

張力安定トラス構造の構造設計

小田 憲史*1

川口 健一*2

半谷 裕彦*2

概 要

4個のトラス材を回転自由な接合部で連結した不安定トラス構造にポストとケーブル材を利用して自己釣合張力を導入し安定化した単位構造を構成する。この単位構造を集積した張力安定トラス構造の構造挙動を調査し、設計指針(案)とそれに基づいて構造設計を行った円筒型張力安定トラス構造の施工例を述べる。

1. はじめに

大スパン構造では自重の低減が構造設計の一つの目標になる。不安定トラス構造にポストとケーブル材を利用して張力を導入し、安定性と初期剛性を確保する「張力安定トラス構造」の開発は圧縮部材の少ない構造システムの追求という視点から、自重の低減を目指すものである。張力安定トラス構造を開発するためには、自己釣合応力の導入による安定化と初期剛性の確保が重要である。

フレーム構造の安定性を簡単に判別する基準として Maxwell の法則が用いられているが、この法則は微小変位の範囲においてフレームが形態安定であるための必要条件となっている。Calladine は Maxwell の法則で要求されている数より少ない部材数で、しかも安定なフレームが存在することを指摘している[1]。その根拠として不安定なフレームにおいて微小変位の範囲でいくつかの剛体変位モードを持っているが、自己釣合応力モードが存在し初期張力の導入により安定化できる場合があることを示している。このように Maxwell の法則は形態のみの考察に基づいており、釣合条件まで含めた法則となっていない。これに対して釣合式や適合条件式を数理解析的に考察することで、フレームの特徴を把握し分類することができる。

Pellegrino は線形近似により得られる釣合マトリックスと適合マトリックスを利用してフレームの分類を

行っている[2]。同様な分類は真柄[3]をはじめ多くの文献にみることができるが、田中・半谷による分類は、一般逆行列理論を用いることにより極めて簡潔な表現となっている[4]。

張力導入により部材数、特に圧縮部材の数を減らすことができることに着目し積極的に構造システムに応用した例として、Fuller の「Tensegrity」をあげることができる[5]。

Pugh[6], Motro[7], Emmerich[8], Vilnay[9]等は種々の Tensegrity モデルを提案している。張力安定構造を実際の構造物に応用した例として、Geiger のケーブル・ドームがある[10]。これは圧縮材をポストと境界リングにまとめ構造全体が一つの自己釣合状態となって成立している。従ってドームのような閉鎖型の構造に適用する場合に有効である。

本論文では安定化された「単位構造」を集積することにより構成される張力安定トラス構造を提案する。単位構造は4本のトラス材を回転自由な接合部で連結した不安定トラス構造にポストとケーブル材を利用して、自己釣合張力を導入し安定化したものである。安定化した単位構造を集積した張力安定トラス構造の概念を説明し、その構造挙動と構造設計をのべる。このような構造は実施例が少ないことから設計指針など整備されていない。そこで設計指針(案)を作成し、それに基づいて構造安定性を確認する。

*1 太陽工業株式会社 技術本部

*2 東京大学生産技術研究所

2. 解析理論

2.1 剛体変位と自己応力

本説では文献[4]に従いトラス構造の剛体変位と自己応力についての解析理論を述べる。

トラス部材を表す座標系としてデカルト座標(0-xyz)を採用する。節点*i*(座標値: x_i, y_i, z_i)と節点*j*(座標値: x_j, y_j, z_j)を結ぶ直線のトラス部材を*a*($a=1, \dots, m$; m :部材数)とする(図2-1)。節点座標値ベクトルと方向余弦ベクトルを次式でおく。

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_j = \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_a = \begin{Bmatrix} \lambda_{ij} \\ \mu_{ij} \\ \nu_{ij} \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

部材長さを l_a とすると

$$l_a = [(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)]^{1/2} \quad (2-2)$$

ここに、 T は転置記号を表す。部材長さ l_a を用いると方向余弦ベクトルは次式となっている。

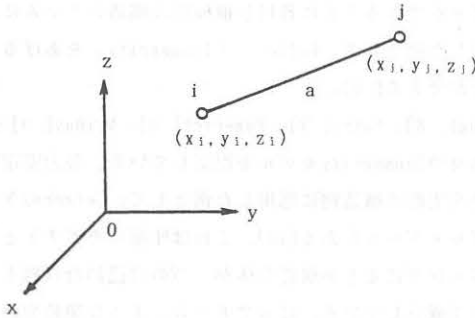


図2-1 トラス部材と節点座標

$$\boldsymbol{\lambda}_a = \frac{1}{l_a} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (2-3)$$

トラス部材の節点座標値はパラメータ*t*の関数とし、*t*の変化とともにトラス部材は位置を変化するものとする。パラメータ*t*に関する微分を上付きのドットで表すと、式(2-2)より

$$\dot{l}_a = \boldsymbol{\lambda}_a^T (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_i) \quad (2-4)$$

上式をマトリックス表示すると

$$[-\boldsymbol{\lambda}_a^T \quad \boldsymbol{\lambda}_a^T] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_j \end{Bmatrix} = \dot{l}_a \quad (2-5)$$

上式を全部材に拡大し、境界処理を行ったあと整理すると次式となる。

$$A \dot{\mathbf{x}} = \dot{l} \quad (2-6)$$

自由度数を n 、部材数を m とすると A は $m \times n$ の長方マトリックスとなる。

式(2-6)が変位速度 $\dot{\mathbf{x}}$ と伸び速度 \dot{l} とのあいだの関係式である。部材*a*に作用している軸力を n_a とし、 n_a に釣り合っている節点力を節点*i*および*j*において

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{Bmatrix} f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{jz} \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

とする(図2-2)。このとき部材*a*の釣り合い式は

$$-\lambda_a n_a = f_i, \quad \lambda_a n_a = f_j \quad (2-8)$$

上式を全部材でまとめると

$$B \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad (2-9)$$

ここに、 \mathbf{n} は軸力ベクトル、 \mathbf{f} は節点力ベクトルである。軸力ベクトルおよび節点力ベクトルは*m*次および*n*次ベクトルとなるので、 B は $n \times m$ の長方マトリックスとなる。式(2-9)が軸力 \mathbf{n} と節点力 \mathbf{f} との間の関係式である。

