設技術開発室

よる振動性状への影響を調べる。また、仮定する比例減衰の違いによる振動性状への影響を検討する。

2．解析手法

本研究では、強制力の作用しないサスペンション膜構造の自由振動解析を低次四辺形膜要素を用いた有限要素法に基づく数値解析により行う。Fig.1 の低次四辺形膜要素の概要については、既報12,13 に示されているので、ここでは、解析理論の概要について説明する[14]。

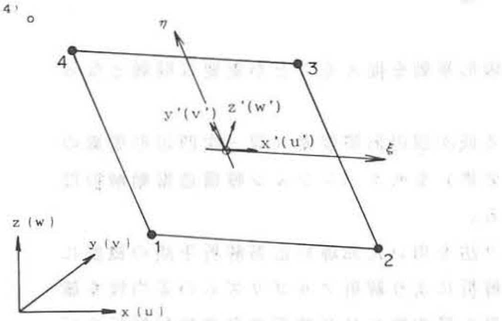


Fig.1　低次四辺形膜要素（１点積分要素）

2．1　解析理論の概要

d'Alembertの原理に基づいて、強制力を考慮せず粘性減衰を仮定した多自由度系の自由振動の運動方程式を導くと、以下のような微分方程式で記述できる。

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \qquad (2\text{-}1)$$

ここで、

[M] ：質量マトリックス　$\{\ddot{y}\}$ ：加速度ベクトル
[C] ：減衰マトリックス　$\{\dot{y}\}$ ：速度ベクトル
[K] ：剛性マトリックス　$\{y\}$ ：変位ベクトル

(2-1) 式の第１項は慣性力、第２項は減衰力、第３項は復元力を表している。

有限要素法による応答解析は、最終的に(2-1) 式の運動方程式を数値解析的に解くわけであるが、その解法には次のようなものがある。１つは固有振動の重ね合わせによって動的応答を求めるモード解析法である。また、微小時間間隔ごとに運動方程式を数値的に積分して解を求めていく数値積分法などである。本研究では膜構造の大振幅振動を考えており、幾何学的非線形性が強く表れると思われるため、数値積分法であるニューマークのβ法を用いた非線形応答解析を行う。

ここでは、膜材を直交異方性線形弾性体と仮定し、運動方程式の解法に反復法を使用する。具体的な解法手順を以下に示す。

①$\{\ddot{y}_{n+1}\}$の第一近似値を仮定する。

$$\{\ddot{y}_{n+1}\} \fallingdotseq \{\ddot{y}_{n}\} \qquad (2\text{-}2)$$

②ニューマークβ法公式に代入し$\{y_{n+1}\}$，$\{\dot{y}_{n+1}\}$を定める。

$$\{y_{n+1}\}=\{y_{n}\}+\{\dot{y}_{n}\}\varDelta t+(\tfrac{1}{2}-\beta)\{\ddot{y}_{n}\}\varDelta t^{2}+\beta\{\ddot{y}_{n+1}\}\varDelta t^{2} \qquad (2\text{-}3)$$

$$\{\dot{y}_{n+1}\}=\{\dot{y}_{n}\}+\tfrac{1}{2}[\{\ddot{y}_{n}\}+\{\ddot{y}_{n+1}\}]\varDelta t \qquad (2\text{-}4)$$

③上式で計算した結果を(2-1) 式の運動方程式に代入し、新しい$\{\ddot{y}_{n+1}\}$ を求める。ここで使用する剛性マトリックスは、変形を含む非線形剛性マトリックスである。

$$\{\ddot{y}_{n+1}\}=-[M]^{-1}[C]\{\dot{y}_{n+1}\}-[M]^{-1}[K(y)]\{y_{n+1}\} \qquad (2\text{-}5)$$

④この新しい$\{\ddot{y}_{n+1}\}$ が仮定値と一致するまで②③を繰り返す。

ここで、⊿ｔは微小時間刻みである。パラメータβは線形加速度法となる１／６とする。

質量マトリックスは節点集中質量型（ランプト・マス法）を用いる。

実際の膜構造の減衰メカニズムが不明であるため、減衰力として比例減衰系を仮定して解析を行う。ここでは、減衰マトリックス[C]が質量マトリックス[M]に比例する質量比例型減衰、剛性マトリックスに比例する剛性比例型減衰、両者の和であるレーリー型減衰を考える。各減衰マトリックスは固有値解析で得られる固有振動数ωを用いて、次のように定義される。

(a)質量比例型：１次モードの減衰定数h_1を与える。高次の減衰定数は振動数に反比例する。

$$[C]=(2\cdot h_1\cdot\omega_1)\cdot[M] \qquad (2\text{-}6)$$

(b)剛性比例型：１次モードの減衰定数h_1を与える。高次の減衰定数は振動数に比例する。

$$[C]=(2\cdot h_1/\omega_1)\cdot[K] \qquad (2\text{-}7)$$

(c)レーリー型：１次と２次の減衰定数h_1とh_2を与える。高次の減衰定数は(a)(b)の中間的な意味あいとなる。

$$[C]=a_0\cdot[M]+a_1\cdot[K] \qquad (2\text{-}8)$$

$$a_0=2\omega_1\cdot\omega_2(h_1\cdot\omega_2-h_2\cdot\omega_1)/(\omega_2^{2}-\omega_1^{2})$$

$$a_1=2(h_2\cdot\omega_2-h_1\cdot\omega_1)/(\omega_2^{2}-\omega_1^{2}) \qquad (2\text{-}9)$$

ここでは、有限変形理論に基づくTotal Lagrangian approachによる幾何学的非線形性を考慮する。したが

って、(2-5) 式の剛性マトリックスは、通常の静的弾性剛性マトリックス$[K_0]$、初期変位剛性マトリックス$[K_L]$、幾何剛性マトリックス$[K_G]$およびアワーグラス仮想弾性剛性マトリックス$[K_H]$を合成して用いる。また、膜材は非抗圧縮材と仮定してリンクリングの発生を考慮する。線形応答解析の場合は、弾性剛性マトリックス$[K_0]$と初期張力による幾何剛性マトリックス$[K_{0G}]$およびアワーグラス仮想弾性剛性マトリックス$[K_H]$を組み合わせて用いる。

2. 2 アワーグラスコントロール

本要素を面内1点積分要素として用いると、Fig.2 に示すような剛体変位以外の零エネルギモードであるアワーグラスモードを含む。本コントロールについては、既報12,13 において報告した通りである。応答解析において、このようなモードを生じると誤った解析解を与えることになるので、卓越する振動モードで発生を押える必要がある。本研究では、固有値解析によりアワーグラスモードの発生を確認し、卓越する低次モードで同モードが発生しないように、要素剛性マトリックスに仮想弾性剛性を付加する。ここで、再び要素仮想弾性剛性の定義を示すと以下のようになる。

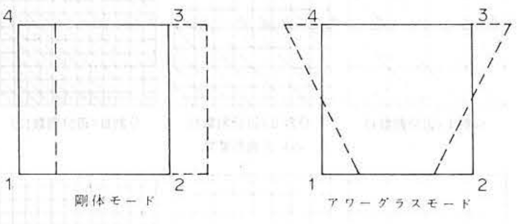


Fig.2 アワーグラスモード

まず、次のようなベクトル $\{\gamma\}$ の第k成分を定義しておく。

$$\gamma_k = H_k - [(\{H_k\}^T \cdot \{x'\}) B_{1k} \quad (k=1\sim4)$$
$$+ (\{H_k\}^T \cdot \{y'\}) B_{2k}] \quad (2\text{-}10)$$

$$\{H_k\}^T = \lfloor 1, -1, 1, -1 \rfloor$$

$$\{x'\}^T = \lfloor x_1', x_2', x_3', x_4' \rfloor$$

$$\{y'\}^T = \lfloor y_1', y_2', y_3', y_4' \rfloor$$

$$[B_{ak}] = \frac{1}{2s} \cdot \begin{bmatrix} y_2'-y_4' & y_3'-y_1' & y_4'-y_2' & y_1'-y_3' \\ x_4'-x_2' & x_1'-x_3' & x_2'-x_4' & x_3'-x_1' \end{bmatrix}$$

s:要素面積, (a=1～2, k=1～4) (2-11)

