

低次四辺形膜要素による形状解析について

正岡典夫*1

石井一夫*2

梗概

膜構造は面外に剛性を有さず、張力を与えることによりはじめて成立する構造形式である。そのため、有限要素法により解析を行う場合は、常に幾何学的非線形性を考慮する必要がある。さらに、応力集中やリンクリングの影響を考慮した要素分割により動的非線形解析まで実施するような場合には、大規模な演算を必要とすることになり、計算の効率化が強く望まれる。

本報告は、板殻構造解析で用いられる次数低減積分手法の考えを取り入れて、双一次四辺形膜要素の面内積分次数を低減し、面内一点積分要素として扱うことにより、計算の効率化を計ることを検討する。そして形状解析問題を通じて、通常積分による方法と低減積分による方法の結果を比較して、低減積分要素の有用性について報告する。

1. 序

膜構造は大空間を合理的に覆うことができ、明るく軽快な空間を創り出すことができることから、近年、多数の大規模構造物が各地に建設されている。

この構造は、構造特性として面外への剛性を有していないことから、初期張力を導入してはじめて成立する構造形式である。そのため、膜面は、面外から外力が作用すると大変形を生じ、さらに、圧縮力、曲げモーメントに抵抗できないという材料特性から、リンクリング(しわ)の問題を併せ持っている。膜構造物の解析を有限要素法により行なう場合は、常にこれらの特性を考慮した幾何学的非線形解析に頼らなくてはならない。

また、応力集中の影響やリンクリングの発生、進展の過程を詳細に再現するような解析を実施する場合や、これらの問題を動的非線形解析まで進めようとした場合には、計算の効率化を計ることが重要な問題となる。

本研究ではこのような立場から、計算の効率化を主目的に低次四辺形膜要素の検討を行った。ここでいう低次四辺形膜要素とは、双一次アイソパラメトリック平面要素の面内積分次数を低減して用いることを意味しており、同要素の膜構造解析への適用を試みるものである。

低次四辺形要素に次数低減積分(Reduced Integration)を施す手法は、すでに板殻構造解析において静的および動的非線形解析に活発に適用されており、計算効率および計算精度の両面においてその有効性が報告されている^{1)~6)}。板殻構造における低減積分手法は、薄肉構造解析における曲げロック現象を防止する目的から、活用されるようになったが、ここでは、単に計算の効率化に主眼をおいている。

本報告では、低減積分を施した低次四辺形膜要素を形状解析問題に適用し、その特性について検討を行う。ここでは、まず、本要素を膜構造解析に適用した場合の予想される特性について述べる。つぎに、有限要素

*1 ㈱巴組鐵工所 建設技術開発室

*2 横浜国立大学工学部建設学科 教授

法による場合の形状解析の定式化を行う。数値解析例として、理論解を有するカテナイド曲面の形状解析および内圧を受ける球面の形状解析を実施し、通常積分により解析した場合と本解析との解析解の精度や演算時間の比較を行う。そして、得られた結果から本要素の膜構造解析への適用について検討を加える。

2. 膜構造への適用

膜構造解析では、一般に定ひずみ三角形要素を活用するが多いが、構造形態によっては四辺形要素を用いた方が都合がよい場合もある。この四辺形膜要素の活用については、アイソパラメトリック四辺形要素や三角形要素を複合した四辺形要素などが上げられるが^{7) 8)}、これらは計算が複雑となったり、計算効率面から必ずしも有利とは言えない場合もある。

本研究で用いる双一次四辺形膜要素は、面内の積分次数を通常の4点から1点に低減積分して用いることから、計算の効率化が期待できるほか、三角形要素と同様に定ひずみ四辺形要素として捉えることができ、非常に単純に取り扱えるものと考えられる。

この双一次1点積分要素の物理的意味については、すでに板殻構造解析への適用に関して都井²⁾により、一種の格子ばりモデルを平板問題に拡張した手法として説明がなされており、ここでは、これをそのまま膜構造解析へ適用したものと考えることができる。