式(2-5)と式(2-8)を比較することにより

$$B = A^T \quad (2-10)$$

の関係が成立していることがわかる。これは反傾原理と呼ばれている。

次に剛体変位と自己応力を述べる。剛体変位は部材が剛の場合、つまり無歪で生じる変位である。伸び速度 \dot{l} が零の場合には式(2-6)は次式となる。

$$A \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2-11)$$

上式の解は $\dot{\mathbf{x}}$ を任意のベクトルとして

$$\dot{\mathbf{x}} = [I_n - A^{-1}A] \boldsymbol{\alpha} \quad (2-12)$$

ここに I_n は $n \times n$ 単位マトリックス、 A^{-1} は A のムーア・ペンローズ一般逆行列である[12]。

A のランクを r とする。つまり

$$\text{rank}(A) = r \quad (2-13)$$

このとき、式(2-12)の係数マトリックスのランクは

$$\text{rank}(I_n - A^{-1}A) = n - r \quad (2-14)$$

となる。

$$p = n - r \quad (2-15)$$

とおくと、 p は微小変位の範囲における剛体運動の自由度であり、通常不安定次数と呼ばれているものである。マトリックス $[I_n - A^{-1}A]$ を列ベクトルで表すと

$$[I_n - A^{-1}A] = [h_1, h_2, \dots, h_n] \quad (2-16)$$

式(2-14)、(2-15)より、上式における線形独立なベクトルの数は p 個であるから、それを h_1, h_2, \dots, h_p とすると式(2-12)は次式にまとめられる。

$$\dot{x} = \dot{\alpha}_1 h_1 + \dot{\alpha}_2 h_2 + \dots + \dot{\alpha}_p h_p \quad (2-17)$$

$\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dots, \dot{\alpha}_p$ は任意のスカラーであり、 h_1, h_2, \dots, h_p は剛体変位モードを表している。自己応力は節点力が零に対応する応力である。 $f = 0$ の場合には、式(2-9)は次式となる。

$$Bn = 0 \quad (2-18)$$

上式の解は、 β を任意のベクトルとして

$$n = [I_m - B^{-1}B]\beta \quad (2-19)$$

ここに I_m は $m \times m$ 単位マトリックスである。右辺の係数マトリックスのランクは $rank(B) = rank(A^T) = r$ であるから

$$rank(I_m - B^{-1}B) = m - r \quad (2-20)$$

となる。ここで、

$$q = m - r \quad (2-21)$$

とおくと q は自己釣り合いの独立なモードの数、言い換えると独立な適合条件の数であり、通常不静定次数と呼ばれているものである。ここで

$$[I_m - B^{-1}B] = [g_1, g_2, \dots, g_q] \quad (2-22)$$

と表記し、独立な列ベクトルを g_1, g_2, \dots, g_q とすると、式(2-19)は次式にまとめられる。

$$n = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_q g_q \quad (2-23)$$

ここに、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ は任意のスカラーであり、 g_1, g_2, \dots, g_q は自己応力のモードを表している。 p, q によりフレームを分類すると表2-1となる。

表2-1 p, q によるフレームの分類

$q \setminus p$	$p=0$	$p>0$
$q=0$	I 静定安定	III 静定不安定
$q>0$	II 不静定安定	IV 不静定不安定

2.2 自己応力の導入による幾何剛性

微小変位の範囲において剛体変位の存在する構造(不安定構造と言う)を安定化する方法として自己応力の導入がある。本節では自己応力を導入した場合の幾何剛性の構成について述べる。

式(2-9)をパラメータ t で微分し増分方程式を作ると次式となる。

$$B\dot{n} + \dot{B}n = \dot{f} \quad (2-25)$$

左辺の第1項および第2項を $k_E \dot{x}, k_G \dot{x}$ とおくと

$$\dot{f} = (k_E + k_G)\dot{x} \quad (2-26)$$

ここに、 k_E 弾性剛性マトリックス、 k_G は幾何剛性マトリックスである。

以下部材 a の弾性剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスを導く。式(2-8)より

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} n_a = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

両辺を t で微分すると

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} \dot{n}_a + \begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_a \end{bmatrix} n_a = \begin{bmatrix} \dot{f}_i \\ \dot{f}_j \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

上式が式(2-25)に対応するものである。まず左辺の第1項から考える。

部材 a の構成方程式 $\dot{n}_a = \frac{EA}{l_a} \dot{l}_a$ と式(2-4)より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} \dot{n}_a &= \begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} \frac{EA}{l_a} \lambda_a^T (\dot{x}_j - \dot{x}_i) \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} \frac{EA}{l_a} [-\lambda_a \ \lambda_a] \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-29)$$

よって、部材 a の弾性剛性マトリックスは

$$(k_E)_a = \frac{EA}{l_a} \begin{bmatrix} \lambda_a \lambda_a^T & -\lambda_a \lambda_a^T \\ -\lambda_a \lambda_a^T & \lambda_a \lambda_a^T \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

次に左辺の第2項を考える。式(2-3)より

$$\dot{\lambda}_a = \frac{1}{l_a} (\dot{x}_j - \dot{x}_i) - \frac{\dot{l}_a}{l_a^2} (x_j - x_i) \quad (2-31)$$

式(2-3)、(2-4)を用い、変形すると

$$\lambda_a = \frac{1}{l_a} [-I + \lambda_a \lambda_a^T \quad I - \lambda_a \lambda_a^T] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

上式を式(2-28)の左辺の第2項に代入し、幾何剛性マトリックスを求めると

$$(k_G)_a = \frac{n_a}{l_a} \begin{bmatrix} I - \lambda_a \lambda_a^T & -I + \lambda_a \lambda_a^T \\ -I + \lambda_a \lambda_a^T & I + \lambda_a \lambda_a^T \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

2.3 変分不等式による幾何学的非線形解析

張力安定トラス構造はトラス材とケーブル材からなる軽量構造である。ケーブル材は圧縮に対する剛性が極端に小さく、初期張力が消失する荷重レベルで「たるみ」が生じる。たるみが生じる荷重レベルを弛緩荷重と呼ぶ。本節では、たるみを力学的に表現することに基づく基礎方程式の誘導をおこなう。

図2-1に示す部材 a において、節点 i, j の変位を $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ とする。式(2-1)を用いると変形前、後の部材長さおよび伸びは

$$l_a = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad (2-34)$$

$$L_a = |\mathbf{x}_j + \mathbf{u}_j - \mathbf{x}_i - \mathbf{u}_i| \quad (2-35)$$

$$u_a = L_a - l_a \quad (2-36)$$

式(2-36)をテーラー展開して2次項まで採用すると

$$u_a = \lambda_a^T (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)^T \mathbf{N}_a (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad (2-37)$$