このベクトル $\{\gamma\}$ と変位ベクトル $\{u'\}$ を用いて、仮想ひずみを定義する。

$$q_1' = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k \cdot u_k', \quad q_2' = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k \cdot v_k', \quad q_3' = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k \cdot w_k' \quad (2\text{-}12)$$

マトリックス表示すると、

$$\{q'\} = [B_H] \{u'\} \quad (2\text{-}13)$$

つぎに、仮想ひずみに対応した仮想応力を次式のように定義する。

$$Q_1' = C_1 \cdot q_1', \quad Q_2' = C_1 \cdot q_2', \quad Q_3 = C_2 \cdot q_3' \quad (2\text{-}14)$$

ここで、

$$C_1 = \mu_1 (B_{1k}^T \cdot B_{1k} + B_{2k}^T \cdot B_{2k})$$
$$C_2 = \mu_2 (B_{1k}^T \cdot B_{1k} + B_{2k}^T \cdot B_{2k}) \quad (2\text{-}15)$$

μ : ｱﾜｰｸﾞﾗｽﾊﾟﾗﾒｰﾀ

これをマトリックス表示すると、

$$\{Q'\} = [C] \{q'\} \quad (2\text{-}16)$$

仮想弾性剛性$[K_H]$はこの仮想ひずみ $\{q'\}$ と仮想応力 $\{Q'\}$ を用いて求める。

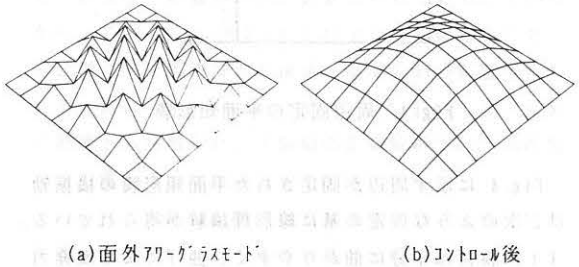
$$[K_H] = [B_H]^T [C] [B_H] \quad (2\text{-}17)$$

(2-15)式中のアワーグラスパラメータ$\mu_1 \mu_2$は、ここでは、固有値解析から以下のように仮定する。

$$r_M = 0.00375$$
$$\mu_1 = 10.0 \cdot r_M (Nx + Ny) / 2$$
$$\mu_2 = 1.0 \cdot r_M (Nx + Ny) / 2 \quad (2\text{-}18)$$

ここで、Nx, Ny:初期張力

仮想弾性剛性は過大に導入すると得られる周期や変位等の誤差が増大するため、極力微小量を仮定する必要がある。Fig.3 に平面矩形膜の固有値解析を行った際の面外アワーグラスモードとコントロール後の固有モードの比較を示す。



(a)面外ｱﾜｰｸﾞﾗｽﾓｰﾄﾞ　(b)ｺﾝﾄﾛｰﾙ後

Fig.3 アワーグラスモード(1次固有モード)

2. 3 解析上の仮定条件と構成プログラム

ここでは、振動時のつり合い曲面として等張力曲面を仮定して自由振動解析を行う。振動は強制変位もし

くは初速度を与えて行う。非線形応答解析時の減衰力の定義で使用する振動数は自由振動を行う直前の出発形状で得られる固有値解析結果を用いる。

本研究で使用する有限要素は解析解の比較を行うため、本要素（１点積分要素）の他、四辺形通常積分要素（通常積分要素）と低ひずみ三角形要素（三角形要素）である。構成するプログラムは、減衰を考慮した線形および非線形応答解析プログラムと減衰を考慮しない線形モード解析プログラムである。固有値解法は、Jenningsの同時反復法を用いる。

３．平面矩形膜の横振動

前章で示した解析理論により構成される解析アルゴリズムの妥当性を確認するため、ここでは、理論解を有する平面矩形膜の横振動解析を実施し、理論解と解析解の比較を行う。また、同一モデルを用いて減衰の影響について検討する。

３．１　線形理論解との比較

文献10,11 と同一の解析モデルを用いて、減衰を考慮しない非線形応答解析を行う。はじめに、固有値解析を実施して要素分割や有限要素の相違による解析解への影響を検討する。次に、非線形解析結果と理論解の比較を行い、非線形性について検討する。

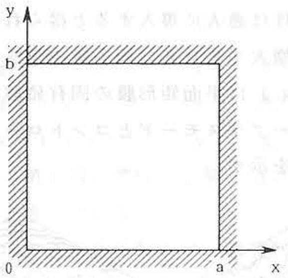


Fig.4　周辺固定の平面矩形膜

Fig.4 に示す周辺が固定された平面矩形膜の横振動は、次のような仮定の基に線形理論解が得られている。

（１）膜材は十分に曲がりやすく、曲げによる反発力がない。

（２）材質、厚さが一様である。

（３）全ての方向に一様な張力で引張られている。

（４）振動中の微小なたわみによる張力変動はない。

自由振動時の膜面変位理論解は下式で示される。

$$Z=(\alpha_{mn}\mathrm{COS}\,\omega_{mn}t+\beta_{mn}\mathrm{SIN}\,\omega_{mn}t)\,\mathrm{SIN}\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{SIN}\frac{n\pi y}{b} \tag{3-1}$$

$$\omega_{mn}=\pi\sqrt{T_0\{(m/a)^2+(n/b)^2\}/\rho} \tag{3-2}$$

ω_{mn}：角振動数(rad/sec)

T_0　：初期張力

ρ　：質量密度

a, b：矩形膜のx, y座標

m, n：振動モード次数

α, β：初期条件より定まる積分定数

初期条件として、平面矩形膜に(1,1) モードの振動を生じるような初速度 v_0 を与えると、下式が得られる。

$$Z=(\beta_{11}\mathrm{SIN}\,\omega_{11}t)\,\mathrm{SIN}\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{SIN}\frac{\pi y}{b} \tag{3-3}$$

ここで、　$\beta_{11}=16\cdot v_0/\pi^2\omega_{11}$

$$\omega_{11}=\pi\sqrt{T_0\{(1/a)^2+(1/b)^2\}/\rho} \tag{3-4}$$

解析は、有限要素分割された各節点に、次式のようなZ方向初速度を与えた。

$$u=v_0\,\mathrm{SIN}\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{SIN}\frac{\pi y}{b} \tag{3-5}$$

