

低次四辺形膜要素による応力変形解析

正岡典夫¹

石井一夫²

梗概

複雑な曲面形状を有する膜構造物の動的非線形挙動を追跡しようとする大規模な演算が必要となる。そのため、計算精度および計算効率の両面で有効な要素の検討が重要となっている。

本報では、計算効率面で有効性が期待できる低次四辺形膜要素（双一次四辺形要素の面内積分次数を低減し、面内1点積分とした要素）を応力変形解析に適用し、その特性について検討を行う。ここでは、同要素の定式化について概要を述べ、平面張力場解析により解析アルゴリズムの妥当性を確認する。そして、数種の数値解析を実施して、定ひずみ三角形要素や双一次四辺形通常積分要素と解析解の比較を行い同要素について検討を加える。

1. 序

複雑な曲面形状を有する膜構造物の風荷重下の動的挙動を捉えることが重要な問題となってきた。膜構造解析は、一般に荷重下での変形が大きいことから幾何学的非線形解析を行う必要がある。また、材料の異方性、非抗圧縮性といった膜材料の特性を考慮しなければならない。これらを考慮した動的非線形解析では、大規模な演算が必要になるため、計算精度、計算効率の両面で有効な要素の検討が重要となってくる。

膜構造解析では、一般に定ひずみ三角形要素を活用する人が多い。これは、要素の定式化が比較的単純であるほか、複雑な曲面形状への対応がよく、応力集中部等についても細分割により容易に対応できることが上げられる。しかし、実際に膜構造解析に三角形要素を活用すると、解析モデルによっては、しばしば応力分布やリンク発生位置に判断の難しい不規則な分布が現れる。これに対して、一般に四辺形要素で

はメッシュ依存度が低いと考えられ、このような場合でも実状に近い分布が得られることが多い¹⁾。

本研究は、このような立場から計算の効率化が期待できる低次四辺形膜要素の検討を行った。著者らは、既報²⁾において本要素の膜構造解析への適用について提案し、形状解析問題を通して効率的活用が期待できることを報告した。ここでいう低次四辺形膜要素とは、双一次アイソパラメトリック四辺形要素の面内積分次数を低減して、面内1点積分要素として扱うことを意味している。本報では、同要素を応力変形解析に適用して計算精度、計算効率の両面からその有用性について検討する。

次章では、本要素の定式化の概要を述べる。次に平面張力場解析に本要素を適用して解析アルゴリズムの確認を行う。数値解析例として、カテナイド曲面およびHP曲面の応力変形解析を実施し、定ひずみ三角形要素、四辺形通常積分要素との解析解の比較を行う。

*1 ㈱巴組鐵工所 建設技術開発室 *2 横浜国立大学 工学部建設学科 教授
横浜国立大学 工学部大学院

2. 応力変形解析の定式化

アイソパラメトリック要素の一般的な定式化については、文献(6)等に詳しく述べられているので、ここでは、本研究に用いた低次四辺形膜要素の概要について説明する³⁾⁻⁸⁾。

2.1 要素および座標系の定義

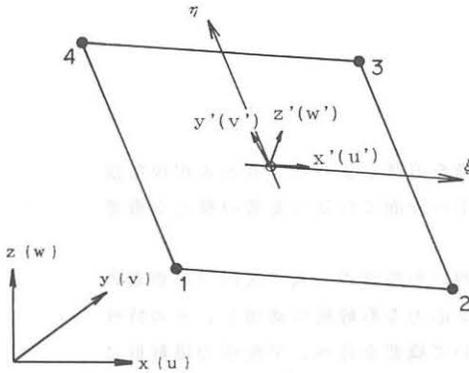


Fig. 1 低次四辺形膜要素 (1点積分要素)

Fig. 1 に要素形状および座標系を示す。Fig. 2 に要素の積分点位置を示す。ここでは、3つの座標系が定義されている。すなわち、要素の幾何形状を定義する全体座標系 (x, y, z) 、ひずみと応力を定義するための要素座標系 (x', y', z') および要素空間を定義するための $\xi - \eta$ 座標系である。本要素は応力評価が要素中央の1点で行われるため、要素座標系の定義にあたっては、要素を平面近似して次のように要素座標系単位ベクトルを定義する。

まず、要素の平面に垂直な方向として、要素対角線ベクトル $(1-3, 2-4)$ を用いて両者に直交する方向に z' 軸を定義する。

$$e z' = \frac{V_{31} \times V_{42}}{|V_{31} \times V_{42}|} \quad (2-1)$$

ただし、 $v_{ij} = v_i - v_j$

つぎに、 x' 軸は要素の1-2辺を基準に出発時の投影異方性主軸方向に定義する。

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{21} \cos \theta - y_{21} \sin \theta \\ x_{21} \sin \theta + y_{21} \cos \theta \\ -(s_1 \cdot e_{zx} + s_2 \cdot e_{zy}) / e_{zz} \end{Bmatrix}$$

