

線材置換による膜構造解析法

小竹 達也*1

梗 概

膜構造解析においては、現在、膜要素による有限要素法によって解かれる場合が多い。しかし、その解法は複雑であり、一般化しにくい。ここでは、膜構造を線材によって成ると考え、膜曲面をネット状として解析する方法を提案する。これによって、複雑な膜構造解析を実用的な精度で解析しうる方法を示す。

1. 研究の目的

膜構造は大空間構造物の構造技術として、世界的に関心が持たれており、わが国においても東京ドームの建設以来、誰もがその実用性を認めるところである。しかし、建築物としてのその設計法は、未だに確立していないというのが現状である。

膜構造の（構造設計）解析法として、現在では三角形または四角形要素による有限要素法がよく使われている。その概略としては、形状解析（構造的な膜応力のつり合い条件を満足しつつ、想定する曲面形状に近い形状を決定するというもの）により求められた初期形状について応力変形解析（初期形状曲面に様々な外力が作用した場合の変形・膜応力より、その構造物の安全性を評価するというもの）を行うといったところであるが、膜構造物においては、大変形による幾何学的非線形性、リンクリングの発生、異方性材料としての材料非線形などを考慮しなければならない。

ゆえに、その解法は複雑であり、一般化しにくいのである。また、三角形要素であれば複雑な曲面への対応がよく、適用性は広いが、その形態に对称性がある場合、三角形要素では対応しにくい場合もあり、応力集中箇所での応力のばらつきも生じやすい。そこで、

このような形態の場合は四角形要素の方が対応性がよいようだが、この場合、プログラムも更に複雑になり計算時間も増す傾向にあるようである。

そこで、ここでは膜構造を線材によって成ると考え、曲面をネット状として解析する応力・変形解析法を研究することが本研究の目的である。そしてこれによって、膜構造物を実用的な精度で（パソコンレベルで）解析しうる方法を提案する。また、本研究においては線材置換要素を四角形とし、これにより先に挙げた三角形要素における問題点と四角形要素における収束性の欠点に対処することを試みる。

2. 線材置換理論

線材置換を行う際、次のことが問題となってくる。

- ・線材方向と糸方向が異なる場合の措置
 - ・せん断剛性の評価法
 - ・リンクリング問題への対応
 - ・線材の応力から膜応力を評価する方法
- したがって、上記の問題点をクリアーした置換理論が必要となる。

2.1 線材要素の剛性

*1 大成建設

ここでは問題をより簡単にするため、次のことを条件とする。

- ・線材置換する膜要素は台形とする
- ・線形解析及び等方性解析による置換
- ・線材は引張のみ剛性を持つ

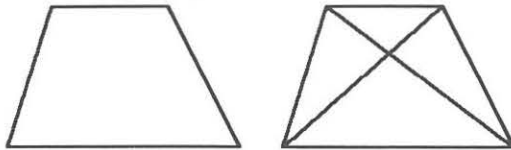


図-1 四角形膜要素と線材置換要素

図-1のように、四角形膜要素を2組4本の縦横部材と2本のブレース材に置換し、膜要素の面内剛性（縦横各引張剛性、せん断剛性）から各部材剛性を算出する。ただし、基本的に膜の面内せん断剛性はブレース材が負担する。

いま、図-2のように辺*i j*を固定し、点*k*に*x*方向に荷重*P_x*を与えたときの変位が*δ*であった場合を考える。ここで、膜要素を図-2のような2つの三角形要素に分割して考えた場合、要素②については不安定であるのでここでは考えないことにする。そこで、要素①について膜要素、線材要素それぞれの剛性マトリックスを作成し、比較することによって部材剛性を算出することにする。

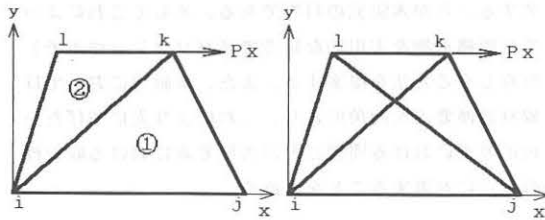


図-2

2.1.1 三角形膜要素の剛性マトリックス

三角形要素の剛性マトリックス $[K_M]$ は要素の局所座標系で次のように与えられる。

$$[K_M] = \int \int \int [C^{-1}]^T [B]^T [D] [B] [C^{-1}] dx dy dz \quad \dots (1)$$

[C] : 節点変位-未定係数マトリックス

[B] : 歪み-未定係数マトリックス

[D] : 応力-歪みマトリックス

ここで、各マトリックスの内容は、以下の通りである。

$$[C^{-1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k & 0 & x_k y_i & 0 & x_i y_j & 0 \\ -x_k y_j & 0 & -x_i y_k & 0 & -x_j y_i & 0 \\ y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & x_j y_k & 0 & x_k y_i & 0 & x_i y_j \\ 0 & -x_k y_j & 0 & -x_i y_k & 0 & -x_j y_i \\ 0 & y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots (4)$$