双一次四辺形膜要素を1点積分要素とした場合の利点としては、

- (1) 低次要素として計算の効率化が期待できること。
- (2) 要素が対称なため、三角形要素と比較してメッシュ依存度が低いこと。
- (3) 要素が単純であり、リンクリング処理（ここでは応力遷移法）を行う場合の要素剛性の取扱いが容易となること。

などが上げられる。

ただし、本要素は面内一点積分要素とすることにより、次のような問題があることに注意が必要である。1つは、剛体モード以外の零エネルギーモードが存在することである。ここでは、FlanaganとBelytsckoによって提案された手法を用いて数値的安定化を計る⁶⁾。また、曲面要素の一群と見なされる双一次アイソパラメトリック要素を、定ひずみ四辺形要素として扱うため、要素が曲面上でHP形状にゆがむ場合、すなわち、空間上で同一平面上に四節点が存在しないような変形

を生じた場合の精度の問題などから、適用範囲や要素分割に対する注意が必要と考えられる。

3. 形状解析の定式化

等張力曲面を有限要素法により数値解析的に求める形状解析法には、すでに多くの手法が提案されているが^{7) 12)}など、ここでは、あらかじめ等張力場 ($N_x = N_y, N_{xy} = 0$) を仮定しておき、updated Lagrangian approach¹³⁾により平面を出発点に変位増分もしくは荷重増分により、近似的な釣合曲面を求める手法を用いる。

3.1 要素および座標系の定義

アイソパラメトリック要素の一般的な定式化については、文献(14)等に詳しく述べられているので、ここでは、本研究に用いた双一次1点積分要素の概要について説明する。

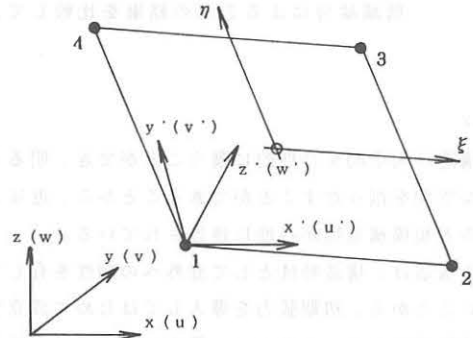


Fig. 1 双一次四辺形膜要素 (1点積分)

Fig.1 に要素形状および座標系を示す。Fig.2 に要素の積分点位置を示す。ここでは、3つの座標系が定義されている。すなわち、要素の幾何形状を定義する全体座標系 (x, y, z)、ひずみと応力を定義するための要素座標系 (x', y', z') および要素空間を定義するための $\xi - \eta$ 座標系である。本要素は、応力評価が要素中央の1点で行われるため、要素座標系の定義にあたっては、要素を平面近似して取り扱うものとして、次のように各座標軸単位ベクトルを定義する¹⁾。

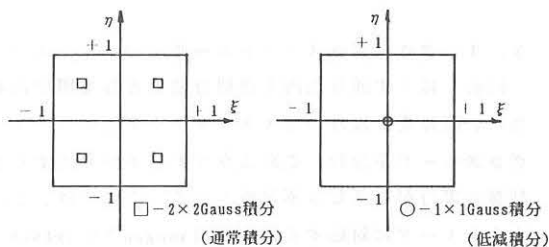


Fig. 2 数値積分位置

まず、要素の平面に垂直な方向として、要素対角線ベクトル (1-3, 2-4) を用いて両者に直交する方向に z' 軸を定義する。

$$e z' = \frac{V 31 \times V 42}{|V 31 \times V 42|} \quad (3-1)$$

ただし、 $v_{ij} = v_i - v_j$

つぎに、要素の 1-2 辺を含む面と $e z'$ 軸に直交する方向に x' 軸を定義する。

$$e x' = \frac{V 21 - (V 21^T \cdot e z') \cdot e z'}{|V 21 - (V 21^T \cdot e z') \cdot e z'|} \quad (3-2)$$