θ : 1-2辺と異方性主軸とのなす角度

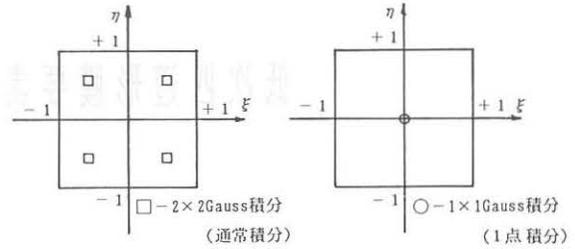


Fig. 2 数値積分位置

$$e x' = \frac{1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

最後に、 y' 軸は法線ベクトル $e z'$ と x' 軸ベクトル $e x'$ のベクトル積より求める。

$$e y' = e z' \times e x' \quad (2-3)$$

ここで、 x' 軸を応力変形解析の出発時の投影異方性主軸方向に定義するのは、増分により要素が変形して、各要素の異方性主軸方向が異なってくることを避けるためである。各要素の異方性主軸が異なると、解析モデルによって対称性を崩すことがある。

2.2 変位の定義

要素各節点には、並進変位 (u_k, v_k, w_k) の3自由度が定義される。要素内任意点Pにおける要素座標系変位 (u', v', w') は形状関数 $N_k(\xi, \eta)$ を用いて表現することができる。

$$\{u_i'\} = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \{u_{ik}'\} \quad (i=1 \sim 3) \quad (2-4)$$

ここで、 $N_k(\xi, \eta)$ は双一次要素の形状関数であり次式により与えられる。

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{aligned} \quad (2-5)$$

節点kの変位ベクトル $\{u_k\}$ および全体変位ベクトル $\{u\}$ は下式で示される。

$$\{u_k\}^T = [u_k, v_k, w_k] \quad (2-6)$$

$$\{u\}^T = [u_1]^T, \{u_2\}^T, \{u_3\}^T, \{u_4\}^T \quad (2-7)$$

要素の全体座標系変位ベクトルを要素座標系に変換する場合には、(2-1)~(2-3)式より構成される座標変換マトリックス [T] を用いて下式により行う。

$$\{u'\} = [T] \cdot \{u\} \quad (2-8)$$

2. 3 変位-ひずみ関係

変位とひずみの関係は要素中央点 ($\xi = \eta = 0$) において、要素座標系 (x', y', z') 上で次のように仮定する。

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(u')}{\partial x'} \\ \frac{\partial(v')}{\partial y'} \\ \frac{\partial(u')}{\partial y'} + \frac{\partial(v')}{\partial x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \right\} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix}$$

$$= \{\varepsilon_0'\} + \{\varepsilon_N'\} \quad (2-9)$$

ここで、 u', v', w' は要素座標系での変位成分である。 $\{\varepsilon_0'\}$ はひずみの線形成分、 $\{\varepsilon_N'\}$ は非線形成分を表している。

2. 4 応力-ひずみ関係の定義

膜材を直交異方性弾性体と仮定し、膜要素内において異方性の材料主軸 ($x''-y''$) と要素座標系 ($x'-y'$) が一致するように定義する。

応力 (張力) - ひずみ関係は次のように示される。

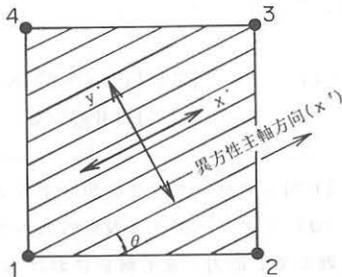


Fig. 3 直交異方性膜要素

$$\{N'\} = \begin{bmatrix} \frac{Ex_t}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{\nu_x \cdot Ey_t}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \frac{\nu_y \cdot Ex_t}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{Ey_t}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xyt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \end{Bmatrix}$$

$$= [D] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (2-10)$$

ここで、

- [D] : 異方性膜材の応力マトリックス
- Ex_t, Ey_t : 縦糸方向、横糸方向引張剛性
- G_{xyt} : せん断剛性
- ν_x, ν_y : 縦糸方向、横糸方向ポアソン比
- t : 膜厚
- θ : 1-2辺と異方性主軸とのなす角度

2. 5 アワーグラスコントロール

本要素を面内1点積分要素として用いると、Fig. 4に示すように剛体変位以外の零エネルギーモードであるアワーグラスモードを含む。このようなモードが発生すると計算の実行がしばしば不可能となる。このことは、既報²⁾において示した通りであるが、このようなモードに対処するため、FlanaganとBelytsckoによって提案された手法を参考に数値的安定化を計る³⁾。

これは、剛体モードに直交性を有するような微小の仮想弾性剛性を定義し、要素剛性マトリックスに付加することにより数値的安定化を計る手法である。仮想弾性剛性は、仮想ひずみ $\{q'\}$ と仮想応力 $\{Q'\}$ を用いて求める。

同コントロールについては、のちに示す数値解析例を実施した限りでは発生せず、仮想弾性付加剛性の大きさは、解析に影響しない微小量を仮定した。なお、既報では面内変形に対するアワーグラスコントロールについて触れたが、実際には、面外変形に対しても同様の処置が必要である。ここでは、ごく微小の剛性を面外方向にも定義している。

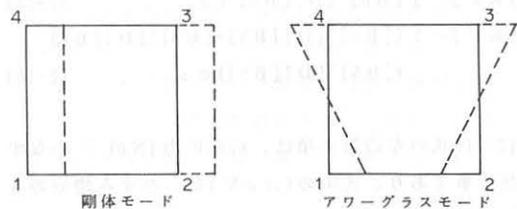


Fig. 4 零エネルギーモード

2. 6 増分形要素剛性方程式の誘導

前節でのひずみの定義および応力-ひずみ関係を参照し、total Lagrangian approach による増分形仮想仕事式から、応力-変形解析における要素剛性方程式を導く。

$$\int \{L \delta(\Delta \varepsilon')\} \{ \Delta N' \} ds + \int \{L \delta(\Delta \varepsilon N')\} \{N^{(0)}\} ds + L \delta(\Delta q') \{ \Delta Q' \} = L \delta(\Delta u) \{ \Delta f \} + L \delta(\Delta u) \{ f_r \} \quad (2-11)$$