ここで、*A* : 三角形の面積、 ν : ポアソン比

以上の(2)~(4)式を(1)式に代入すれば剛性マトリックス $[K_M]$ が求まり、その内容は次のようになる。

$$[K_M] = \frac{Et}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{jk}^2 + \lambda x_{kj}^2 & \nu y_{jk} x_{kj} + \lambda x_{kj} y_{jk} & y_{jk} y_{ki} + \lambda x_{kj} x_{ki} \\ & x_{kj}^2 + \lambda y_{jk}^2 & \nu x_{kj} y_{ki} + \lambda y_{jk} x_{ki} \\ & & y_{ki}^2 + \lambda x_{ik}^2 \\ \text{sym.} & & & \end{bmatrix} \quad \dots (5)$$

$$\begin{bmatrix} \nu y_{jk} x_{ik} + \lambda x_{kj} y_{ki} & y_{jk} y_{ik} + \lambda x_{kj} x_{ji} & \nu y_{jk} x_{ji} + \lambda x_{kj} x_{ji} \\ x_{kj} x_{ik} + \lambda y_{jk} y_{ki} & \nu x_{kj} y_{ij} + \lambda y_{jk} x_{ji} & x_{kj} x_{ji} + \lambda y_{jk} y_{ji} \\ \nu y_{ki} x_{ik} + \lambda x_{ik} y_{ki} & y_{ki} y_{ij} + \lambda x_{ik} x_{ji} & \nu y_{ki} x_{ji} + \lambda x_{ik} y_{ji} \\ x_{ij}^2 + \lambda y_{ki}^2 & \nu x_{ik} y_{ij} + \lambda y_{ki} x_{ji} & x_{ik} x_{ji} + \lambda y_{ki} y_{ji} \\ & y_{ij}^2 + \lambda x_{ji}^2 & \nu y_{ij} x_{ji} + \lambda x_{ji} y_{ji} \\ & & x_{ji}^2 + \lambda y_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

ただし、 $\lambda = (1-\nu) / 2$

いま、図-3のように点J, Kを固定し、点iにx方向の荷重 P_{ix} を与えたとき、点iがx方向へ U_{ij} 変位したとすると節点変位ベクトル $\{\delta\}$ と節点力ベクトル $\{P\}$ は次のようになる。

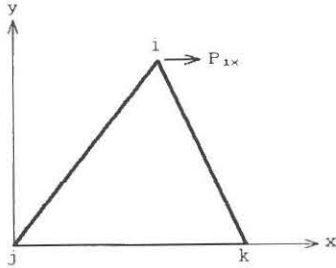


図-3 局所座標系での三角形要素

$$\{\delta\} = [u_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \dots(6)$$

$$\{P\} = [P_{ix} \ 0 \ R_j \ Q_j \ R_k \ Q_k]^T \quad \dots(7)$$

ここで、R, Qは各節点に働く反力である。

上式と(5)式より P_{ix} について解くと、 $y_{jk} = 0$ であるので、

$$P_{ix} = \frac{Et}{4(1+\nu)} \cdot \frac{x_{kj}}{y_{ik}} u_i \quad \dots(8)$$

また、節点iにy方向の荷重 P_{iy} を与え、そのとき節点iがy方向へ v_i 変位した場合、節点変位ベクトル $\{\delta\}$ と節点力ベクトル $\{P\}$ は次のようになる。

$$\{\delta\} = [0 \ v_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \dots(9)$$

$$\{P\} = [0 \ P_{iy} \ R_j \ Q_j \ R_k \ Q_k]^T \quad \dots(10)$$

ここで、先の場合と同様にして上式と(5)式より P_{iy} について解くと、次式が得られる。

$$P_{iy} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{x_{kj}}{y_{ik}} v_i \quad \dots(11)$$

2.1.2 線材要素の剛性マトリックス

1つの節点に数本の線材が接しているとき、局所座標系で考えると次式が成立する。

$$A_x = \sum \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}}\right) (x_{ij} + u_{ij})$$

$$A_y = \sum \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}}\right) (y_{ij} + v_{ij}) \quad \dots(12)$$

ここで、1つの部材 ij について考えると、x方向では

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}}\right) (x_{ij} + u_{ij}) \\ &= \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{(x_{ij} + u_{ij})^2 + (y_{ij} + v_{ij})^2}{C_{ij}^2}}}\right) (x_{ij} + u_{ij}) \\ &= \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x_{ij}u_{ij} + 2y_{ij}v_{ij} + u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{C_{ij}^2}}}\right) (x_{ij} + u_{ij}) \quad \dots(13) \end{aligned}$$

ここで、次のTaylor展開を考える。 $|\alpha| \ll 1$ のとき、2次の項以上を省略し、線形化を図ると

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2 + \dots \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$$