最後に、 y' 軸を法線ベクトル $e z'$ と x' 軸ベクトル $e x'$ のベクトル積より求める。

$$e y' = e z' \times e x' \quad (3-3)$$

ここで、 x' 軸として 1-2 辺を含む面を定義したのは、のちに応力変形解析等、材料の異方性を考慮する場合に、異方性主軸方向が要素分割時に容易に判断できるようにするためである。

3. 2 変位の定義

要素各節点には、並進変位 (u_k, v_k, w_k) の 3 自由度が定義される。要素内任意点 P における要素座標系変位 (u', v', w') は形状関数 $N_k(\xi, \eta)$ を用いて表現することができる。

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} \quad (3-4)$$

ここで、 $N_k(\xi, \eta)$ は双一次要素の形状関数であり次式により与えられる。

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{aligned} \quad (3-5)$$

いま、要素座標系-全体座標系間の方向余弦 (座標変換) マトリックス $[T]$ は、(3-1)~(3-3)式より以下のように示される。

$$[T k]^T = [e x', e y', e z'] \quad (3-6)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T k] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T k] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T k] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T k] \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

節点 k の変位ベクトル $\{u_k\}$ および全体変位ベクトル $\{u\}$ は、下式のように示される。

$$\{u_k\}^T = [u_k, v_k, w_k] \quad (3-8)$$

$$\{u\}^T = [\{u_1\}^T, \{u_2\}^T, \{u_3\}^T, \{u_4\}^T] \quad (3-9)$$

要素の全体座標系変位ベクトルを要素座標系に変換する場合には、下式を用いる。

$$\{u'\} = [T] \cdot \{u\} \quad (3-10)$$

3. 3 変位-ひずみ関係

増分変位に対するひずみ増分の関係は要素中央点 ($\xi = \eta = 0$) において次のように仮定する。

$$\{\Delta \epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon x' \\ \Delta \epsilon y' \\ \Delta \gamma xy' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial (\Delta u')}{\partial x'} \\ \frac{\partial (\Delta v')}{\partial y'} \\ \frac{\partial (\Delta u')}{\partial y'} + \frac{\partial (\Delta v')}{\partial x'} \end{Bmatrix}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w'}{\partial y'} \right)^2 \right\} \\ \frac{\partial \Delta u'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} + \frac{\partial \Delta v'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} + \frac{\partial \Delta w'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \end{array} \right\}$$

$$= \{ \Delta \varepsilon_0' \} + \{ \Delta \varepsilon_N' \} \quad (3-11)$$

ここで、 $\Delta u' \Delta v' \Delta w'$ は要素座標系での増分変位成分である。 $\{ \Delta \varepsilon_0' \}$ はひずみ増分の線形成分、 $\{ \Delta \varepsilon_N' \}$ は非線形成分を表している。

ここで、ひずみ増分の線形成分は次のようにマトリックス表示される。

$$\{ \Delta \varepsilon_0' \} = [B_0] \cdot \{ \Delta u' \} \quad (3-12)$$

$[B_0]$: 線形ひずみマトリックス

要素中央点 ($\xi = \eta = 0$) において、ひずみ増分の線形成分は、最終的に次のように示される。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{0x'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{ \Delta u k' \} \\ &= \frac{1}{2s} \{ (y_2' - y_4') \Delta u_1' + (y_3' - y_1') \Delta u_2' \\ &\quad + (y_4' - y_2') \Delta u_3' + (y_1' - y_3') \Delta u_4' \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{0y'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{ \Delta v k' \} \\ &= \frac{1}{2s} \{ (x_4' - x_2') \Delta v_1' + (x_1' - x_3') \Delta v_2' \\ &\quad + (x_2' - x_4') \Delta v_3' + (x_3' - x_1') \Delta v_4' \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{0xy'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{ \Delta u k' \} + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{ \Delta v k' \} \\ &= \frac{1}{2s} \{ (x_4' - x_2') \Delta u_1' + (x_1' - x_3') \Delta u_2' \\ &\quad + (x_2' - x_4') \Delta u_3' + (x_3' - x_1') \Delta u_4' \\ &\quad + (y_2' - y_4') \Delta v_1' + (y_3' - y_1') \Delta v_2' \\ &\quad + (y_4' - y_2') \Delta v_3' + (y_1' - y_3') \Delta v_4' \} \end{aligned} \quad (3-13)$$