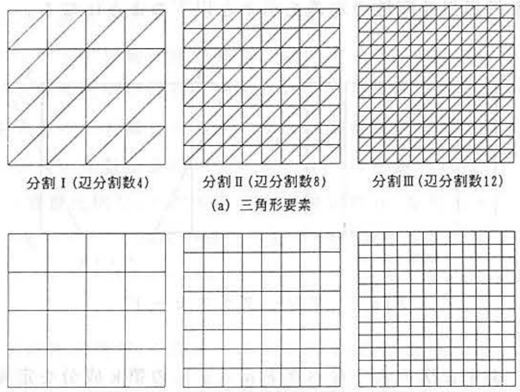


Fig.5　平面矩形膜の要素分割

Table 1　平面矩形膜の解析条件

形　状	寸　法	a ＝ b ＝ 4．0 m
初期張力	縦横糸方向	T0 ＝ 1．0 Kg/m
材料定数	引張剛性	Ext ＝ 1．0 Kg/m Eyt ＝ 1．0 Kg/m
	ポアソン比	νx ＝ 0．0 νy ＝ 0．0
	せん断剛性	Gt ＝ 0．0 Kg/m
	膜 重 量	w ＝ 9．8 Kg/m²

3．1．1　要素分割と固有周期の関係

要素分割数による線形理論解への収束性を確認するため、Fig.5 に示す3種類の要素分割に対して、固有値解析を実施する。また、同時に他有限要素との比較を行う。解析条件をTable 1に示す。Fig.6に得られた分割数と固有周期との関係を示す。また、Fig.7 に解析で得られた1次固有モードを示す。

Fig.6 から、分割数が増加すると線形理論解に収束することが分かる。本要素の収束精度は、理論固有周期に対して分割Ⅱで2.5%、分割Ⅲで1.0%程度である。本要素を含む四辺形要素は平面近似を仮定しているため、分割数を分割Ⅱ程度以上にすることが望ましい。

3．1．2　初速度の影響

分割Ⅲのモデルを用いて非線形応答解析を実施し、初速度の変化に対する周期と膜面の面外方向変位応答について検討する。解析時の時間刻み⊿tは0.01秒とし6.0 秒までの応答を調べる。

Table 2、3は各初速度における周期および最大振幅を線形理論解および文献(11)と比較したものである。文献(11)は四辺形3次要素を用いており、数値時間積分に中心差分法を用いている。周期の比較では、微小振動と考えられる初速度v_0＝0.1m/s 以下では良好に理論解に一致しており、線形解析とも一致が見られる。v_0＝1.0m/s 以上では、振幅が大きく変化するため張

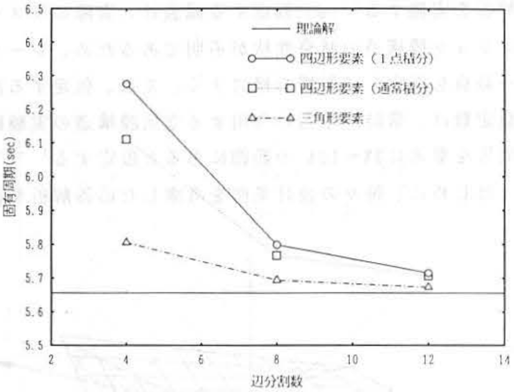


Fig.6　分割数と固有周期の関係(v_0=1.0x10^{-5}m/s)

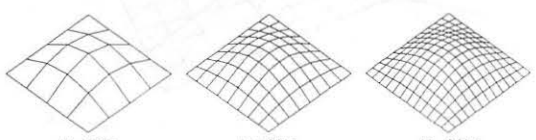


Fig.7　各分割での1次固有モード（1点積分要素）

Table 2　各初速度における周期

単位：sec

初速度v_0 (m/sec)	線形理論	アイソパラメトリック要素 文献(11)	1点積分要素		通常積分要素		三角形要素	
			線形	非線形	線形	非線形	線形	非線形
1.0×10^{-5}		5.761		5.72		5.71		5.67
1.0×10^{-1}		5.744		5.71		5.70		5.67
1.0	5.656	4.782	5.72	5.35	5.71	5.27	5.67	5.09
2.0		3.834		4.49		4.49		4.23
3.0		3.316		3.87		3.85		3.61
4.0		3.046		3.42		3.40		3.20

Table 3　各初速度における最大振幅

単位：m

初速度v_0 (m/sec)	線形理論	アイソパラメトリック要素 文献(11)	非線形解析		
			1点積分要素	通常積分要素	三角形要素
1.0×10^{-5}	1.4595×10^{-5}	9.6484×10^{-6}	9.1356×10^{-6}	9.1205×10^{-6}	9.0684×10^{-6}
1.0×10^{-1}	1.4595×10^{-1}	9.6940×10^{-2}	9.0910×10^{-2}	9.0756×10^{-2}	9.0245×10^{-2}
1.0	1.4595	8.2827×10^{-2}	8.6726×10^{-1}	8.6687×10^{-1}	8.6530×10^{-1}
2.0	2.9191	1.4084	1.5862	1.5875	1.5910
3.0	4.3786	1.8717	2.1810	2.1838	2.1917
4.0	5.8382	2.2703	2.6933	2.6968	2.7063

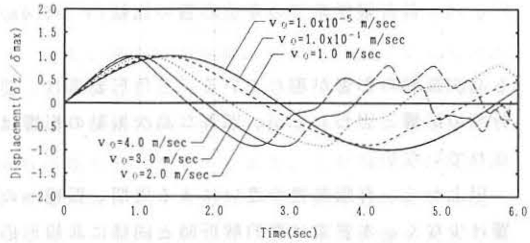


Fig.8　膜面中心点での変位応答(非減衰，1点積分要素)

力変動も大きくなり、幾何剛性が影響して周期が短くなる傾向となる。最大振幅については、微小振動において理論解と余り良い対応は見られないが、文献(11)にはほぼ一致した結果が得られている。Fig.8 は膜面中心点の変位応答を最大変位で無次元化して示している。初速度の影響が周期に顕著に現れていることが分かる。ここで、v_0＝2.0m/s 以上の大振幅振動において、得られた応答波形の後半に高次振動の影響がみられる。特に、v_0＝4.0m/s では、t=5.9secで高次振動の影響から発散した。大振幅の振動解析では、高次振動の影響も重要な課題と思われる。

Fig.9 に大振幅振動となる初速度v_0＝3.0m/s 時の解析手法の違いによる変位応答の比較を示す。モード解析と線形応答解析は概ね良好な一致が見られ、非線形応答解析とは周期、振幅共に大きく異なることが分かる。Fig.10は非線形応答解析時の有限要素の比較である。振動の前半ではそれぞれ良好に一致しているが、振動の後半で本要素と通常積分の四辺形要素はどちら

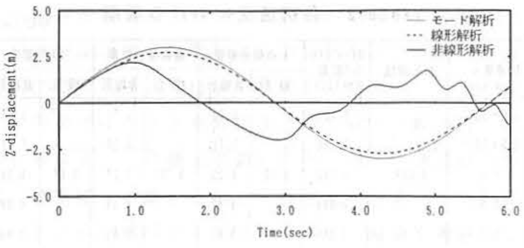


Fig.9 各解析手法での変位応答の比較
(v_0=3.0m/s, 1点積分要素)

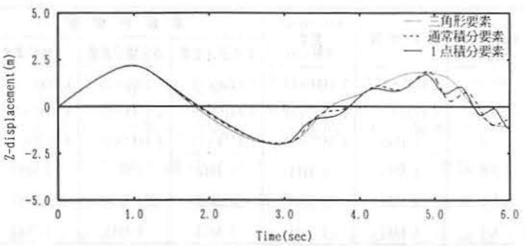


Fig.10 各有限要素での変位応答の比較(v_0=3.0m/s)