ここに

$$\mathbf{N}_a = \frac{1}{l_a} (I - \lambda_a \lambda_a^T) \quad (2-38)$$

部材 a の軸力と伸びの関係を図2-3に示す。

部材 a の初期張力を N_0 、 N_0 による伸びを u_0 とする。

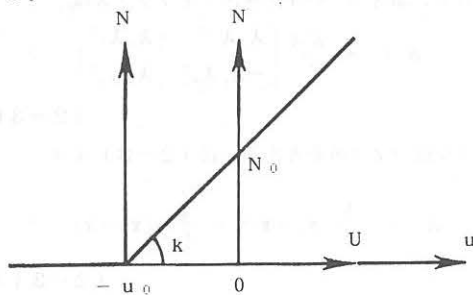


図2-3 軸力と伸びの関係

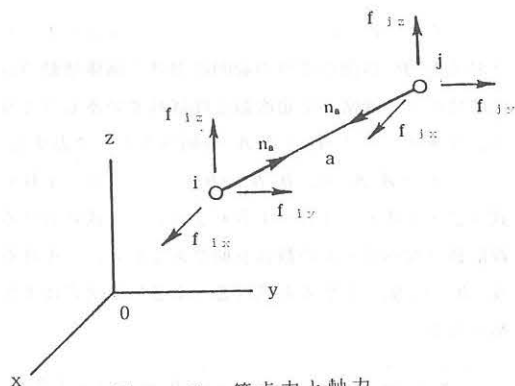


図2-2 節点力と軸力

部材 a の軸力と伸びの関係は

$$u_a \geq -u_0 : n_a = k(u_a + u_0) \quad (2-39)$$

$$u_a < -u_0 : n_a = 0 \quad (2-40)$$

ここで、

$$U_a = u_0 + u_a \quad (2-41)$$

とおくと、式(2-39)、(2-40)は次のようになる。

$$U_a \geq 0 : n_a = kU_a \quad (2-42)$$

$$U_a < 0 : n_a = 0 \quad (2-43)$$

許容変位と伸びを u_i^* 、 U_a^* 、解の変位と伸びを u_i 、 U_a とすると、式(2-41)、(2-43)を付帯条件とする仮想仕事の原理は次式となる。

$$\delta W = \sum_a n_a (U_a^* - U_a) - \sum_i f_i^T (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i) \quad (2-44)$$

ここに、 $\sum_a \sum_i$ は部材および節点についての和をとることを意味している。

式(2-44)に式(2-41)を代入すると、

$$\delta W = \sum_a n_a (u_a^* - u_a) - \sum_i f_i^T (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i) \quad (2-45)$$

伸び U_a を次式のように分解する。

$$U_a = U_a^+ + U_a^- \quad (2-46)$$

ここに、

$$U_a^+ = \frac{1}{2} (U_a + |U_a|) \geq 0 \quad (2-47)$$

$$U_a^- = \frac{1}{2} (-U_a + |U_a|) \geq 0 \quad (2-48)$$

k を単調増加関数とすると次の不等式が成立する。

$$k_a (U_a^+ - U_a^-) \geq n_a (U_a^+ - U_a^-) \quad (2-49)$$

式(2-49)を式(2-44)に代入すると仮想仕事式を表す変分不等式が得られる。つまり

$$\sum_a k_a (U_a)_+ (U_a^* - U_a) - \sum_i f_i^T (u_i^* - u_i) \geq 0 \quad (2-50)$$

以上より、式(2-42)、(2-43)を付帯条件とする仮想仕事式は、付帯条件なしの変分不等式、つまり式(2-50)に変換された。図2-3に示す軸力・伸び関係の片側応力問題 ($U_a \geq 0$ では軸力を伝達し、 $U_a < 0$ では伝達しないので片側応力問題と言われる[12]) に対するポテンシャル関数として次式を採用する。

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a (U_a)_+^2 - \sum_i f_i^T u_i \quad (2-51)$$

このとき片側応力問題の解は式(2-51)のポテンシャル関数を最小化する値として得られる。以下にこのことを示す。

許容変位と許容伸びによるポテンシャル関数を Π^* とすると

$$\Pi^* - \Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \{ (U_a^*)^2 - (U_a)_+^2 \} - \sum_i f_i^T (u_i^* - u_i) \quad (2-52)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_a \{ (U_a^*)^2 - (U_a)_+^2 \} - k_a (U_a)_+ (U_a^* - U_a) \\ = \frac{1}{2} k_a \{ U_a^* - U_a \}_+^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2-53)$$

上式を式(2-52)へ代入すると

$$\Pi^* - \Pi \geq \sum_a k_a (U_a)_+ \{ U_a^* - U_a \}_+ - \sum_i f_i^T (u_i^* - u_i) \quad (2-54)$$

上式の右辺は式(2-50)に一致しているから

$$\Pi^* \geq \Pi \quad (2-55)$$

よって、解 u_i は式(2-51)で導入したポテンシャル関数を最小化する値として得られる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \frac{\{U_a + |U_a|\}^2}{4} - \sum_i f_i^T u_i \quad (2-56)$$

上式に式(2-41)を代入すると

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \frac{\{u_0 + u_a + |u_0 + u_a|\}^2}{4} - \sum_i f_i^T u_i \quad (2-57)$$

ここで、次の記号を導入する。

$$sgn = \begin{cases} 1: u_a + u_0 \geq 0 \text{ のとき} \\ -1: u_a + u_0 < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2-58)$$

上式を用いると式(2-57)は次式となる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \frac{(1+sgn)^2}{4} (u_a + u_0)^2 - \sum_i f_i^T u_i \quad (2-59)$$

上式のポテンシャル関数は付帯条件が付いていないので、 $\delta \Pi = 0$ より荷重・変位関係を求めることができる。つまり、

$$\delta \Pi = \sum_a k_a \frac{(1+sgn)^2}{4} (u_a + u_0) \delta u_a - \sum_i f_i^T \delta u_i = 0 \quad (2-60)$$

式(2-37)より δu_a を求めると、

$$\begin{aligned} \delta u_a &= \lambda_a^T (\delta u_j - \delta u_i) + \{u_j - u_i\}^T N_a (\delta u_i - \delta u_i) \\ &= \{ \lambda_a^T + \{u_j - u_i\}^T N_a \} (\delta u_j - \delta u_i) \end{aligned} \quad (2-61)$$

上式を式(2-60)に代入し、 j 節点の釣り合い式を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_a k_a \frac{(1+sgn)^2}{4} [\{ \lambda_a + N_a (u_j - u_i) \} \\ \{ \lambda_a^T + \frac{1}{2} \{u_j - u_i\}^T N_a \} (u_j - u_i) \\ + \{ \lambda_a + N_a (u_j - u_i) \} u_0] = f_j \end{aligned} \quad (2-62)$$