これを、(13)式にあてはめる。ここで、変位 u, v, w が微小のとき、3次の項を無視すると

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}}\right) (x_{ij} + u_{ij}) \\ & \approx \frac{EA}{C_{ij}} \left(\frac{x_{ij}u_{ij} + y_{ij}v_{ij}}{C_{ij}^2} \cdot x_{ij}\right) \quad \dots(14) \end{aligned}$$

ここで、 $x_{ij}/u_{ij} = 1$, $y_{ij}/v_{ij} = m$ とおくと

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{C_{ij}} \left(1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}}\right) (x_{ij} + u_{ij}) \\ &= \frac{EA}{C_{ij}} [1^2 \quad 1m] \begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \end{bmatrix} \quad \dots(15) \end{aligned}$$

同様にy方向についても考え、これをマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{C_{ij}} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m & -1^2 & -1m \\ 1m & m^2 & -1m & -m^2 \\ -1^2 & -1m & 1^2 & 1m \\ -1m & -m^2 & 1m & m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad \dots(16)$$

$$\text{または、} \{P\} = [K_N'] \{\delta\} \quad \dots(17)$$

ここで、 $[K_N']$ は1線材要素の剛性マトリックスで

ある。

次に、図-3のような三角形を構成する3部材からなる構造物の全体剛性マトリックスを作成する。手順としては、各線材要素ごとに剛性マトリックスを作成し、それらを1つに重ね合わせることで全体剛性マトリックスを得る。すると、全体剛性マトリックス $[K_N]$ は次のようになる。

$$[K_N] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ & & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ & & & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ \text{sym.} & & & & p_{55} & p_{56} \\ & & & & & p_{66} \end{bmatrix} \quad \dots(18)$$

ここで、マトリックスの内容は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}^2}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{ki}x_{ki}^2}{C_{ki}^3} & p_{12} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}y_{1j}}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{ki}x_{ki}y_{ki}}{C_{ki}^3} \\ p_{13} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}^2}{C_{1j}^3} & p_{14} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}y_{1j}}{C_{1j}^3} \\ p_{15} &= \frac{EA_{ki}x_{ki}^2}{C_{ki}^3} & p_{16} &= \frac{EA_{ki}x_{ki}y_{ki}}{C_{ki}^3} \\ p_{22} &= \frac{EA_{1j}y_{1j}^2}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{ki}y_{ki}^2}{C_{ki}^3} & p_{23} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}y_{1j}}{C_{1j}^3} \\ p_{24} &= \frac{EA_{1j}y_{1j}^2}{C_{1j}^3} & p_{25} &= \frac{EA_{ki}x_{ki}y_{ki}}{C_{ki}^3} \\ p_{26} &= \frac{EA_{ki}y_{ki}^2}{C_{ki}^3} & p_{33} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}^2}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{jk}x_{jk}^2}{C_{jk}^3} \\ p_{34} &= \frac{EA_{1j}x_{1j}y_{1j}}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{jk}x_{jk}y_{jk}}{C_{jk}^3} & p_{35} &= \frac{EA_{jk}x_{jk}^2}{C_{jk}^3} \\ p_{36} &= \frac{EA_{jk}x_{jk}y_{jk}}{C_{jk}^3} & p_{44} &= \frac{EA_{1j}y_{1j}^2}{C_{1j}^3} + \frac{EA_{jk}y_{jk}^2}{C_{jk}^3} \\ p_{45} &= \frac{EA_{jk}x_{jk}y_{jk}}{C_{jk}^3} & p_{46} &= \frac{EA_{jk}y_{jk}^2}{C_{jk}^3} \\ p_{55} &= \frac{EA_{jk}x_{jk}^2}{C_{jk}^3} + \frac{EA_{ki}x_{ki}^2}{C_{ki}^3} & p_{56} &= \frac{EA_{jk}x_{jk}y_{jk}}{C_{jk}^3} + \frac{EA_{ki}x_{ki}y_{ki}}{C_{ki}^3} \\ p_{66} &= \frac{EA_{jk}y_{jk}^2}{C_{jk}^3} + \frac{EA_{ki}y_{ki}^2}{C_{ki}^3} \end{aligned}$$

ここで、三角形要素の場合と同様に図-3のように線材要素を設定する。ここで点 i に x 方向の荷重 P_{ix}

を与え、点 i が x 方向へ u_i 変位したときのつり合い式を求め、それを P_{ix} について解くと

$$P_{ix} = \frac{x_{1j}(x_{1j} + x_{ki})EA_{1j}}{C_{1j}^3} \cdot u_i \quad \dots(19)$$

$$P_{ix} = \frac{x_{ki}(x_{1j} + x_{ki})EA_{ki}}{C_{ki}^3} \cdot u_i \quad \dots(20)$$