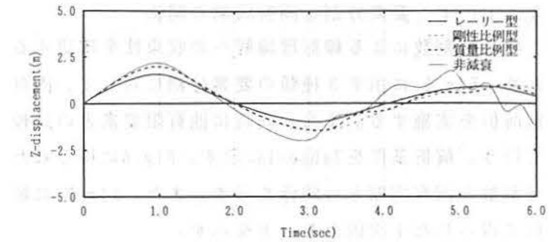
も高次振動の影響が現れている。三角形要素は、要素分割の影響と思われるが、顕著な高次振動の影響は示されていない。

以上から、有限要素の違いによる周期、振幅への影響は少なく、本要素は静的解析時と同様に非線形応答解析においても遜色ない解析解が得られることを示している。また、演算時間の比較では三角形要素に対して約25%、通常積分要素に対して40%の低減であった。

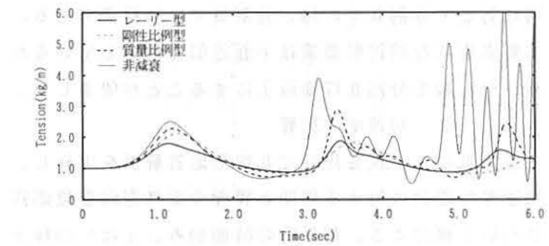
3.2 減衰を考慮した非線形応答解析

ここでは、減衰力が振動にどのように影響を与えるかを検討する。

解析モデルおよび解析条件は前項と同一とする。減衰定数はh_1=h_2=10% を仮定する。Fig.11(a),(b) は、質量比例型、剛性比例型およびレーリー型の3種類の比例減衰に対する膜面中央点の変位応答と中央点近傍要素の面内張力変動を示している。同図からは、減衰による最大振幅への影響と高次振動への影響に大きな差が現れることが観察できる。また、張力変動についても同様である。質量比例型は(2-6) 式からも明らかなように高次振動への影響が小さく、剛性比例型やレーリー型は逆に大きくでることが示されている。参考のため、v_0=3.0m/s時の変位応答波形の振幅比より等価な減衰定数を算出すると、質量比例型 10.6%、剛性比例型 11.2%、レーリー型8.7%であり、ここでは、剛性比例型が最も減衰効果が大きいことが示された。



(a) 変位応答への影響



(b) 張力変動への影響

Fig.11 減衰の影響

4. HP曲面の振動解析

サスペンション膜構造の基礎的振動性状の把握を目的に最も基本的なHP曲面を取り上げ、減衰自由振動解析を実施する[10]。仮定する減衰は、実際のサスペンション膜構造の減衰性状が不明であるため、レーリー減衰を仮定して影響を検討する。また、仮定する減衰定数は、常時内圧力の作用する空気膜構造の実験結果等を参考に3%~10% の範囲にあると仮定する[1)-7)]。

はじめに、種々の設計条件を考慮した応答解析を行

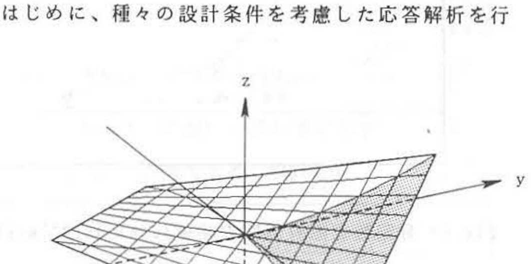


Fig.12 HP曲面の解析モデル

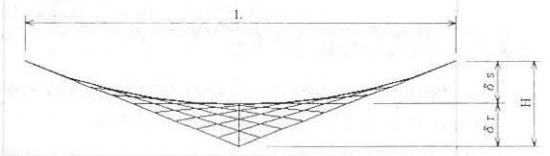
う。次に、仮定する比例減衰の種類と減衰定数が振動性状に及ぼす影響について検討する。

Fig.12にＨＰ曲面の解析モデルを示す。周辺は固定境界とする。解析は対称性を考慮して１／４部分について行う。膜材は等方性材としTable 4 に解析条件を示す。解析に使用する要素分割をFig.13に示す。使用する有限要素は四辺形要素に本要素（１点積分要素）を、他は三角形要素とする。

応答解析は、等張力つり合い曲面を基準に静的応力変形解析により膜面中央を上方に強制変位させた状態で自由振動させて行う。なお、変位応答は膜面中心点（節点１、ｚ軸方向）を、張力変動は膜面中央部の押え方向張力（要素２、ｘ軸方向）を示す。また、特記なき解析は以上に示したモデルを対象とする。

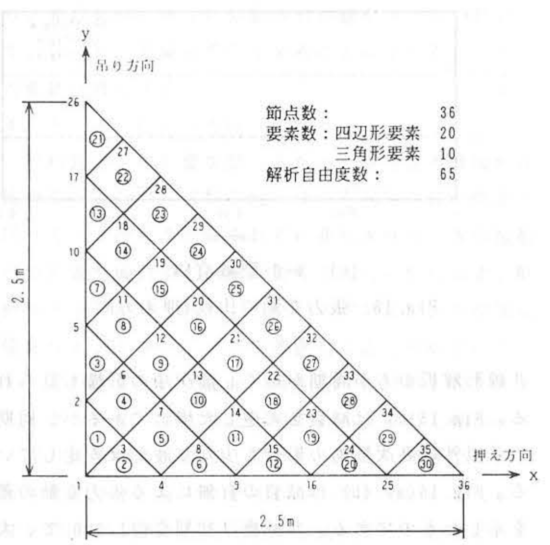
Table 4　ＨＰ曲面の解析条件

初期張力	縦横糸方向	Ｎｘ＝Ｎｙ＝１００．０ Kg/m
材料定数（等方性）	引張剛性	Ｅｘｔ＝ ４００００ Kg/m Ｅｙｔ＝ ４００００ Kg/m
	ポアソン比	νｘ ＝ ０．２５ νｙ ＝ ０．２５
	せん断剛性	Ｇｔ＝ １６０００ Kg/m
	膜　重　量	ｗ　＝ ２．０　Kg/m²



スパン：L　＝5.0m
高低差：H　＝1.0m
ライズ：δr＝0.5m（スパン比 1/10）
サ　グ：δs＝0.5m（　〃　1/10）

(a)　モデル形状図



(b)　要素分割図

Fig.13　モデル形状と要素分割

4．1　設計条件を考慮した非線形応答解析

膜面に作用する初期変位、初期張力、リンクリングの影響および材料異方性の影響について検討する。レーリー型減衰の減衰定数は$h_1=h_2=5\%$と仮定する。応答解析時の時間刻み⊿ｔは0.0001秒とし、0.2 秒までの応答を調べる。

4．1．1　固有値解析

解析に先立ち、非減衰時の固有値解析を行う。固有値解析は全体モデルで解くのが通常であるが、ここでは便宜的に対称性を利用する。Fig.14の○は等張力曲面形状の固有周期の分布を示している。本解析モデルは面外方向の固有周期が低次から高次まで非常に近接して存在し、高次項が振動に大きく影響してくる可能性を示している。参考のため図中に示した□と△は中央部をスパン比3/40、1/10だけ強制変位させた状態での固有周期を示したものである。大変形時には幾何剛性の影響が大きくなるため、周期は線形解析時に比べて短くなり、面内方向を含む高次項の影響が大きく現れると思われる。

4．1．2　初期変位の影響

初期変位が膜面振動に与える影響を調べる。

Fig.15(a) はスパン比1/1000の初期変位を与えたときの非減衰時の変位応答であるが、微小振動の範囲と考えられ線形解析やモード解析と完全に一致する。しかし、Fig.15(b) に示すようにスパン比1/100 の初期変位では非線形解析と線形解析で応答波形に差があり、