ただし、 \sum_a の a は j 節点に集まる部材である。

式(2-62)が2次の非線形項まで採用した基礎方程式となる。

3. 単位構造の構成と構造挙動

3.1 単位構造の構成

本論文で扱う張力安定トラス構造は図3-1に示す単位構造を集積して構成する構造システムである。

図3-1(a)で示す4本のトラス材からなる構造は不安定トラスで表2-1のⅢに属する。この不安定トラスにポストとポストの上下端と接合部とを結ぶ8本のケーブルで張力を導入し安定化する。安定化した構造を「単位構造」と呼ぶことにする。この単位構造は $r = 12$ であり、単位構造全体としての剛体変位と剛体回転(6個)を除くと、 $n = 18$ 、 $m = 13$ であるから、式(2-15)、(2-21)より $p = 0$ 、 $q = 1$ となる。つまり、単位構造は表2-1のⅡに属し、機構を形成する剛体変位モードは無く、自己応力モードを1個有している。

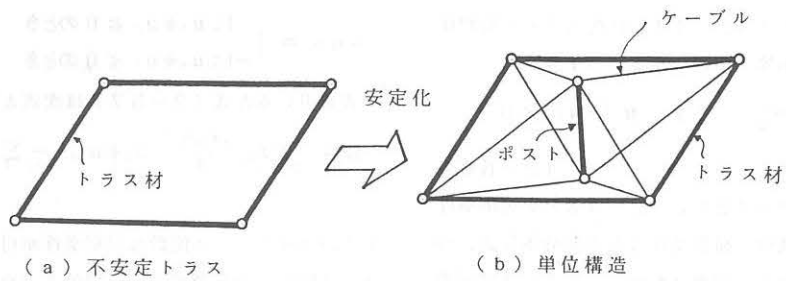


図 3-1 単位構造の構成

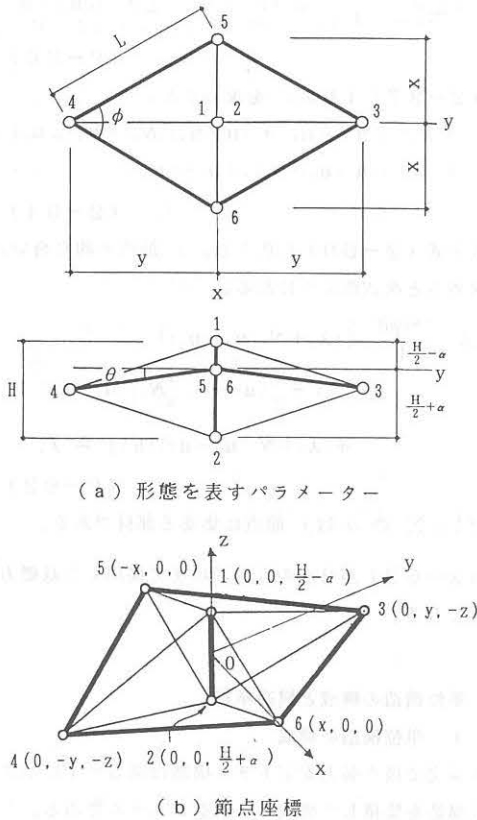


図 3-2 単位構造の形態とパラメーター

3.2 単位構造の自己応力モード

単位構造は $q = 1$ であるから、式 (2-23) において 1 個の自己応力が存在する。つまり、

$$n = \beta_1 g_1 \quad (3-1)$$

自己応力は式 (2-19) を用いても求めることができるが、1 個であることがわかっているので、各節点の力の釣り合い式より求めることができる。両者の結果は一致しているので、ここでは結果のみを以下に述べる。

節点 i と節点 j を結ぶ部材の自己応力を n_{ij} とする。図 3-2 に示す節点座標を用いると

$$n_{35} : n_{13} : n_{23} : n_{15} : n_{25} : n_{12}$$

$$\begin{aligned} &= -H\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &: 2\left(\frac{H}{2} + \alpha\right)\sqrt{y^2 + \left(\frac{H}{2} - \alpha + z\right)^2} \\ &: 2\left(\frac{H}{2} - \alpha\right)\sqrt{y^2 + \left(\frac{H}{2} + \alpha - z\right)^2} \\ &: 2\left(\frac{H}{2} + \alpha - z\right)\sqrt{x^2 + \left(\frac{H}{2} - \alpha\right)^2} \\ &: 2\left(\frac{H}{2} - \alpha + z\right)\sqrt{x^2 + \left(\frac{H}{2} + \alpha\right)^2} \\ &: -8\left(\alpha z + \frac{H^2}{4} - \alpha^2\right) \end{aligned} \quad (3-2)$$

ここで、

$$n_{35} = n_{36} = n_{45} = n_{46}, \quad n_{13} = n_{14} \quad (3-3)$$

$$n_{15} = n_{16}, \quad n_{25} = n_{26}, \quad n_{23} = n_{24}$$

式 (3-2) において $L=288\text{ cm}$, $H=150\text{ cm}$, $\theta=62.8^\circ$ の場合の α と自己応力の関係を図 3-3 に示す。初期形態においてすべての張力材がなるべく弛緩状態から遠い状態にあることを目標とする場合には、1-5 部材、1-6 部材の軸力曲線と 2-3 部材、2-4 部材の軸力曲線の交点に対応する α の値を採用すればよいことになる。また、次節で述べるように、この単位構造では 1-5 部材、1-6 部材が最初に弛緩し、2-3 部材、2-4 部材はその荷重レベルまで軸力変化は小さい。そこで 1-5 部材、1-6 部材に、あらかじめ大きめの張力が導入できるような α の値を採用することも考えられる。

n_{15} と n_{23} の交点に対応する α の値を採用したときの自己応力モードを図 3-4 に示す。

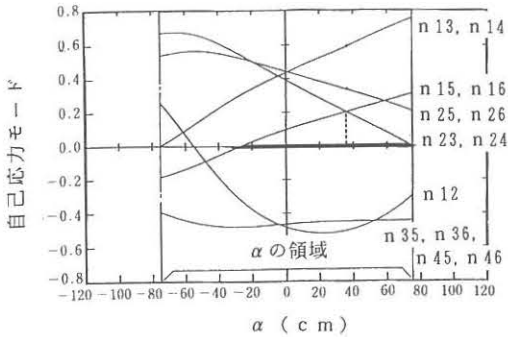


図3-3 α と自己応力の関係

3.3 単位構造の構造挙動

単位構造の解析モデルを図3-5に、その部材諸量を表3-1に示す。節2.2で導入した弾性剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスを用いて幾何学的非線形解析を行い、単位構造の載荷能力などを調査する。