また、節点 i に y 方向の荷重 P_{iy} を与えたとき、同様にして次式が得られる。

$$P_{iy} = \frac{x_{1j}^2(x_{1j} + x_{ki})EA_{1j}}{x_{ki}C_{1j}^3} \cdot v_i \quad \dots(21)$$

$$P_{iy} = \frac{x_{ki}^2(x_{1j} + x_{ki})EA_{ki}}{x_{1j}C_{ki}^3} \cdot v_i \quad \dots(22)$$

2.1.3 線材要素の剛性値の算出

ここで、(8)式と(19)(20)式を比較することによって、次式を得ることが出来る。

$$EA_{1j} = \frac{Et}{4(1+\nu)} \cdot \frac{x_{kj}C_{1j}^3}{x_{1j}y_{1j}(x_{1j} + x_{ki})} \quad \dots(23)$$

$$EA_{ki} = \frac{Et}{4(1+\nu)} \cdot \frac{x_{kj}C_{ki}^3}{x_{ki}y_{1j}(x_{1j} + x_{ki})} \quad \dots(24)$$

また、(11)式と(21)(22)式を比較すると

$$EA_{1j} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{x_{ki}x_{kj}C_{1j}^3}{y_{ki}^3(x_{1j} + x_{ki})} \quad \dots(25)$$

$$EA_{ki} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{x_{1j}x_{kj}C_{ki}^3}{y_{ki}^3(x_{1j} + x_{ki})} \quad \dots(26)$$

ここで、(23)(24)式は x 方向、(25)(26)式は y 方向の場合の剛性値であるので、汎用性を持たせるため(23)式と(25)式、(24)式と(26)式との平均をその線材要素の剛性値とする。即ち

$$\begin{aligned} EA_{1j} &= (EA_{1jx} + EA_{1jy}) / 2 \\ EA_{ki} &= (EA_{kix} + EA_{kiy}) / 2 \end{aligned} \quad \dots(27)$$

ここで、 EA_{1jx} 、 EA_{1jy} は線材 $1j$ の x 、 y 方向荷重時の剛性値、 EA_{kix} 、 EA_{kiy} は線材 ki の x 、 y 方向荷重時の剛性値を表す。この置換法を置換法 A と呼ぶことにする。

2.1.4 置換法Aの問題点

図-4のような四角形膜要素(台形)を線材置換しようとした場合、置換法Aでは下底(長底辺)を固定して考えていたが、上底(短底辺)を固定して考えても同一の結果が得られないのでは汎用性が無いことになってしまう。なぜなら、多数の要素から構成されている構造物全体で考えた場合、各要素についてどちらの節点を固定するかという決め手が無いからである。そこで、図-5のように、短底辺部を固定して(28)~(31)式について考えてみると、このときの剛性値は負の値になってしまう。これは、三角形*i j k*において $\angle i j k$ が 90° を越えるようなときこのような結果になるのである。

また、この方法では章頭に挙げた‘線材方向と糸方向が異なる場合の措置’がされてなく、そういう点からも置換法Aは未完成な理論である。

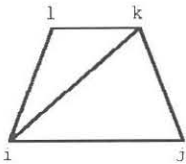


図-4

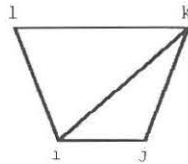


図-5

2.1.5 矩形モデルによる置換

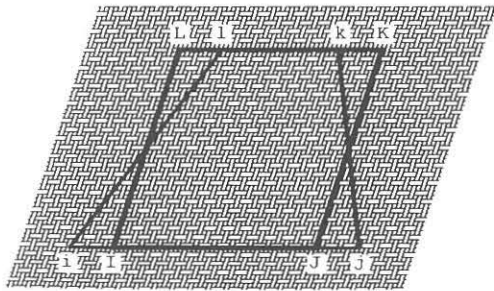


図-6 矩形モデルによる置換

一般に使われている膜材料(キャンパス)は繊維糸を縦、横に編んだもので、直行異方性材料と考えることができる。そこで、図-6のように四角形*i j k l*を一旦、四角形*I J K L*のような長方形として捉える。これにより、置換する際の固定節点の設定箇所の問題をクリア出来る上、線材*I J*, *J K*, *K L*, *L I*の方向はそのまま糸方向であるので、線材方向と糸方向

が異なる場合でも対処出来ることになる。

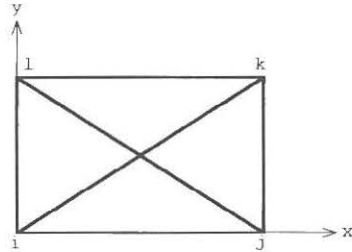


図-7

いま、図-7のような矩形*i j k l*を考える。ここで、節点*i, j*を固定し $\overline{ij} = a$, $\overline{jk} = b$, $\overline{ik} = L$ とする。まず、節点*k*に*x*方向の荷重を与えたときの各線材要素の剛性は先の(23)(24)式より

$$\begin{aligned} E A_{1jx} &= E A_{k1x} = 0 \\ E A_{11x} &= E A_{jkx} = 0 \quad \dots (28) \\ E A_{1kx} &= E A_{j1x} = \frac{E t}{4(1+\nu)} \cdot \frac{L^3}{a b} \end{aligned}$$