ここで、上添字(0)は増分前の値を意味する。

上式の第1項は、線形化したひずみ増分と応力増分のなす仮想仕事である。ここで、ひずみ増分 $\{\Delta \varepsilon'\}$ は(2-4)を(2-9)式に代入し増分形に変形することにより、以下のようにマトリックス表示できる。

$$\{\Delta \varepsilon'\} = ([B0] + [BN]) \cdot \{\Delta u'\} \quad (2-12)$$

[B0]: 線形のひずみマトリックス

[BN]: 非線形のひずみマトリックス

増分形の応力-ひずみ関係は(2-10)式の関係より、

$$\{\Delta N'\} = [D] \cdot \{\Delta \varepsilon'\} \quad (2-13)$$

で示される。

(2-12, 13) 式を(2-11)式に代入すると、第1項は以下のようにマトリックス表示できる。

$$\int \{L \delta(\Delta \varepsilon')\} \{ \Delta N' \} ds = \int \{L \delta(\Delta u)\} [T]^T [B0 + BN]^T [D] [B0 + BN] [T] \{\Delta u\} ds = L \delta(\Delta u) \{ [T]^T ([K0'] + [KL']) [T] \} \{\Delta u\} \quad (2-14)$$

ここで、 $\{\Delta u\}$: 全体座標系上での増分変位ベクトル

$$[K0'] = \int [B0]^T [D] [B0] ds \quad (2-15)$$

$$[KL'] = \int ([B0]^T [D] [BN] + [BN]^T [D] [B0] + [BN]^T [D] [BN]) ds \quad (2-16)$$

(2-11)式の左辺第2項は、初期応力 $\{N0\}^{(0)}$ のなす仮想仕事であり、式中の $\{\Delta \varepsilon N'\}$ は、ひずみ増分の非線形成分を示している。同項は以下のようにマトリックス表示することができる。

$$\int \{L \delta(\Delta \varepsilon N')\} \{N0\}^{(0)} ds = L \delta(\Delta u) \{ [T]^T [KG'] [T] \} \{\Delta u\} \quad (2-17)$$

$$\text{ここで、} [KG'] = [G]^T [N0] [G] \cdot s \quad (2-18)$$

$$[N0] = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} \\ N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 & 0 \\ 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Delta w'}{\partial y'} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{\Delta u k'\} \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{\Delta v k'\} \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{\Delta w k'\} \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{\Delta u k'\} \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{\Delta v k'\} \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{\Delta w k'\} \end{array} \right\} = [G] \cdot \{\Delta u'\} \quad (2-20)$$

(2-11)式の左辺第3項は、アワーグラス仮想応力増分のなす仮想仕事であり、以下のようにマトリックス表示することができる。

$$L \delta(\Delta q') \{ \Delta Q' \} = L \delta(\Delta u) \{ [T]^T [KH'] [T] \} \{\Delta u\} \quad (2-21)$$

(2-11)式の右辺において、第1項は増分外力のなす仮想仕事であり、第2項は前段階での不平衡力(残差力)のなす仮想仕事である。不平衡力 $\{f_r\}$ は、下式で表される。

$$\{f_r\} = \{f^{(0)}\} - \{ [T]^T [B0 + BN] \{N^{(0)}\} ds - [T]^T [BH]^T \{Q\}^{(0)} \} \quad (2-22)$$

[BH]: アワーグラス仮想ひずみマトリックス

[Q]: アワーグラス仮想応力ベクトル

以上を整理して、応力-変形解析における要素剛性方程式は、

$$[T]^T([K0']+[KL']+[KG']+[KH'])[T]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} + \{f_r\} \quad (2-23)$$

で与えることができる。本式を全要素について合成することにより全体剛性方程式を導くことができる。

非線形方程式の解法として、ここでは、ニュートンラプソン法を用いる。

2.7 膜面のしわ問題（リンクリング対応）

膜材料は非抗圧縮性と考えられ、圧縮が作用するとリンクリング（しわ状座屈現象）を生じる。このリンクリング問題については、種々の研究がなされているが、ここでは、岩盤のNo-Tension解析に適用された応力遷移法(stress transfer method)をNo-Compressionに置き換えた手法を導入する¹⁰⁾⁻¹¹⁾。

リンクリングは、モールの応力円を描いたときに最大主応力N1、最小主応力N2が共に負（圧縮）にならないことが条件となる。

$$N_x \cdot N_y \geq N_{xy}^2 \quad (\text{リンクリング条件式}) \quad (2-24)$$

- N1 : 最大主応力
- N2 : 最小主応力
- Nx : 縦糸方向応力
- Ny : 横糸方向応力
- Nxy : せん断方向応力

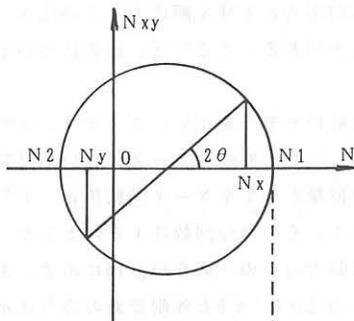


Fig. 5 リンクリング時の応力状態

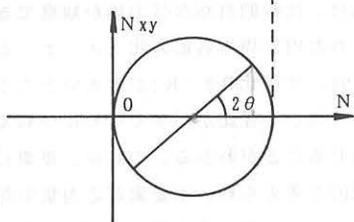


Fig. 6 リンクリング処理後の応力状態

ここで用いた具体的手法を以下に示す。

- (1) 圧縮を考慮して要素ごとの主応力を計算し、圧縮主応力(N2 < 0)の有無を調べる。
- (2) 圧縮主応力がある場合には、強制的にゼロとする。(N2 = 0)
- (3) 主応力方向{θ}をそのままの状態と仮定して、糸方向応力{N'}を次式により変換する。