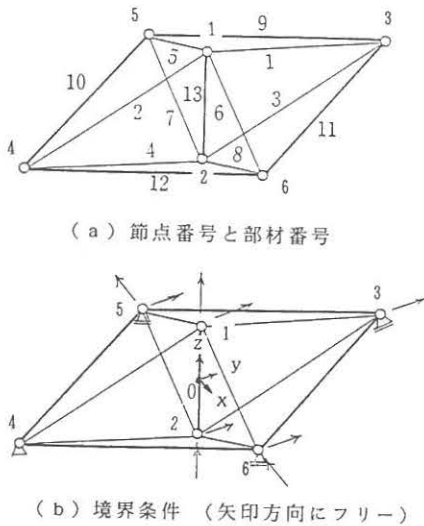


図3-5 単位構造の解析モデル

表3-1 解析モデルの部材諸量

形状パラメーター					
L (cm)	H (cm)	θ (°)	ϕ (°)	α (cm)	P_0 (t)
300	150	11.25	60.0	35.9	1.0
トラス材及びポスト材 (STK41)					
ϕ (mm)	t (mm)	A (cm ²)	I (cm ⁴)	z (cm ³)	i (cm)
76.3	3.2	7.349	49.2	12.9	2.59
ケーブル材 (棒鋼, $\sigma = 2,400$ kgf/cm ²)					
ϕ (mm)	A (cm ²)				
16.0	2.01				

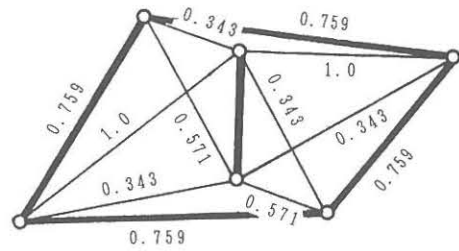


図3-4 自己応力モード

荷重はポストの頂部節点1のz方向に増分荷重(10kgf)を載荷していく。いずれかの部材に降伏が生じるまで解析は続ける。なお幾何学的非線形解析は修正荷重増分法を用いて行った。

図3-6は荷重と部材応力のあいだの関係を示すグラフである。荷重が880kgfのとき、節点1と5および節点1と6を結ぶ張力材で最初の弛緩が生じ、次いで荷重が4,560kgfのとき、節点1と3および節点1と4の張力材が弛緩する。

図3-7は荷重と節点1と2の鉛直方向変位の関係を図示したものである。880kgfと4,560kgf付近でケーブルが弛緩するが、荷重・変位曲線上では最初の弛緩のみが明瞭に現れている。

ケーブルに「たるみ」が生じてから降伏に至るまでの荷重は、構造物の余裕度指標の一つで設計指針を定める上で重要である。いずれかの張力材で張力の弛緩が生じたときの荷重を弛緩荷重(P_A)、降伏が生じたときの荷重を降伏荷重(P_B)と言い、降伏荷重を弛緩荷重で割った値を降伏荷重比(ρ_f)と定義する。

$$\rho_f = \frac{P_B}{P_A} \quad (3-4)$$

この単位構造の解析結果では $\rho_f = 7.6$ となっている。

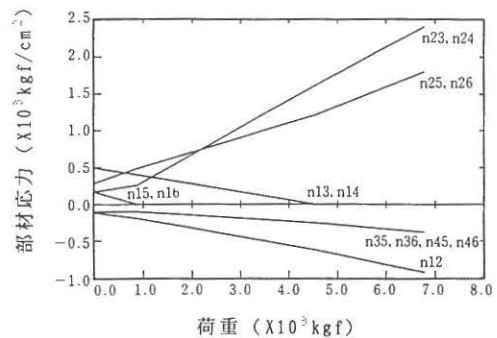


図3-6 荷重・部材応力曲線

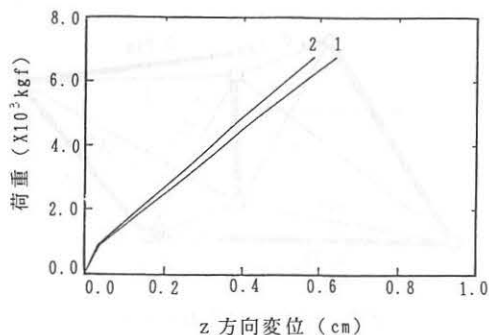


図 3-7 荷重・z 方向変位曲線

4. 張力安定トラス構造の構造挙動

張力安定トラス構造は前章で述べた単位構造を集積することにより構成される。図 4-1 に示す円筒型張力安定トラス構造にたいして構造解析を行い、本論文で提案する設計指針(案)によって構造安全性を確認する。その上実験棟の施工について述べる。

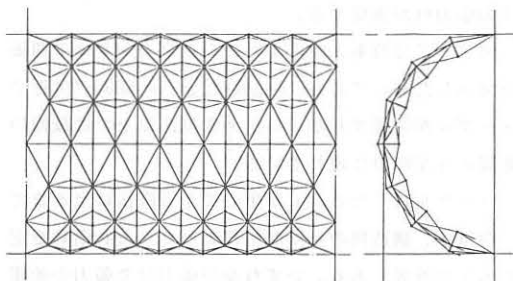


図 4-1 円筒型張力安定トラス構造

4.1 円筒型張力安定トラス構造の構造挙動

図 4-2 に解析に用いた円筒型張力安定トラス構造を示し、 $P_0=1.32$ ton とし、そのほかの部材諸量は

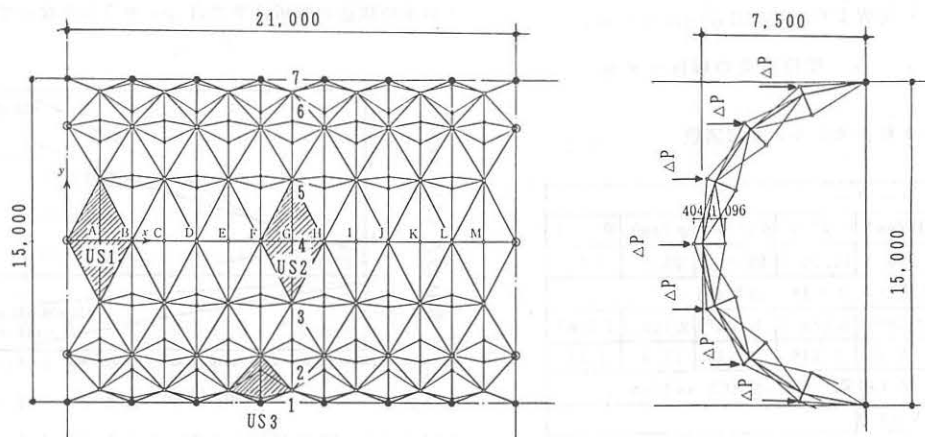


図 4-2 円筒型張力安定トラス構造の解析モデル

表 3-1 と同じとする。この円筒型張力安定トラス構造は、同一形状の単位構造を 46 個集積したものである。境界条件は円筒型の長手方向の境界を全てピン支持とし、妻側の境界点を x 方向にローラー支持としている。図 4-2 の黒丸の節点はピン支持を、白丸の節点はローラー支持を表している。解析は 10kgf を増分荷重として、増分型解析で実施した。