次に節点*k, l*に*y*方向の荷重を与えたときの各線材要素の剛性は(25)(26)式より

$$\begin{aligned} E A_{1jy} &= E A_{k1y} = 0 \\ E A_{11y} &= E A_{jky} = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} \cdot a \quad \dots (29) \\ E A_{1ky} &= E A_{j1y} = 0 \end{aligned}$$

ここでは、置換法Aの場合とは違い、*x, y*方向の場合のどちらか一方の剛性値が0であるので平均化は行わない。よって、この場合の各剛性値は

$$\begin{aligned} E A_{1j} &= E A_{k1} = 0 \\ E A_{11} &= E A_{jk} = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} \cdot a \quad \dots (30) \\ E A_{1k} &= E A_{j1} = \frac{E t}{4(1+\nu)} \cdot \frac{L^3}{a b} \end{aligned}$$

また、節点*i, j*を固定して同様に考えれば*i j, k l*の剛性値も求まり

$$E A_{ij} = E A_{kl} = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} \cdot b$$

$$EA_{i1} = EA_{jk} = 0 \quad \dots(31)$$

$$EA_{ik} = EA_{j1} = \frac{Et}{4(1+\nu)} \cdot \frac{L^3}{ab}$$

ここで、(30)(31)式でそれぞれ平均化を行い、それによって得られたものを各線材要素の最終剛性値とする。ところで、先は平均化を行わなかったのに、ここで行ったのは、節点 i, j を固定した場合と節点 i, l を固定した場合とでは置換する上での条件が異なるとの理由からである。

$$EA_{ij} = EA_{kl} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \cdot b$$

$$EA_{i1} = EA_{jk} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \cdot a \quad \dots(32)$$

$$EA_{ik} = EA_{j1} = \frac{Et}{4(1+\nu)} \cdot \frac{L^3}{ab}$$

また、上記の剛性は各メッシュ毎のものであり、これを用いて構造物全体での各部材剛性値を求めなければならない。これについて、隣り合う2つのメッシュを仲介する部材の場合は、単純に各メッシュ毎に求めたその部材の2つの剛性値の和をもって構造物全体としての部材剛性とする。もちろん、その部材を介して隣り合うメッシュを持たない場合は、そのまま構造物全体としての剛性値とする。

また、局所座標系において矩形モデルへと変更する際、図-6において、線材 LI, JK は、線材 li, jk の中点を通るものとする。また、非等脚台形の場合は、線材 li, jk の剛性値は異なったものとなる。そこで、この場合はその部材の負担する面積比によって各剛性値を決定することにする。

2.2 膜応力の評価法

まず、各メッシュにおける6本の線材（縦、横、ブレース）の張力を算出する。その方法としては、縦、横部材においてその部材が2つのメッシュの仲介をしている場合は、その2つのメッシュの分担幅によって張力の分担を行うことにする。

次に、局所座標系において、(33)式によって F_1, F_2, F_3 なる辺力を持った三角形要素の面内張力を求めることが出来る。

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{l_{im}^2}{a} & \frac{l_{mj}^2}{b} & \frac{l_{ji}^2}{c} \\ \frac{m_{im}^2}{a} & \frac{m_{mj}^2}{b} & \frac{m_{ji}^2}{c} \\ \frac{l_{im}m_{im}}{a} & \frac{l_{mj}m_{mj}}{b} & \frac{l_{ji}m_{ji}}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \dots(33)$$

ただし、 l_{im}, m_{im} などは $i \rightarrow m$ 方向の余弦、正弦などを表す。また、 a, b, c は各々 j, i, m より下ろした垂線の長さを表す。

いま、1つの四角形要素から4パターンの三角形が得られる（図-8参照）。そこで、各三角形要素毎に面内張力を求め、それぞれの場合で得られた膜応力を平均化することによって四角形要素の膜応力とする。また、その膜応力によってリンクリングを判断する。