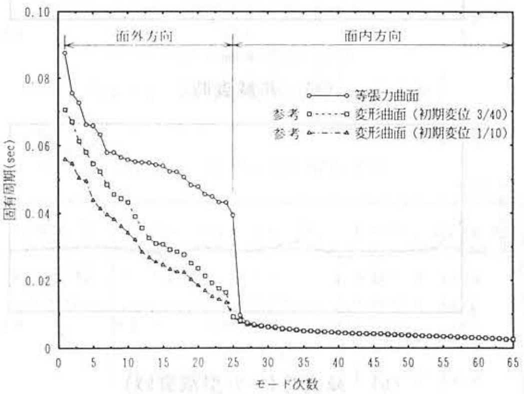
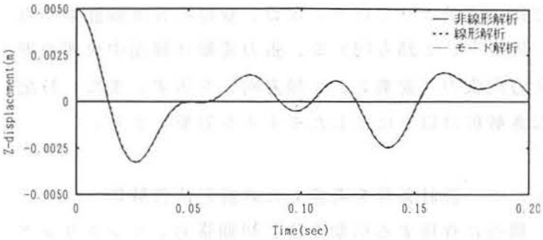
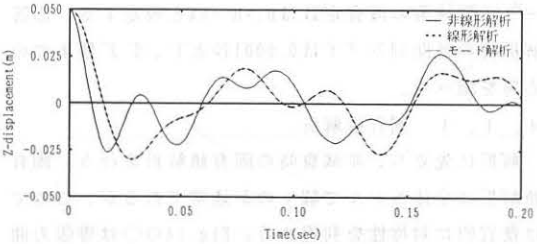


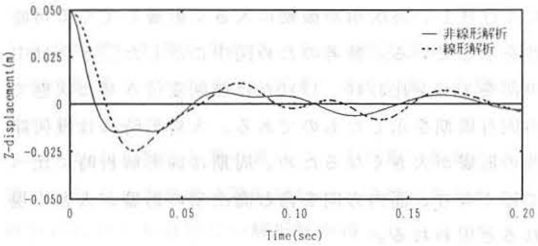
Fig.14　固有周期とモード次数の関係（非減衰時）



(a) 初期変位1/1000(非減衰時)

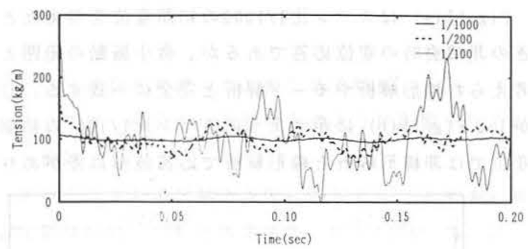


(b) 初期変位1/100(非減衰時)

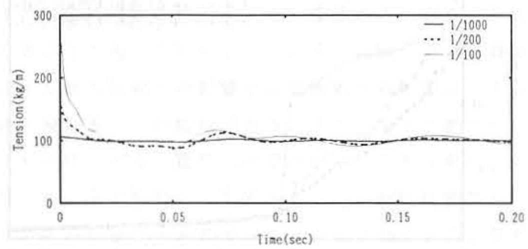


(c) 初期変位1/100(ﾚｰﾘｰ型減衰5%)

Fig.15 変位応答の比較

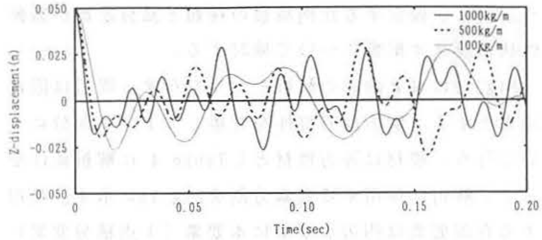


(a) 非減衰時

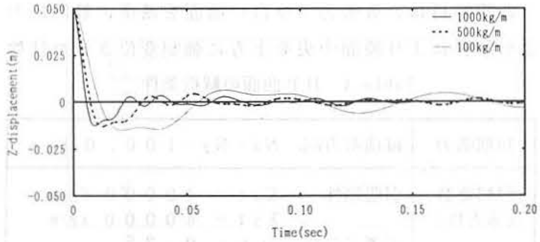


(b) 減衰時(ﾚｰﾘｰ型減衰5%)

Fig.16 張力変動の比較(押え方向)

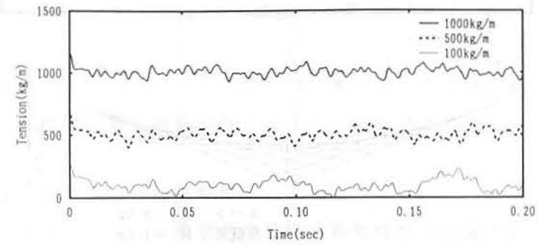


(a) 初期変位1/100(非減衰時)

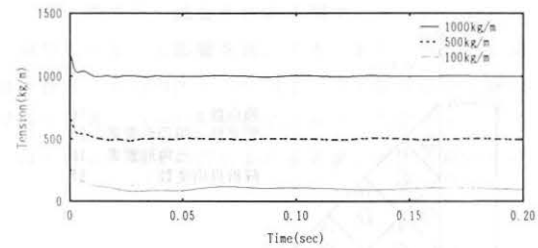


(b) 初期変位1/100(ﾚｰﾘｰ型減衰5%)

Fig.17 変位応答の比較



(a) 非減衰時



(b) ﾚｰﾘｰ型減衰5%

Fig.18 張力変動の比較(押え方向)

非線形解析の方が周期が短く、高次項の影響も見られる。Fig.15(c) は減衰を考慮した場合であるが、周期の差以外は高次振動の影響も少なく波形は安定している。Fig.16(a),(b) は減衰の有無による張力変動の差を示したものである。非減衰は初期変位1/100 で、大きな張力変動を示しているのに対して、減衰により安定した張力変動に変化することが分かる。

４．１．３　初期張力の影響

初期張力として、100kg/m,500kg/m,1000kg/mの３種類を仮定して、振動に及ぼす影響を検討する。解析モデルは、前項と同様である。

Fig.17(a) は各初期張力での非減衰時の変位応答の比較である。初期張力は直接幾何剛性に影響を与える要因であり、その上昇は要素剛性を高めるため、周期が短くなる。また、波形に見られる高次振動の影響は、初期張力が大きくなる程はっきりと現れてくる。ここでも、減衰の影響はFig.17(b) に示すように顕著に現れている。張力変動への影響はFig.18(a),(b) に示すが、変位応答に対応して安定した波形に変化しており、減衰の影響が大きくでている。

４．１．４　リンクリングの影響

要素の圧縮力を考慮する場合としない場合（リンクリングの考慮）の、振動へ及ぼす影響を検討する。解析モデルは4.1.2 と同一であるが、リンクリングを発生させるためスパン比1/10の初期変位を与える。また、時間刻み⊿ｔは0.00001 秒とする。

Fig.19(a),(b) に非減衰時と減衰時の変位応答を示す。(a) では、振幅の違いはほとんどないが、リンクリングの考慮により周期が短くなることが示され、周期的な振動に高次振動が載っていることが観察される。しかし、(b) では安定した減衰波形が得られ、周期に若干の影響が見られる他は高次振動の影響もない。これは、Fig.20(a),(b) の張力変動の比較でも同様であり、非減衰時に激しい振動波形が観察されるのに対して、レーリー型減衰を仮定することにより安定した張力変動へ移行する。