図 4-3 ~ 図 4-5 に解析結果としての単位構造 US1, US2, US3 における部材の荷重・軸力曲線、節点 A ~ M, 節点 1 ~ 7 の荷重・変位曲線および荷重ステップ 30 (最初に部材に弛緩が生じる荷重) における変位モードを示す。

本解析では最初に張力材の張力が消失する荷重レベルまで追跡している。実際には荷重ステップ 30 (各ポストの頂部に 300kgf の鉛直下向きの荷重が加わっているレベル) において、US1 の部材 382 と 386 が最初に弛緩している。図 4-5 の変位図からわかるように両妻側の頂部の境界にある単位構造と両側面の脚元部分の境界のある単位構造に変形が集中している。従って結果的には図 4-3 (a) からわかるように US1 で弛緩が生じているが、図 4-3 (c) から明らかのように US3 でも弛緩が生じる直前となっている。これに対して US2 では部材軸力の変化は少なく、特に張力の減少は認められない。

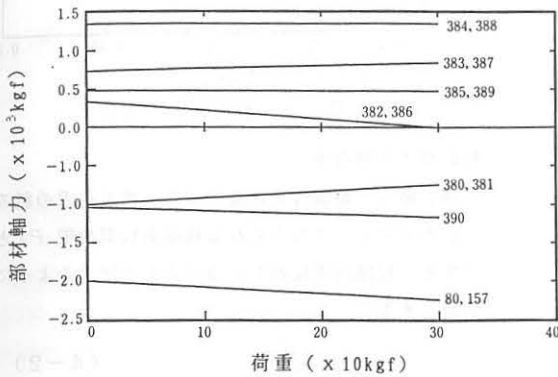
荷重ステップ 30 において中央節点 G に最大変位が生じており、0.2 cm となっている。この値は円筒の直径であるスパンに対して約 1/7,500 となっており、張力安定トラス構造は剛性の高い構造であることがわかる。部材に降伏が生じる荷重レベルを $\rho_f = 7.6$ を用いて推定すると約 585 kgf/m² となる。

本構造システムでは個々の単位構造が完結した自己釣合状態になっているため、いずれかの単位構造内において、部材の降伏あるいは破断等が生じた場合にも、その単位構造を除去した構造として成り立っている限り、構造全体が崩壊することはない。

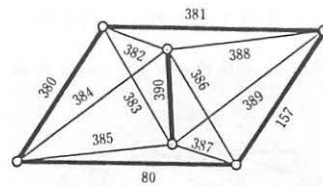
4.2 設計規準

張力安定構造に対する設計指針はまだ整っていない。そのため実験棟建設に当たって、以下に述べる規準を満足するよう構造設計を行った。

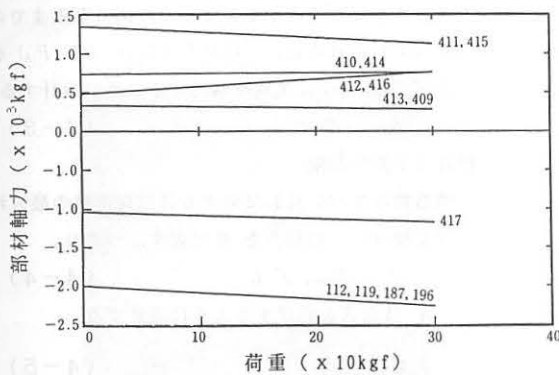
本節で設計指針(案)として紹介しておく。



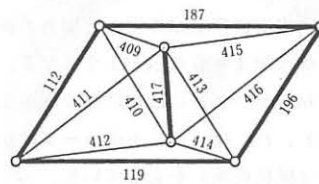
(a) US1



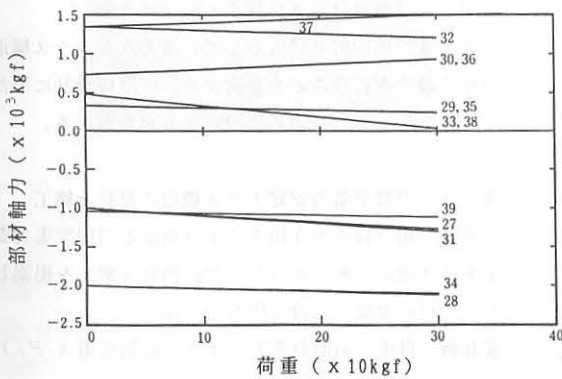
US1の部材番号



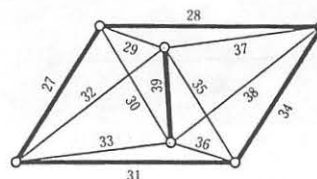
(b) US2



US2の部材番号

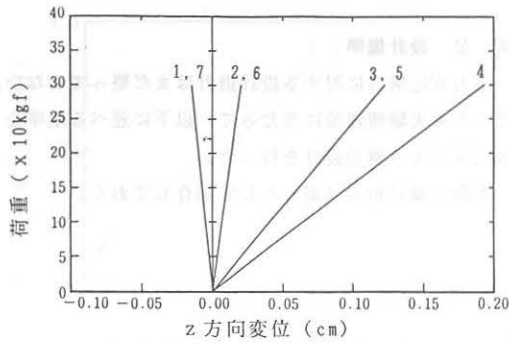


(c) US3



US3の部材番号

図4-3 荷重・軸力曲線



(a) 節点1~7のz方向変位

図4-4 荷重・z方向変位曲線

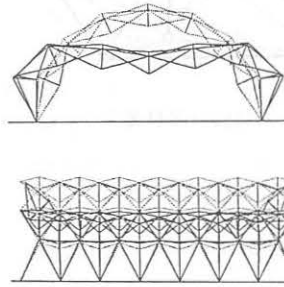


図4-5 変位図(破線: 変形前, 実線: 変形後)