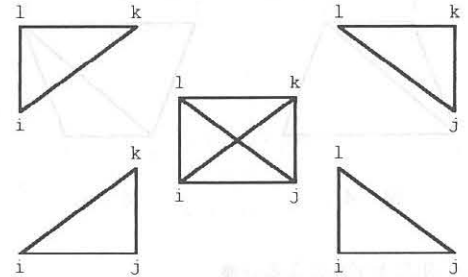


図-8

2.3 異方性を考慮した置換法

先の等方性置換の三角形膜要素の応力-歪みマトリクス $[D]$ を次のように変更する。

$$[D] = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad \dots(39)$$

ここで、各記号の意味は

E_1 : 縦糸方向引張張力（厳密には Et_1 ）

E_2 : 縦糸方向引張張力（厳密には Et_2 ）

ν_1 : 縦糸方向ポアソン比

ν_2 : 縦糸方向ポアソン比

G : 面内せん断剛性（厳密には Gt ）

$n = E_1/E_2, \quad m = G/E_2$

そこで、等方性の場合と同様にして各線材要素の剛性を求めると

$$E A_{i,j} = E A_{k,l} = \frac{E t_2}{4(1 - \nu_2^2)} \cdot b$$

$$E A_{i,i} = E A_{j,j} = \frac{E t_2}{4(1 - \nu_2^2)} \cdot a \quad \dots(35)$$

$$E A_{i,k} = E A_{j,l} = \frac{G t}{2} \cdot \frac{L^3}{a b}$$

また、等方性置換によって得られた線材要素の剛性は、異方性置換によって得られたそれにおいて、 $E t_1 = E t_2$, $\nu_1 = \nu_2$ のときに得られるものであるので、上式を汎用性のある線材置換式とする。ただし、等方性置換においては $G t = E t / 2(1 + \nu)$ が成立していなければならない。

3. 理論解の得られる問題の解析

ここでは、理論解の得られている構造物を解析することによって、本解析理論の精度を検証する。

3.1 解析モデル

膜自重を無視した球面構造物においては、次式が成立している。

$$N_x = N_y = \frac{1}{2} p R, \quad N_{xy} = 0 \quad \dots(36)$$

(R: 半径, p: 内圧)

そこで、図-9のような球面の内圧を上げたときの応力-変形解析を行う。(36)式が成立する様な球面と比較することによって、その精度を検証する。

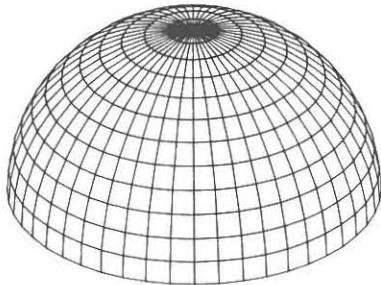


図-9

3.2 解析条件

初期形態として、次のような半球面の空気膜構造物を与える。

半径 $R = 10 \text{ m}$, 内圧 $p = 30 \text{ kg/m}^2$

初期張力 $N_x = N_y = 150 \text{ kg/m}^2$, $N_{xy} = 0 \text{ kg/m}^2$

ここで、内圧を 40 kg/m^2 にして応力-変形解析を行う。また、その他の条件を以下に記す。

- ・膜材料は等方性材料とする
 - 引張剛性 45000 kg/m^2
 - せん断剛性 18000 kg/m^2
 - ポアソン比 0.25
- ・膜自重は無視する

3.3 解析結果

形態については、ほぼ球面に近いものとなった。また、そのときの膜応力は表-1の通りである。ただし、メッシュパターンは1~12にいくに連れてそのZ座標を増すものとする。すると、メッシュパターン10~12においては縦糸方向張力が理論値(約200 kg/m^2)を大きく越えていることがわかる。これはこの部分のメッシュ形状が縦方向に細長くなっているため、膜応力を算出するときのブレース材の分力が極端に縦糸方向にかかり過ぎたためと考えられる。

(単位: kg/m)

メッシュパターン	横糸方向張力	縦糸方向張力	せん断力
1	199.5	199.3	0.02
2	199.5	199.3	-0.02
3	199.4	199.3	-0.01
4	199.3	199.3	-0.02
5	199.2	199.4	0.01
6	198.8	199.5	0.01
7	198.1	199.7	-0.00
8	197.1	200.2	0.01
9	195.4	201.3	-0.01
10	193.6	204.1	-0.01
11	199.1	211.6	0.03
12	204.3	224.9	0.00

表-1 各メッシュの膜応力

4. 三角形膜要素による解析との比較

ここでは、これまで膜構造の解析に用いられたきた三角形膜要素による有限要素解析と本解析法を比較することによって、この線材置換理論の実用性を検証する。

4.1 解析モデル

ここでは、異方性膜材料を使ったカテナイド曲面に

ついて雪荷重及び風荷重時の応力-変形解析を行う。

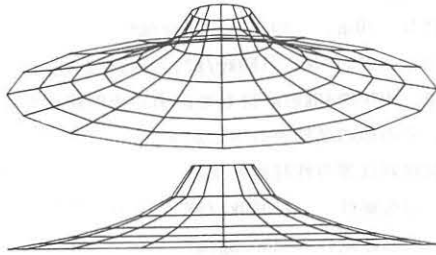


図-10 初期形状

・荷重

雪荷重：水平面上一様積雪 60 kg/m^2

風荷重：速度圧 $q=60\sqrt{h}$

(h: 構造物の最高高さ)