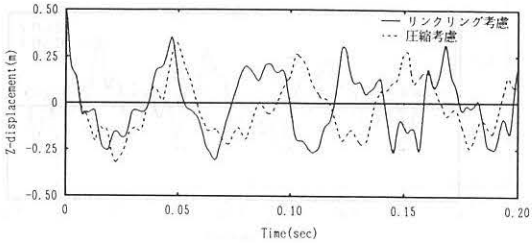
４．１．５　材料異方性の影響

材料異方性の影響を調べるため、直交異方性線形弾性材を仮定して、材料主軸（縦糸方向）をＨＰ曲面の吊り方向と押え方向にそれぞれ変化させたときの振動への影響を検討する。解析条件をTable 5 に示す。解析モデルは前項と同じであり、スパン比1/10の初期変位を与え、リンクリングを考慮して応答解析を行う。

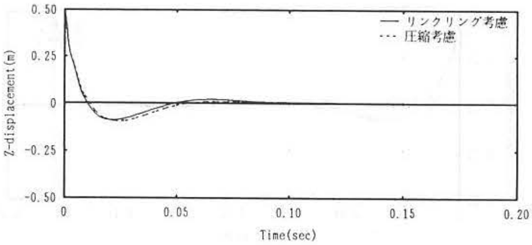
・異方性１：ＨＰ曲面の吊り方向に材料主軸がある。

・異方性２：ＨＰ曲面の押え方向に材料主軸がある。

異方性主軸の影響は、Fig.21(a),(b) の変位応答に示される通り、異方性２の方が周期が短い。すなわち、ＨＰ曲面では押え方向の剛性を高めると振動周期が短くなる。また、吊り方向に主軸がある異方性１はつり合い平衡点の上側で振動し、異方性２では下側で振動

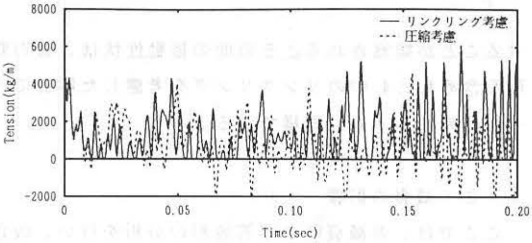


(a)　初期変位1/10(非減衰時)

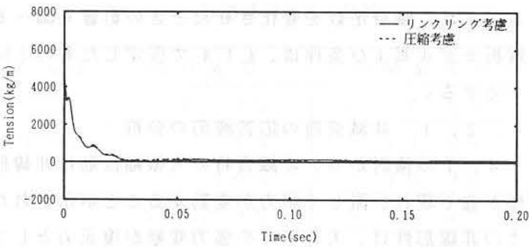


(b)　初期変位1/10(ﾚｰﾘｰ型減衰5%)

Fig.19　変位応答の比較



(a)　非減衰時

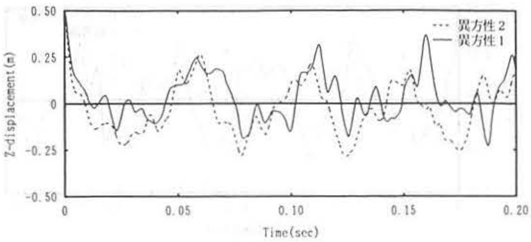


(b)　ﾚｰﾘｰ型減衰5%

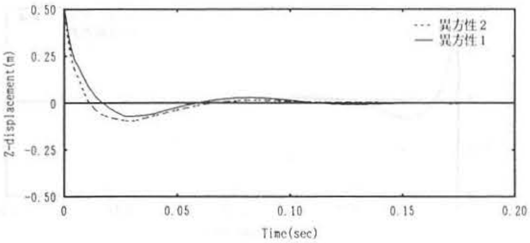
Fig.20　張力変動の比較(押え方向)

Table 5　ＨＰ曲面の解析条件

初期張力	縦横糸方向	Ｎｘ＝Ｎｙ＝１００．０ Kg/m
材料定数（異方性）	引張剛性	Ｅｘｔ＝ ４００００ Kg/m
		Ｅｙｔ＝ ２００００ Kg/m
	ポアソン比	νｘ ＝ ０．３０
		νｙ ＝ ０．１５
	せん断剛性	Ｇｔ＝ １０００ Kg/m
	膜　重　量	ｗ　＝ ２．０　Kg/m^2



(a)　初期変位1/10(非減衰時)



(b)　初期変位1/10(レーリー型減衰5%)

Fig.21　変位応答の比較

することが観察される。その他の振動性状は、張力変動を含め4.1.4 中のリンクリングを考慮した解析で述べたものと基本的に同様である。

4．2　減衰の影響

ここでは、非減衰時の応答波形の分析を行い、仮定する比例減衰の違いによる振動性状への影響を検討する。また、減衰定数を変化させたときの影響も調べる。解析モデルおよび条件は、4.1.4 で仮定したものと同一とする。

4．2．1　非減衰時の応答波形の分析

4．1の検討から、非減衰時の大振幅振動は非線形性が強く現れ、激しく張力が変動することが示された。この非線形性は、大変形時の張力変動が復元力として作用するためであり、高次振動の影響から激しい張力変動が生じるものと思われる。ここでは、非減衰時の変位応答と張力変動について分析する。

圧縮を考慮した場合の中央点の変位応答をt=0.8 秒まで求めた結果をFig.22に示す。ここからは、一定の周期で振幅が繰り返されていることが観察される。この波形の特性をパワースペクトルを用いて調べた結果をFig.23に示す。このパワースペクトルから、卓越振動数は19.5Hz（周期0.0512sec)にあり、続いて20.5Hz (0.0488sec), 22.5Hz(0.0445sec) となっている。参考のため、Fig.14に示す等張力曲面時の固有周期と比較

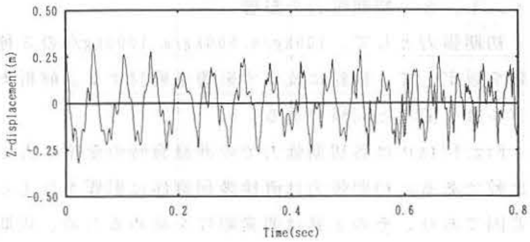


Fig.22　変位応答（初期変位1/10,圧縮考慮,非減衰）

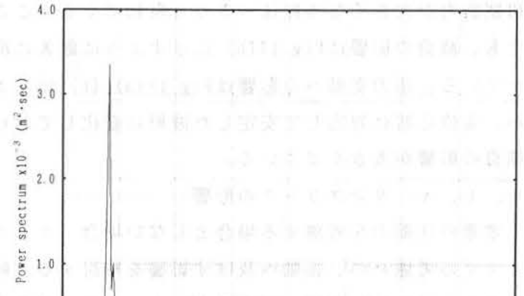
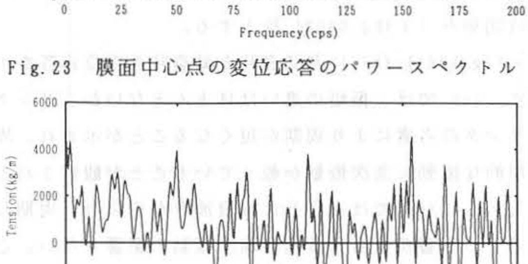
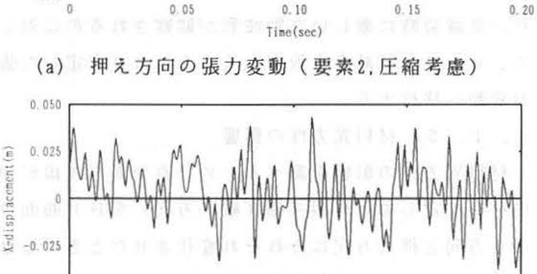