張力安定トラス構造に荷重が作用した場合の典型的な荷重・変位関係は図4-6に示すようになる。ここで、 P_A はいずれかのケーブルに最初にたるみが生じる荷重(弛緩荷重)、 P_B はいずれかのケーブルが最初に降伏する荷重(降伏荷重)を表している。

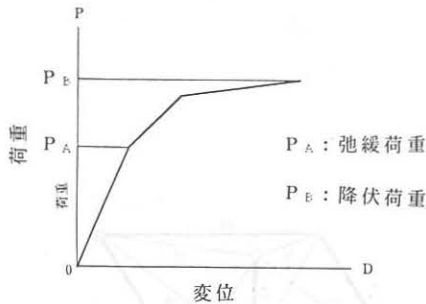
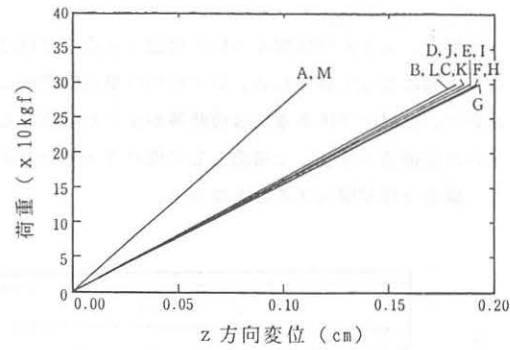


図4-6 荷重・変位関係

指針1: 長期荷重

構造物の自重と積載荷重の和を長期荷重 P_P とする。長期荷重に対しては次式を満足するように設計する。

$$P_P \leq \frac{2}{3} P_A \quad (4-1)$$



(b) 節点A~Mのz方向変位

指針2: 短期荷重

風、積雪、地震等の短期的に作用する荷重の組み合わせによって与えられる荷重を短期荷重 P_T とする。短期荷重に対しては次式を満足するように設計する。

$$(P_P + P_T) \leq \frac{2}{3} P_B \quad (4-2)$$

指針3: 降伏荷重比

ケーブルにたるみが生じてから降伏に至るまでの余裕をもたせるため、降伏荷重比 $\rho_f (P_B/P_A)$ を設定する。 ρ_f は次式を満足するように設計する。

$$\rho_{base} \leq \rho_f \quad (4-3)$$

指針4: 変位制限

構造物のスパン長 L に対する長期荷重時の最大鉛直変位 D_{max} の割合を β で表す。つまり、

$$\beta = D_{max} / L \quad (4-4)$$

β は次式を満足するように設計する。

$$\beta \leq \frac{1}{\gamma_0} \quad (4-5)$$

なお、ケーブルにたるみが発生する前に降伏が生じる場合には指針2, 4に従うものとする。

以上4つの指針を目安として、張力安定トラス構造の構造設計を行うことを提案する。実際の設計に当たっては ρ_{base} と γ_0 を適当に設定する必要がある。

4.3 円筒型張力安定トラス構造の設計と施工

前節で鉛直荷重が作用する単位構造と円筒型張力安定トラス構造の解析を行い、設計指針(案)を提案した。これらを使った設計例を述べる。

設計例: 自重(鉛直荷重)のような長期荷重 (P_P) に対する設計例

図3-2に示す単位構造の1-3部材, 1-4部材の初期約合い張力 ($n_{13} = n_{14}$) を1.32ton

としたとき、図4-3より弛緩荷重は、

$$P_A = 38.5 \text{ kgf/m}^2$$

$$= 300 \text{ kgf} / 7.8\text{m}^2 \quad (4-6)$$

である。解析に使用した部材諸量と屋根を膜構造にしたときの自重は、約 20 kgf/m^2 である。

$$P_P = 20 \text{ kgf/m}^2 \quad (4-7)$$

従って式(4-1)を満たす。

$$P_P = 20 \text{ kgf/m}^2 \leq P_A = \frac{2}{3} \times 38.5$$

$$= 25.7 \text{ kgf/m}^2 \quad (4-8)$$

変位については式(4-5)の係数 $\gamma_0 = 7,500$ であり、非常に小さい。

積雪、風荷重などの短期荷重についても同様な検討を行い、屋根構造として採用が可能であることが判ったため、解析モデルとほぼ同じ形態の実験棟を建設し、実測を行い安全性の確認をする。本節では、その施工の一部を写真で紹介する。

写真4-1は、完成後の内観を示す。

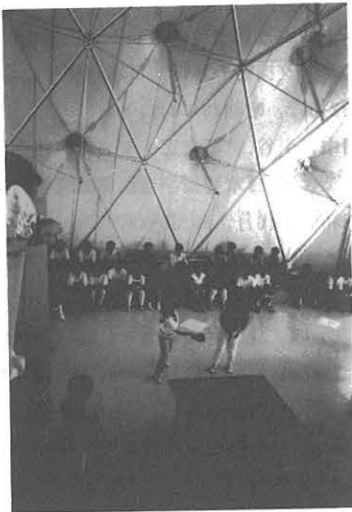


写真4-1 内観

写真4-2は、仮設足場上でトラス材を組み立てた状態である。この状態では不安定構造であるため、各節点を足場から仮支持する。

写真4-3は、ケーブル材を取り付けた後、張力を導入している様子を示す。自己釣合張力を設計値とほぼ同じになるように施工するため、ケーブル材にターンバックル付きの棒鋼を用い、あらかじめ棒鋼の張力

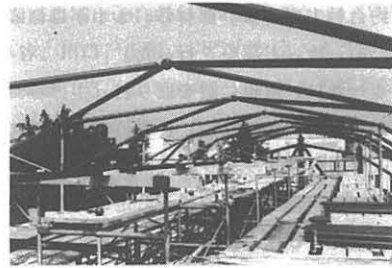


写真4-2 トラス材組立



写真4-3 張力導入



写真4-4 膜の取付



写真4-5 外観

とターンバックルのトルク値の関係のキャリブレーションを行った。施工中もトラス材とケーブル材の棒鋼にひずみゲージを貼り、施工中の軸力を測定した。図4-7は施工中に各部材に導入された軸力を示すもので、破線が単位構造の1-5部材が1.0tonのとき

の自己釣合軸力である。部材5, 11がほぼ零になっていたため、後ほど調整を行った。

写真4-4は、屋根に膜を取り付け中の写真である。膜の再緊張が可能のように、各単位構造のポスト頂部に突き上げ用のスクリュウを設置した。尚膜材は「膜構造建築物技術基準・同解説」に定めるC種を採用した。写真4-5は、妻面の工事が完了し全体の完成写真である