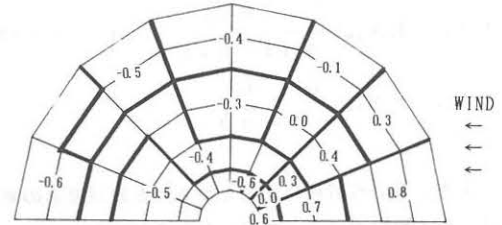


図-11 風圧係数

4.2 解析条件

・初期張力はX,Y方向とも 100 kg/m

・材料特性

引張剛性	縦系方向	25000 kg/m
	横系方向	20000 kg/m
せん断剛性		6000 kg/m
ポアソン比	縦系方向	0.25
	横系方向	0.20
膜自重		1.0 kg/m^2

4.3 解析結果

ここでは、以下に示す断面変形図(図-12,13)及び応力分布図(図-14~17)により2つの解析法を比較する。

■断面変形図

2つの解析結果に殆ど差はみられなかった。しかし、せん断剛性値が小さくなるほど2つの結果に差が出てくることが確認されている。これは、本解析法がせん断剛性の評価に主眼を置いた解析法であるということ

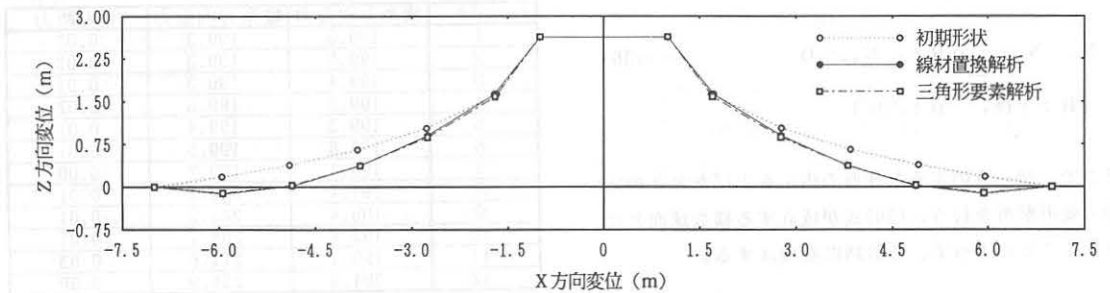


図-12 雪荷重解析時の断面変形図

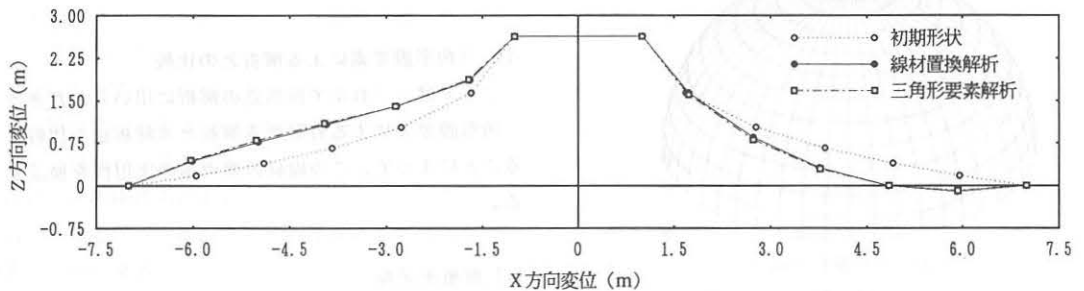


図-13 風荷重解析時の断面変形図

に起因しているためと考えることが出来る。しかし、この場合（せん断剛性値が小さい場合）はブレース材を持たない線材置換を行うことで対処できることが確認出来ている。

■応力分布図

応力分布図については、三角形要素解析の方にばらつきが見られ、線材置換解析の方が実状に近いものとなっているようである。また、リンクリング発生箇所についても同様なことがいえる。

5. まとめ

5.1 膜構造解析の実用解として

現在行われている膜構造解析の解法は、三角形要素にせよ四角形要素にせよ、いずれも近似解法である。しかし、現状ではこれを実用的な解法として使用している。そこで、ここでは三角形膜要素による有限要素法解析との比較により本解析法の実用性を判断したのであるが、今回の解析モデルについては十分実用的であると言える結果が得られた。

また、ニュートン・ラフソン法などの反復解法をそのプログラムで行う場合は、その収束性ということも問題になってくる。今回の結果に限って言えば、三角形要素による解析法でも良い収束性を示しているが、本解析法では殆どの場合でその約半分の時間で解析を終了しており、場合によっては1/3の時間で終了するケースもあった。これは、節点数が約60程度のモデルの場合であり、節点数が増えるほどその解析に要する時間の差はひろがる傾向にあるようである。