$$\{N'\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{Bmatrix} \cdot N_1 \quad (2-25)$$

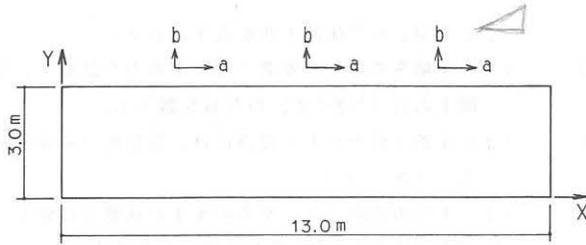
- (4) 要素節点力を算出してニュートンラプソン法による反復計算を行う。この操作により、応力の再配分による誤差は自動的に残差力の中に組み込まれることになる。
- (5) 反復計算のたびに圧縮を考慮した応力計算を行い、許容値以下となるまで前記の処理を繰り返す。本要素は、要素中央において応力を評価するため、これらの処理を容易に行うことができる。また、数値解析例での比較のために作成した四辺形通常積分要素は、要素特性を損なわないように各積分点位置において上記と同様の操作を行っている。

3. 平面張力場解析

前章の定式化に基づく数値解析例として、平面張力場解析例を示し解析アルゴリズムの妥当性を確認する。

ここでは、圧縮力や曲げにほとんど抵抗できず引張力にのみ抵抗できる等質弾性シートを考える。このシートの面内のある方向に引張力を作用させると、引張力に垂直な方向に圧縮力が生じ、この部分にしわが発生する。張力場とは最終的に引張応力場のみが出現して、張力方向に沿ってしわが観察される状態をいう。張力場の特徴をまとめると以下ようになる。

- (1) 主応力が1軸のみ張力方向に存在する。
 - (2) 張力方向としわの方向は一致する。
 - (3) しわ方向に沿った断面には応力は存在しない。
- ここでは、平面張力場解析として、最も一般的な2つの問題を取り上げ、理論解との比較を行うことにする¹²⁾⁻¹⁴⁾。



強制変位 $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$
 材料定数 $E t = 90000.00 \text{ Kg/m}$
 $\nu = 0.3$
 $G = 34615.38 \text{ Kg/m}$

Fig. 7 境界が二本の平行線の解析

3. 1 境界が二本の平行線になる場合

二つの平行な直線境界を持つ平面長方形弾性シートの境界に強制変位を与えることにより張力場を生じさせる。解析は、境界の一端を固定して他端を α° 方向に強制変位増分させて行う。この問題は、井合により導かれた極大エネルギーの定理から理論値が導かれるので、解析解との比較を行うことができる。

理論解として、しわの発生する方向を下式に示す。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{-b + \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3-1)$$

- [θ] : しわの方向
- [a] : せん断方向変位
- [b] : 引張方向変位

Fig. 7 に解析モデルを示す。強制変位は $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$ 方向に行い、増分回数を5回とした。最終段階においてリンクリング処理を行い、全域にリンクリングを生じた状態を張力場と判断した。解析は $\alpha = 0^\circ \sim 30^\circ$ まで 5° 刻みで行った。 $\alpha = 30^\circ$ 以上では、1軸張力場とならないため検討より除外した。

解析により求められた最大主応力線方向と理論解との比較をTable1に、張力分布($\alpha = 30^\circ$)をFig. 8に示す。結果は良好に理論解に一致しており、張力分布状況も妥当なものと判断される。

3. 2 境界が2つの同心円になる場合

この問題は、E. Reissnerの張力場解析(回転変形問題)といい、外周と内周を同心円により固定された円

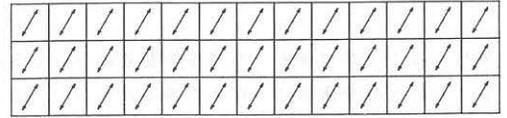


Fig. 8 張力分布($\alpha = 30^\circ$)

Table1 境界が二本の平行線の場合の張力線角度

α ($^\circ$)	解析値 ($^\circ$)	理論値 ($^\circ$)
0	45.010	45.000
5	47.510	47.571
10	50.010	50.102
15	52.510	52.555
20	55.010	54.899
25	57.510	57.587
30	60.010	60.057

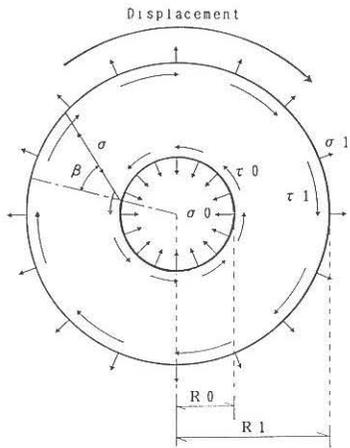
形平面シート的一方の周をねじることにより、内周より張力線を生じさせるものである。