Fig.23　膜面中心点の変位応答のパワースペクトル



(a)　押え方向の張力変動（要素2,圧縮考慮）



(b)　押え方向の面内変位応答（節点4,圧縮考慮）

Fig.24　応答波形の比較（非減衰時）

するとそれぞれ18次、19次、22次の周期に相当する。

膜面の張力変動については、Fig.24(a),(b) に膜面押え方向の張力変動と対応する節点の面内変位応答を示す。ここからは、張力変動と面内変位応答の周期が完全に対応していることが分かる。すなわち、面外方

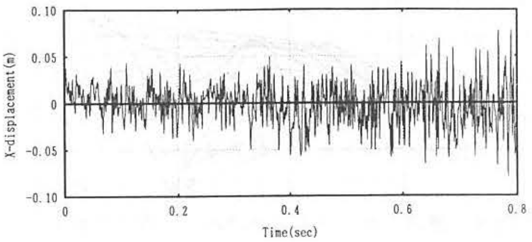


Fig.25 変位応答（節点4,押え方向,圧縮考慮,非減衰）

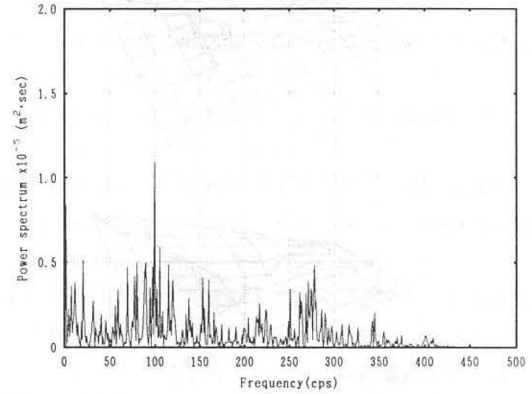
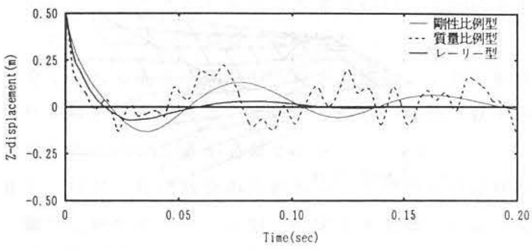
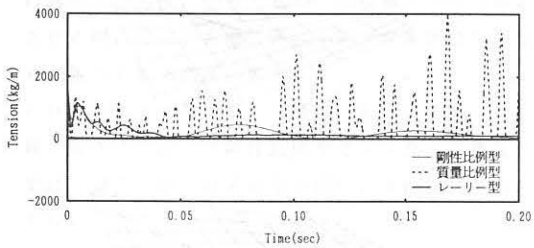


Fig.26 膜面中心点の変位応答のパワースペクトル

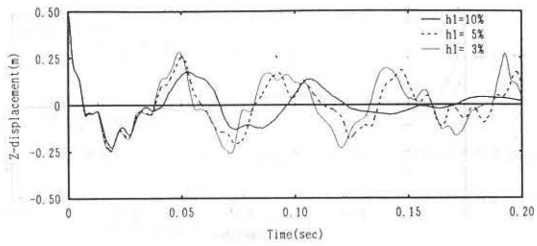


(a) 変位応答

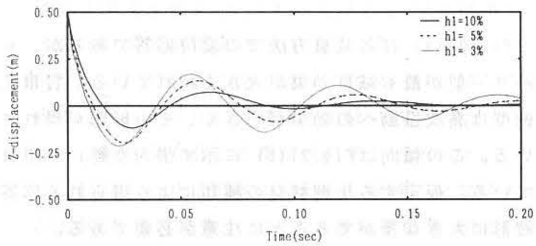


(b) 張力変動(押え方向)

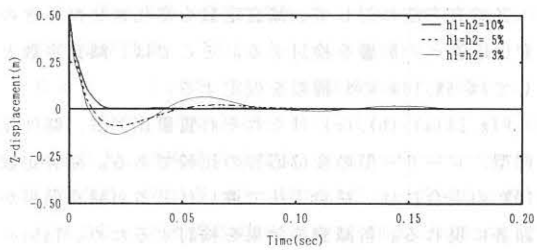
Fig.27 各減衰方法の比較(減衰定数5%)



(a) 質量比例型



(b) 剛性比例型



(c) レーリー型

Fig.28 各減衰方法での変位応答と減衰定数の関係

Table 6 等価減衰定数の比較

比例減衰	減衰定数	等価減衰定数
剛性比例型	h1＝3％	h＝ 7．0％
	5％	13．0％
	10％	16．9％
レーリー型	h1＝h2＝3％	h＝21．2％
	5％	33％
	10％	----

向の大振幅は、膜面の面内方向に変位の変動を生じさせることになり、これが面内の高次振動となって激しい張力変動を生じさせると解釈できる。この面内変位応答について、前記と同様に t =0.8秒までの応答波形を用いて、パワースペクトルにより調べた結果をFig. 25,26 に示す。Fig.26からは広範囲に卓越振動数が分布しており特定はできないが、面内を含む高次振動が影響していることがわかる。

4．2．2 減衰方法の影響

3．2では、仮定する減衰方法の違いが振動性状に大きく影響することが述べられた。ここでは、減衰方法としてレーリー型以外に質量比例型と剛性比例型を仮定した場合の影響を検討する。減衰定数は5%と仮定し、リンクリングを考慮した解析を実施する。

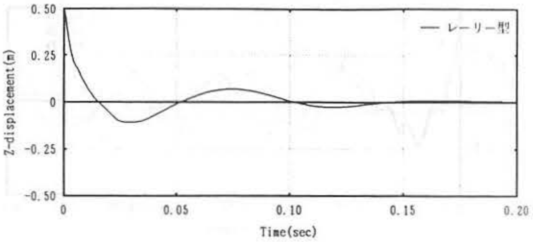


Fig.29　中央点の変位応答(初期変位1/10,レーリー型3%)

Fig.27(a) は各減衰方法での変位応答であるが、レーリー型が最も減衰効果が大きく現れている。質量比例型は高次振動への効果が小さく、その影響が現れている。この傾向はFig.27(b) に示す張力変動にも現れている。仮定する比例減衰の種類により得られる応答波形に大きな差がでることに注意が必要である。