いま実用的なモデルを節点数200程度のものとする、そのモデルの形態や解析条件にもよるが、三角形要素解析では大型計算機ならまだしもパソコンで解析を行おうとしたら丸一日以上かかってしまうこともある。そこで、実験的に節点数156のカテナイド曲面の雪荷重解析を本解析法で行ったところ、横浜国大石井研究室所有のパソコンを用いて約10分で解析を終了させることが出来た。

また、本解析法は三角形要素解析に比べて剛性マトリックスの値が若干小さめに出るようで、大変形になるとその差がひろがるが、膜構造物の変位許容範囲はスパンに対して1/15以下となっており、この範囲内の変形であれば実例で示したように殆ど差は見られない。

6.2 本解析法の適用範囲

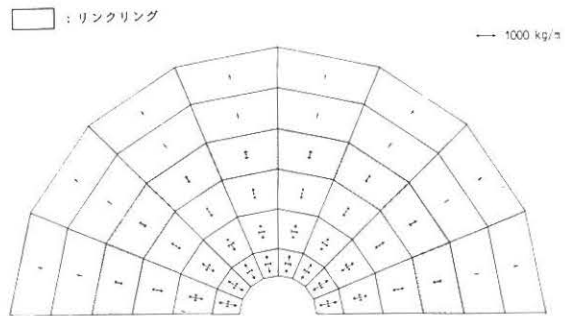


図-14 線材置換による雪荷重解析時の応力分布図

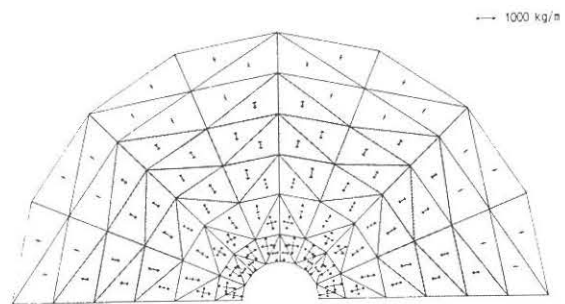


図-15 三角形要素による雪荷重解析時の応力分布図

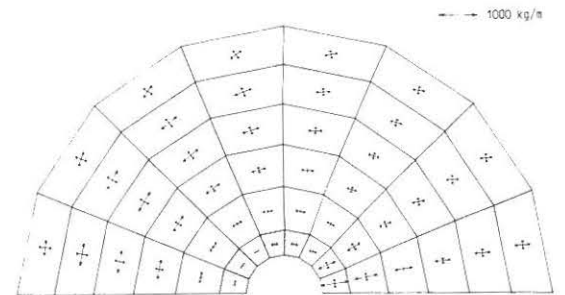


図-16 線材置換による風荷重解析時の応力分布図

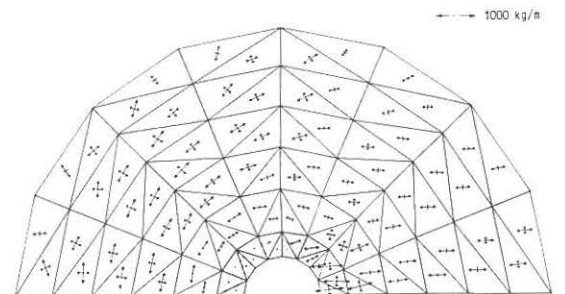


図-17 三角形要素による風荷重解析時の応力分布図

本解析法の線材置換条件としてはメッシュを四角形、それも台形の範囲内で行うということなので、その適用範囲は自ずと限られてくる。四角形要素による解析の利点としては、解析する形態に対応性が良いということが挙げられる。したがって、カテナイド曲面や球面の空気膜構造などの回転体構造物は三角形要素解析よりも本解析法の方が適しているようである。

最後に、三角形メッシュを混在させることが出来れば適用できる解析モデルの幅をかなり拡げることが出来るので、三角形メッシュによる線材置換法の確立ということを今後の課題として挙げることにする。

<参考文献>

- ・ 空気膜構造—設計と応用—/工業調査会/石井一夫
- ・ 有限要素法による構造解析プログラム
/培風館/三本木茂雄・吉村信敏
- ・ マトリックス有限要素法
/培風館/O.C.ツイエキーウィツ・Y.K.チュン
- ・ 有限要素法とその応用/森北出版/大地羊三
- ・ 有限要素法概論/培風館/戸川隼人

MEMBRANE STRUCTURE ANALYSIS IN SUBSTITUTING CABLE NET

Tatsuya Kotake *1

Kazuo Ishii *2

SYNOPSIS

At present, when we analyze a membrane structure, we usually use the Finite Element Method. But in this method, it is very complicated and hard to generalize. This paper proposes a new method of substituting a cable net for a membrane material, assuming that the membrane structure is composed of the cable net. By means of this, a method of analyzing a complicated membrane structure in a practical precision is shown in this study.

*1 Taisei Corporation

*2 Professor, Department of Architecture, Faculty of Engineering, Yokohama National University