ここでは、内周円(半径 $R0$)を固定し外周円(半径 $R1$)を強制変位により回転させることで張力場を生じさせた。

理論解との比較法としては、内外周円の半径比 $R0/R1$ により張力線角度 β を比較する方法と内外周それぞれの半径方向応力 σ とせん断応力 τ との比 σ/τ を比較する方法とがある。ここでは、後者について扱うことにする。

Fig. 9 に解析モデルを示す。ここでは、 $R0/R1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9$ の5ケースについて計算例を示す。強制変位量として全ケース回転角 $\alpha = 1^\circ$ を外周円境界に与え、その増分回数は10回とした。

得られた張力分布の一例をFig. 10に示す。また、内側要素の応力比 $\sigma0/\tau0$ と外側要素の応力比 $\sigma1/\tau1$ を理論解とともにFig. 11に示す。Fig. 10に示された張力分布からは、比較的自然的な張力場が観察できる。Fig. 11に示された内外周の各応力比(σ/τ)と理論解との比較では、半径比 $R0/R1$ が大きいところで良好な一致が見られ、半径比が小さくなるにつれて理論解と誤差を生じることがわかる。これは、要素分割が粗いことが原因と考えられ、本要素が応力集中部等の応力勾配の大きいところで要素分割を細かくする必要があることを示している。



材料定数

$$E t = 90000.00 \text{ Kg/m}$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 34615.38 \text{ Kg/m}$$

強制変位 $\alpha = 1^\circ$

$$R_0 = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 9.0 \text{ m}$$

$$R_1 = 10.0 \text{ m}$$

Fig. 9 E. Reissnerの張力場解析

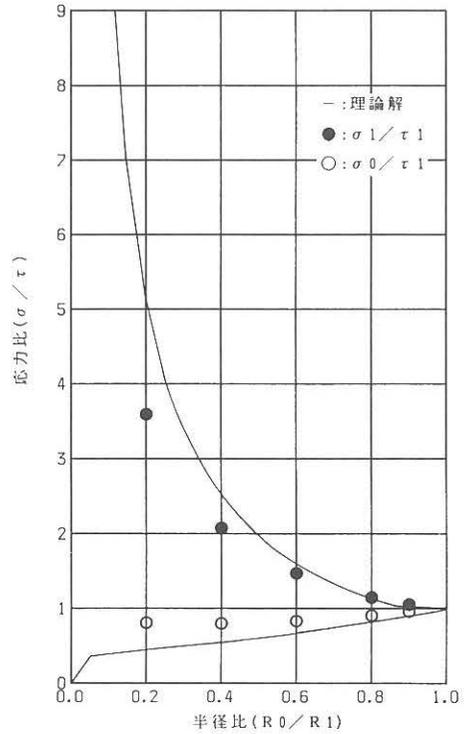
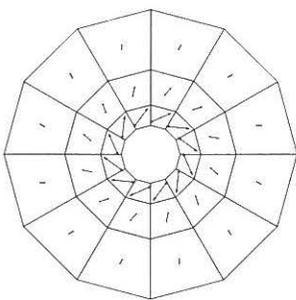
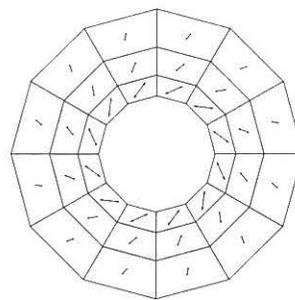


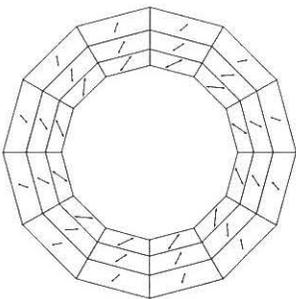
Fig. 11 理論解との比較



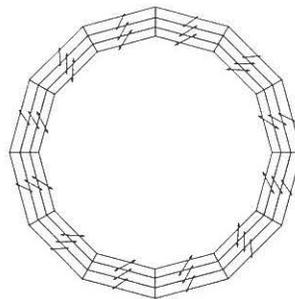
(a) $R_0/R_1 = 0.2$



(b) $R_0/R_1 = 0.4$



(c) $R_0/R_1 = 0.6$



(d) $R_0/R_1 = 0.8$

Fig. 10 張力分布 (回転角 $\alpha = 1^\circ$)

以上、平面張力場解析からは、概ね良好な解析解を得ることができ、解析アルゴリズムの妥当性を確認することができた。なお、後に示す数値解析例において比較する三角形定ひずみ要素および四辺形通常積分要素についても同様のアルゴリズムで作成したものであることをつけ加えておく。

4. 数値解析例

ここでは、空間形状として一般的なカテノイド曲面とHP曲面を例に応力変形解析を実施する。解析は、本研究で用いた四辺形1点積分要素のほか、定ひずみ三角形要素および四辺形通常積分要素で実施し、解析解の比較を行う。

4.1 積雪荷重を受けるカテノイド曲面の解析

等張力曲面として理論解のあるカテノイド曲面（回転懸垂曲線）に積雪荷重を作用させ応力変形解析を実施した。解析形状をFig.12に、解析諸条件をTable2に示す。解析は、形状解析後の形状に荷重増分により積雪荷重を作用させた。境界条件は外周部を固定し、内周部を鉛直方向にのみ拘束した。増分回数は5回とし、最終段階において10回の反復計算を実施した。