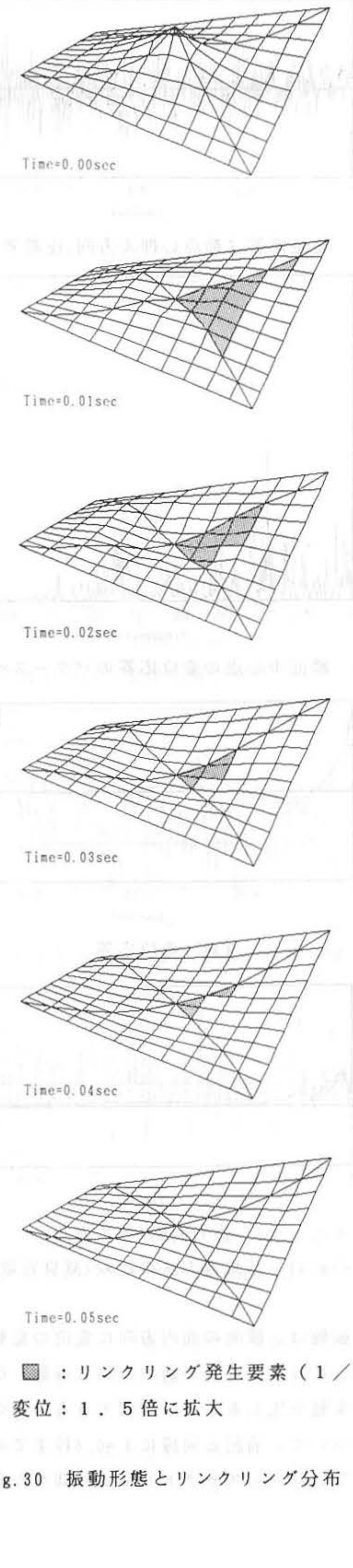
4．2．3　減衰定数の影響

各減衰方法に対して、減衰定数を変化させたときの変位応答への影響を検討する。ここでは、減衰定数として3%,5%,10% の3 種類を仮定する。

Fig.28(a),(b),(c) はそれぞれ質量比例型，剛性比例型，レーリー型の変位応答の比較である。減衰定数10% の場合には、減衰手法で違いはあるが減衰効果が顕著に現れる。各減衰の効果を検討するため、Table 6 に振動の２番目と４番目の片振幅の最大値を用いて、等価な減衰定数を算出した結果を示す。レーリー型の10% は完全に減衰状態となっている。質量比例型は、不規則振動となっているため除外した。結果は、剛性比例型とレーリー型で予想以上に減衰効果が表れ、仮定した減衰定数が大きいようにも思われる。ここでは、レーリー型が最も減衰性が大きく現れている。

4．2．4　減衰時の振動形態

膜面の振動性状を考える際、その振動形態を適確に把握しておくことが重要である。特に、時間とともに変化するリンクリングの分布状況の確認は振動に大きく影響する要因であり重要である。ここでは、4.1.5 の解析モデルを用いて、減衰振動時の膜面の振動形態とリンクリングの発生状況を確認する。減衰定数 $h_1=h_2=3\%$ のレーリー型減衰を仮定したときの中央点変位応答と振動形態をFig.29,30 に示す。



▩：リンクリング発生要素（１／４部分）
変位：１．５倍に拡大

Fig.30　振動形態とリンクリング分布

5．結言

5．1　結論

計算効率面で有効性の期待できる低次四辺形膜要素

（１点積分要素）をサスペンション膜構造の自由振動解析に適用した。解析アルゴリズムの検証を目的に平面矩形膜の横振動解析を行った。数値解析例としてＨＰ曲面を取り上げ、基礎的振動特性の把握と粘性減衰を仮定した場合の振動性状に及ぼす影響を検討した。以下に得られた結果を示す。

１）平面矩形膜の横振動解析より、微小振動の範囲では理論解と良好な一致が見られ、解析アルゴリズムの妥当性を確認した。

２）本要素で得られる変位応答波形は、他有限要素と比較して遜色ないものであった。計算効率では、三角形要素に対して約２５％、通常積分要素に対して約４０％の向上が見られた。

３）ＨＰ曲面の固有値解析より、各固有値は低次から高次まで近接しており、サスペンション膜構造は高次振動を生じやすい構造と思われる。

４）ＨＰ曲面の応答解析より、非減衰時の大振幅振動で得られる激しい張力変動は、面外方向の振動に伴って生じる面内方向の高次振動の影響と思われる。

５）非減衰時の種々の設計条件での解析結果は、基本的に本文中で考察した通り参考文献(11)と同様であった。レーリー型減衰（減衰定数5%）を仮定すると、全く異なる応答波形が得られた。解析により振動性状を検討する場合は、仮定する減衰の種類で結果が異なることに注意が必要である。

６）３種類の比例減衰の比較から、実際の減衰性状が剛性比例型やレーリー型で仮定できる場合には、変位応答や張力変動は安定した減衰波形となり、周期以外の非線形性は認められない。質量比例型で仮定される場合には、変位応答は不規則な振動波形となり、張力変動も高次振動となる。

７）ＨＰ曲面モデルに対する減衰効果はレーリー型が最も大きく、続いて剛性比例型であった。質量比例型は、減衰の効果は表れるが他の比例減衰ほど顕著でない。

５．２　今後の課題

本研究では限定されたモデルでの検討にとどまり、サスペンション膜構造の一般的な振動性状を議論するには、今後の課題として、

１）実験等による振動性状や減衰性状の把握

２）ケーブル複合構造の振動性状の把握

３）強制力（外力）が振動性状に及ぼす影響

４）材料非線形性が振動性状に及ぼす影響

などが必要と考えられる。

６．参考文献

1)西川薫，石井一夫，中田公浩：空気膜構造物の動的特性に関する研究(その１)(その２)，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和55，56年.

2)石井一夫，西川薫，坂根伸夫：空気膜構造物の動的特性に関する研究(その３)(その４)，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和59年.

3)深尾康三，対馬義幸他：低ライズケーブル補強空気膜構造物の力学性状に関する実験的研究(その４)，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和59年.

4)中山昌尚，石井一夫他：球形空気膜構造に関する風洞実験，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和60年.

5)石井一夫，西川薫，坂根伸夫：ケーブル補強空気膜構造物の動的解析に関する研究，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和60年.

6)真藤利孝，武田寿一他：空気膜構造物の振幅レベルとその特性に関する研究(その１)(その２)，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和60年.

7)丹野吉雄，深尾康三他：低ライズケーブル補強空気膜構造物の実大構造実験及び内圧制御システム，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和60年.

8)林暁光，半谷裕彦：偏平膜構造の幾何学的非線形振動解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，1992年.

9)佐々木直也：部材のたるみを考慮した膜構造の動的応答，膜構造研究論文集’８９，日本膜構造協会，No.3，1989.

10)藤井淳一：膜面のしわ波発生を考慮した振動解析，膜構造研究論文集’９１，日本膜構造協会，No.5，1991.

11)S.E.Benzley and S.W.Key:Dynamic Response of Membranes with Finite Elements,Journal of the Engineering Mechanics Div.,ASCM,EM3,1976.

12)正岡典夫，石井一夫：低次四辺形膜要素による形状解析について，膜構造研究論文集’９０，日本膜構造協会，No.4，1990.

13)正岡典夫，石井一夫：低次四辺形膜要素による応力変形解析，膜構造研究論文集’９１，日本膜構造協会，No.5，1991.

14)柴田明徳：最新耐震構造解析，最新建築学シリーズ９，森北出版，1981.

VIBRATION ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES BY USING

BILINEAR QUADRILATERAL MEMBRANE ELEMENT

WITH ONE-POINT QUADRATURE

Norio MASAOKA [*1]

SYNOPSIS

Various attempts have recently been undertaken to know dynamic nonlinear mechanical behavior of complex surfaced membrane structures. In the present paper, fundamental vibration characteristics of suspension membrane structures is undertaken to be analyzed by bilinear quadrilateral membrane elements with one-point quadrature based on the reduced integration technique, which are recognized to have high computation efficiency.

Firstly, this paper briefly represents nonlinear response analytical method using the Newmark'β method applied for the time integration. And the present analytical algorithm is examined by lateral vibration analysis of the square membrane in comparison with its real solution and also solutions by the other kinds of elements. Then, fundamental effect of viscous damping to the vibration is investigated by using this membrane. Next, free vibration characteristics of the hyperbolic parabolic membrane, one of the basic example of the suspension membrane structures, is analyzed taking consideration of effects of the several design condition. Also it is investigated effects of three kinds of proportional dampings to the analytical solution.

*1. TOMOE CORPORATION., Construction Engineering Dept.