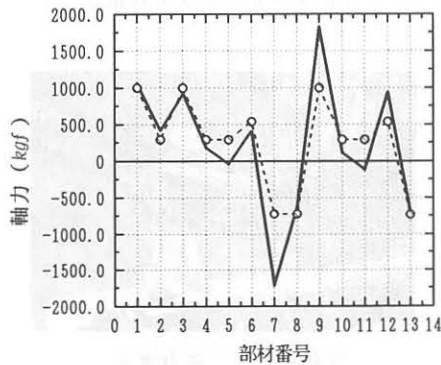


図4-7 各部材に導入された軸力(実線)と解析値(破線)

5. むすび

大スパン構造の設計においては自重の低減が構造設計のひとつの目標である。本論文では、不安定トラス構造にポストとケーブルを利用して張力を導入し、安定性と初期剛性を確保する「張力安定トラス構造」を提案した。この張力安定トラス構造に対して、理論解析により構造挙動を調査した。得られた結論を以下に述べる。

- 1) 不安定構造物を理論的に扱うための解析理論を提示した。具体的には、適合条件式と釣合式を独立に利用する事により、剛体変位と自己応力の抽出、剛体変位モードと自己応力モードの計算法、自己応力の導入による幾何剛性の構成などを定式化した。
- 2) ケーブルのたるみを考慮した幾何学的非線形解析のための基礎方程式を変分不等式を利用して誘導した。
- 3) 4個のトラス材を回転自由な接合部で連結した不安定トラス構造にポストとケーブルを利用して自己応力を導入し、安定化した単位構造を張力安定トラス構造の基本単位として構成した。単位構造の鉛直荷重に対する構造挙動を調べた。
- 4) 単位構造を集積して構成する円筒型張力安定トラス構造の構造挙動を理論解析に拠って調査し、屋根

構造として採用可能であることを示した。

その上、実験棟の建設を行ったので、その施工について述べる。

- 5) 実験棟の構造設計を行った。その結果、屋根重量は約 20 kgf/m^2 となっている。この構造設計のため、設計指針(案)を提案した。

本論文は参考文献[13]~[17]を、まとめたものである。

参考文献

- [1] C.R.Calladine, "Buckminster Fuller's "Tensegrity" Structures and Clerk Maxwell's Rules for the Construction of Stiff Frames", *Int. Jour. Solids Structures*, 1978, Vol. 14, pp. 161-172.
- [2] S. Pellegrino, "Static Responce of Prestressed Mechanisms", Cambridge University Engineering Department, CUED-Struct/TR. 120.
- [3] 真柄, 国田, 川股, "混合法によるケーブルネットの解析, その(1) 不安定架構の性質およびリンク機構の解析" 日本建築学会論文報告集, 第218号, 昭和49年4月, pp. 37-48.
- [4] 田中, 半谷, "不安定トラスの剛体変位と安定化条件", 日本建築学会論文報告集, 第356号, 昭和60年10月, pp. 35-43.
- [5] R.B.Fuller, "Tensile-Integrity Structures", U.S. Pat. 3,063,521, 1962.
- [6] A.Pugh, "An Introduction to Tensegrity", University of California, Press, 1976.
- [7] A.Motro, "Tensegrity Systems-Latest Development and Perspectives", *Proc. of IASS*, Madrid, 1989.
- [8] D.G.Emmerich, "Exercices de Geometrie Constructive Traveaux d' etudiants", Ecole Nationale Supérieure des Beaux Arts, Paris, Architecture, 1970.
- [9] O.Vilnay, "Structures Made of Infinite Regular Tensegric Nets", *IASS Bulletin No. 63*, Vol. XVIII-1, Apr., 1977, pp. 51-57.
- [10] D.H.Geiger, "Roof Structure", U.S. Pat. 4,736,553, 1986.

- [11] 柳井, 竹内, “射影行列・一般逆行列・特異値分解”, 東京大学出版会, 1983.
- [12] P.D.Panagiotopoulos, “A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact and Friction Boundary Value Problem in the Theory of Elasticity”, *Ingenieur-Archiv*, 44, 1975, pp. 421.
- [13] 半谷, 川口, 小田, “張力安定トラス構造の自己応力と構造挙動”, 生産研究, 第42巻4号, 1990, 4.
- [14] Y.Hangai, K.Kawaguchi and K.Oda, “The Structural Behaviours of Truss Structures Stabilized by Cable Tension”, *Proc. of The Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures*, Taegu, Korea, 1990, 8.
- [15] 半谷, 川口, 小田, “張力安定トラス構造の構造挙動 その1: ユニットモデルの解析結果, その2: 円筒型モデルの解析結果”, 日本建築学会大会梗概集, 1990, 10.
- [16] 半谷, 川口, 小田, “張力安定トラス構造の構造挙動と構造設計”, 東京大学生産技術研究所報告, 第36巻, 第2号, 1991, 5.
- [17] Y.Hangai, K.Kawaguchi and K.Oda, “Self-Equilibrated Stress System and Structural Behaviour of Truss Structures Stabilized by Cable Tension”, *International Journal of Space Structures* (投稿中, vol.7, No.2, 1992)

THE STRUCTURAL DESIGN OF TRUSS STRUCTURES STABILIZED BY CABLE TENSION

Kenshi ODA *1

Kenichi KAWAGUCHI*2

Yasuhiko HANGAI *2

SYNOPSIS

In the design of large span structures, there exists the dilemma that, as the span of the structure is increased, many structural members end up carrying their own self-weight. Therefore, one of objects in the structural design of large span structures is to save on self-weight. In the paper, a structural system named “Truss Structures Stabilized by Cable Tension” is developed in order to reduce its own weight by reducing the number of compression members. An unstable truss structure composed of four truss members connected by pin-joints is stabilized by the self-equilibrated system which is introduced by using a post and eight cables. This stabilized truss structure is named “Unit Structure”. This unit structure has no inextensinal displacement, but a self-equilibrated stress system. Then the unit structure belongs to the statically indeterminate and kinematically determinate frame. The truss structures stabilized by cable tension is an assemblage of the unit structure. As the unit structure is itself a statically closed and stabilized, it can be employed to assemble structure with various shapes. The structural behaviours of both the unit structure and the barrel vault shape truss structures stabilized by cable tension are investigated analytically, and the guide lines in the practical design are provided, then the construction of barrel vault model roof is discribed.

*1. Engineering Division, Taiyo Kogyo Corporation

*2. Institute of Industrial Science, University of Tokyo