Fig.13に変形形態を示す。Fig.14は、各要素による変形量の比較を示す。Fig.14からは各要素で変形量にほとんど差がないことがわかる。Fig.15に三角形要素と四辺形1点積分要素の各糸方向応力分布の相違を濃淡により示す。三角形要素では、明らかに応力分布にばらつきがあるのが観察でき、四辺形1点積分要素の方がより実状に近い分布を示していることがわかる。なお、本要素の応力値は四辺形通常積分要素の要素内応力を平均したものにほぼ一致していた。

4.2 等分布荷重を受けるHP曲面の解析

形状解析により求められたHP曲面に等分布荷重を作用させ、リンクリングの分布状態について検討をする。解析形状をFig.16に、解析諸条件をTable3に示す。ここでは、各要素の違いによるリンクリング分布の相違に着目し、メッシュ分割数の影響についても比較する。また、三角形要素については、メッシュ分割方向の影響についても比較する。

Fig.17、Fig.18に各要素の粗分割時および細分割時のリンクリング分布を示す。リンクリング部分はハッチングで示されている。なお、四辺形通常積分要素は、

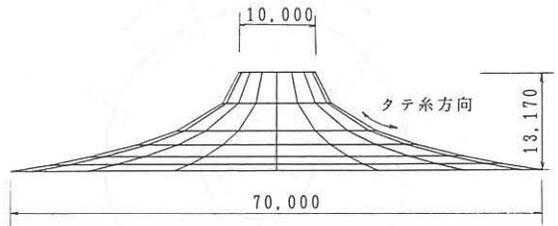


Fig.12 カテノイド曲面の解析形状

Table2 カテノイド曲面の解析条件

初期張力	縦横糸方向	$N_x = N_y = 100.0$	Kg/m
材料定数 (異方性)	引張剛性	$E_{xt} = 60000$	Kg/m
		$E_{yt} = 30000$	Kg/m
	ポアソン比	$\nu_x = 0.8$	
		$\nu_y = 0.4$	
	せん断剛性	$G = 100$	Kg/m
荷重	自重	1.5	Kg/m ²
	積雪荷重(水平面上一様)	60	Kg/m ²

水平投影面積 3770 m²

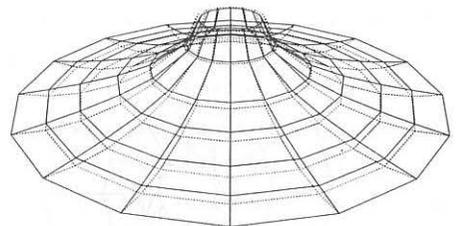


Fig.13 カテノイド曲面の変形形態(積雪荷重時)

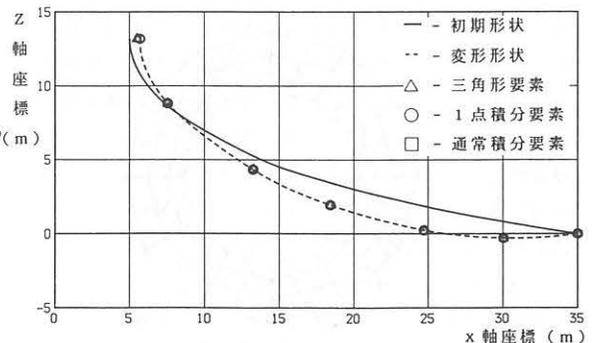
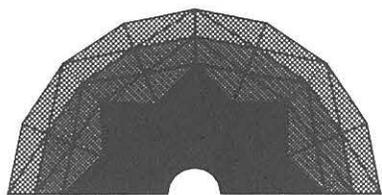
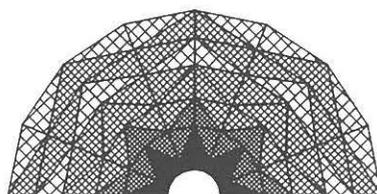


Fig.14 変形量の比較(積雪荷重時)

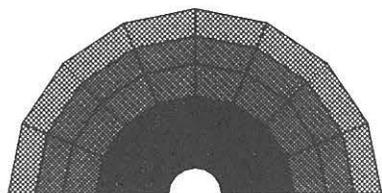


[縦糸方向]

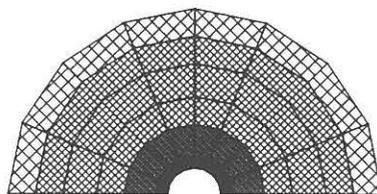


[横糸方向]

(a) 三角形要素による応力分布



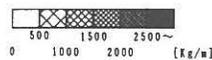
[縦糸方向]



[横糸方向]

(b) 四辺形要素による応力分布

Fig. 15 カテナイド曲面の応力分布 (積雪荷重時)



四辺形要素内を4等分して各積分点ごとにリンクリングを評価した。増分方法はカテナイド曲面の解析と同様である。

Fig. 17において、三角形要素はメッシュ分割方向の影響がみられる。Fig. 17(a) (メッシュ1)ではモザイク状のリンクリング分布がみられ、分割方向を変化させた(b) (メッシュ2)では、モザイク状の分布は解消され実状に即した分布が得られている。一方四辺形要素は1点積分、通常積分要素ともに粗い分割ではあるが比較的実状に近い分布が得られている。Fig. 18の細分割時のリンクリング分布では、(a) (メッシュ1)において粗分割時に比べ若干の改善が見られるが、モザイク状の分布は残っている。(b) (メッシュ2)では細分割により、一部にモザイク状の分布が現れ、三角形要素の要素分割が難しいことが示された。これらは実際の膜構造解析でしばしば見られる応力分布やリンクリング分布の不規則性を再現している。四辺形要素については、粗分割時に比較してより実状に即した良好な分布が得られている。

以上から、三角形要素では解析モデルの応力分布を予測した分割を行う必要性が示されており、四辺形要素は比較的メッシュ分割に対する依存度が低いことが示されている。

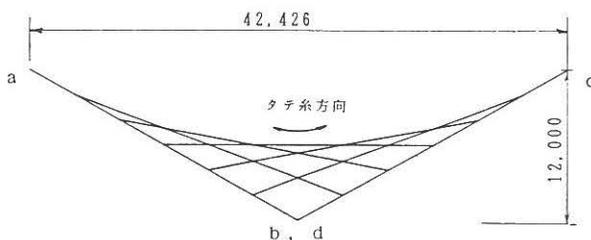
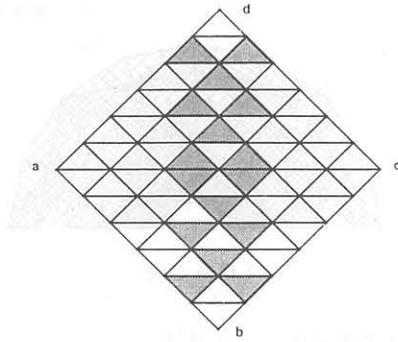


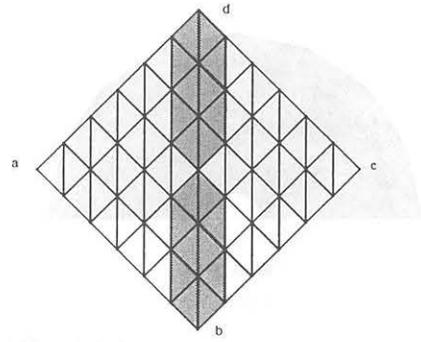
Fig. 16 HP曲面の解析形状 (等分布荷重時)

Table3 HP曲面の解析条件

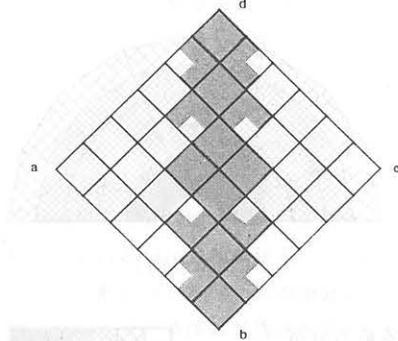
初期張力	縦横糸方向	$N_x = N_y = 100.0 \text{ Kg/m}$
材料定数 (異方性)	引張剛性	$E_{xt} = 40000 \text{ Kg/m}$ $E_{yt} = 20000 \text{ Kg/m}$
	ポアソン比	$\nu_x = 0.6$ $\nu_y = 0.3$
	せん断剛性	$G = 200 \text{ Kg/m}$
	荷重	分布荷重



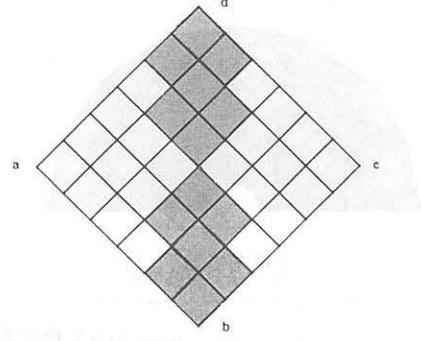
(a) 三角形要素 (メッシュ 1)



(b) 三角形要素 (メッシュ 2)

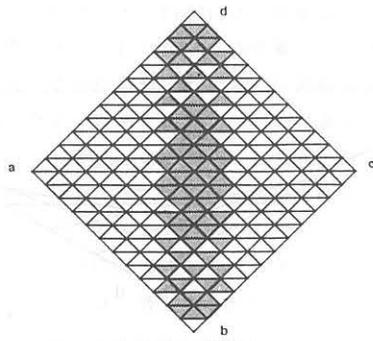


(c) 四辺形通常積分要素

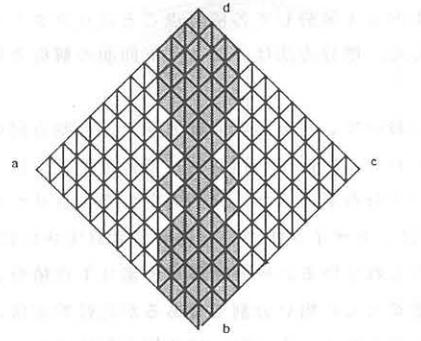


(d) 四辺形 1 点積分要素

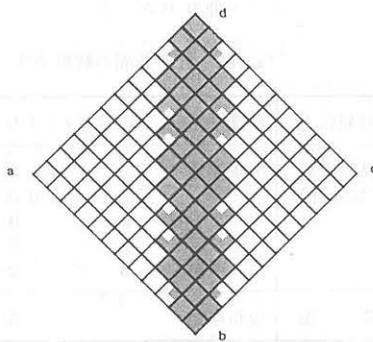
Fig. 17 粗分割時のリンクリング分布 (HP 曲面)



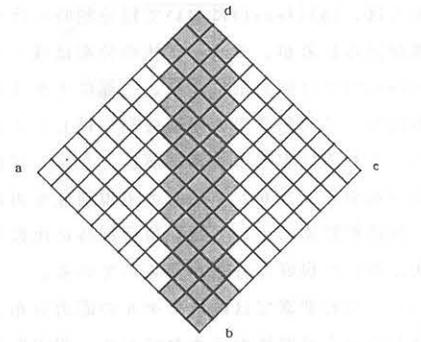
(a) 三角形要素 (メッシュ 1)



(b) 三角形要素 (メッシュ 2)



(c) 四辺形通常積分要素



(d) 四辺形 1 点積分要素

Fig. 18 細分割時のリンクリング分布 (HP 曲面)

5. 結言

計算効率面で有効性の期待できる低次四辺形要素(面内1点積分要素)を膜構造応力変形解析に適用し、その定式化を行った。解析アルゴリズムの検証を目的に、2つの平面張力場問題を取り上げた。数種の数値解析を実施して、定ひずみ三角形要素および四辺形通常積分要素と解析解の比較を行った。以下に得られた結果を示す。

- 1) 2つの張力場解析より、得られた張力線は理論解と良好に一致し、解析アルゴリズムの妥当性を確認できた。
 - 2) 本要素は、要素中央1点で応力評価を行うため、応力勾配の大きいところでは、要素分割を細かくする必要がある。
 - 3) リンクリングの評価は、要素単位で評価するため三角形要素同様に容易なものであった。
 - 4) 本要素を含め四辺形要素は比較的実状に近い応力分布やリンクリング分布が得られ、メッシュ分割に対する依存度が低いことが示された。三角形要素は解析モデルの応力分布を予測した分割の必要性を感じた。
 - 5) 本要素の解析精度は、四辺形通常積分要素で得られる応力を平均値評価したものに近く、変形量も他の要素と比較して遜色のないものであった。
 - 6) 計算効率は、解析プログラムに若干の違いがあり直接の比較は難しいが、節点数を共通とした解析モデルで、三角形要素に対して約30%、通常積分要素に対して約50%の向上が見られた。
 - 7) アワーグラスコントロールについては、本数値解析例を実施した限りでは発生せず、引き続き検討が必要である。
 - 8) 本要素は、四辺形要素として最も単純な要素と位置づけられ、従来の通常積分(2×2 Gauss積分)による膜構造解析プログラムにも容易に組み込める特徴がある。
- 以上から、大規模演算を必要とする動的非線形膜構造解析等へ目的に応じて効率的活用が期待できるものと思われる。

今後、さらに検討を重ね動的非線形問題等への適用を試みて行きたい。

6. 参考文献

- 1) 石井一夫：膜構造の応力・変形解析概説，膜構造研究論文集'90，日本膜構造協会，No. 4, 1990.
- 2) 正岡典夫，石井一夫：低次四辺形膜要素による形状解析について，膜構造研究論文集'90，日本膜構造協会，No. 4, 1990.
- 3) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，培風館，1980.
- 4) 石井一夫：空気膜構造—設計と応用，工業調査会，1977.
- 5) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 3rd Ed., 1982.
- 6) E. Hinton and D. R. J. Owen: Finite Element Software for Plate and Shells, Pineridge Press, 1984.
- 7) O. C. Zienkiewicz, 吉識雅夫・山田嘉昭監訳：マトリックス有限要素法，三訂版，培風館，1984.
- 8) E. Haug and G. H. Powell: Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures, IASS Pacific Symposium, Tokyo, 1971.
- 9) D. P. Flanagan and T. Belytschko: A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, 1981.
- 10) O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan and I. P. King: Stress Analysis of Rock as a No Tension Material, Geotechnique, Vol. 18, 1968.
- 11) 村居秀彦：膜構造の構造設計，横浜国立大学昭和60年度修士論文。
- 12) K. Moriya and M. Uemura: An Analysis of the Tension Field after Wrinkling in Flat Membrane Structures, Proc. of IASS Pacific Symposium, Tokyo, 1971.
- 13) E. Reissner: On Tension Field Theory, Proc. 5th Int. Congress of Applied Mechanics, 1938.
- 14) 西村敏夫，登坂宜好，本間俊雄：有限要素法による張力場解析手法について，日本建築学会構造系論文報告集，No. 351, 1985.

STRESS DEFORMATION ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES BY
USING BILINEAR QUADRILATERAL MEMBRANE ELEMENT
WITH ONE-POINT QUADRATURE

Norio MASAOKA*¹

Kazuo ISHII*²

SYNOPSIS

The membrane structure which has complicate curved surface expends long computation time for prediction of its dynamic nonlinear behavior. Therefore, it is important to find the effective element for computation efficiency and accuracy.

At the stress deformation analysis of membrane structures, the present paper represents feature of quadrilateral membrane element, a bilinear quadrilateral membrane element with one-point quadrature based on the reduced integration technique, which is expected to have higher computation efficiency.

Specially the present paper shows outline of formulation of this element and determination of its analytical algorithm by the tension field analysis. And also this element is compared and discussed with the constant strain triangular element, or the bilinear quadrilateral element with the normal quadrature through the several numerical analyses.

*1. Tomoegumi Iron Works, Ltd., Construction Engineering Dept.

*2. Dr.-Eng., Prof. of Yokohama National University.