ここで、 s は要素の面積であり次式により求められる。

$$s = \frac{1}{2} \{ (x_3' - x_1') (y_4' - y_2') + (x_2' - x_4') (y_3' - y_1') \} \quad (3-14)$$

3.4 アワーグラスコントロール

Fig. 3 に示す通り面内1点積分要素として用いた場合に、剛体変位以外の零エネルギーモードであるアワーグラスモードを含む。このようなモードが発生すると計算の実行がしばしば不可能となる。ここでは、このようなモードに対処するため、FlanaganとBelytsckoによって提案された手法を採用する⁶⁾。

Flanaganらは剛体モードに直交性を有するような微小の仮想弾性剛性を定義し、要素剛性マトリックスに付加することにより数値的安定化を計っている。

まず、次のようなベクトル $\{ \gamma \}$ の第 k 成分を定義しておく。

$$\begin{aligned} \gamma_k &= H_k - [(H_k)^T \cdot (x')] B_{1k} \\ &\quad + [(H_k)^T \cdot (y')] B_{2k} \end{aligned} \quad (k=1 \sim 4) \quad (3-15)$$

ここに、

$$\{ H_k \}^T = [1, -1, 1, -1]$$

$$\{ x' \}^T = [x_1', x_2', x_3', x_4']$$

$$\{ y' \}^T = [y_1', y_2', y_3', y_4']$$

$$[B_{ak}] = \frac{1}{2s}$$

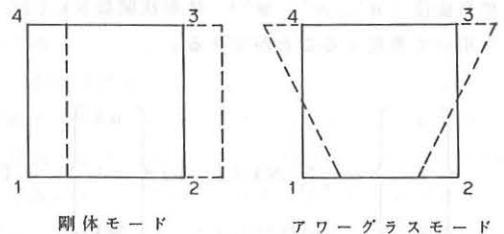
$$\begin{bmatrix} y_2' - y_4' & y_3' - y_1' & y_4' - y_2' & y_1' - y_3' \\ x_4' - x_2' & x_1' - x_3' & x_2' - x_4' & x_3' - x_1' \end{bmatrix} \quad (a=1 \sim 2, k=1 \sim 4) \quad (3-16)$$

このベクトル $\{ \gamma \}$ を用いて、仮想ひずみを定義する。

$$q_1' = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \cdot u k', \quad q_2' = \sum_{k=1}^4 \gamma_k \cdot v k' \quad (3-17)$$

マトリックス表示すると、

$$\{ q' \} = [B_H] \{ u' \} \quad (3-18)$$



剛体モード

アワーグラスモード

Fig. 3 零エネルギーモード

つぎに、仮想ひずみに対応した仮想応力を次式のように定義する。

$$Q1' = C \cdot q1' \quad , \quad Q2' = C \cdot q2' \quad (3-19)$$

ここで、

$$C = \frac{\mu}{8} s (B1k^T \cdot B1k + B2k^T \cdot B2k) \quad (3-20)$$

μ : アワーグラスパラメータ

これをマトリックス表示すると、

$$\{Q'\} = [C] \{q'\} \quad (3-21)$$

仮想弾性剛性は、この仮想ひずみ $\{q'\}$ と仮想応力 $\{Q'\}$ を用いて求めることになる。(3-20)式中のアワーグラスパラメータ μ について、Flanaganらは材料剛性を考慮した推奨値を示しているが、本報告では材料剛性を考慮しない等張力曲面形状解析に適用しているため、全体剛性にほとんど影響を与えない程度の微小量として $\mu = 0.03$ を仮定した。のちに示す数値解析例を実施した限りでは、拘束条件が十分に作用しているため、アワーグラスモードは比較的発生しにくく、ここでは、特に仮想剛性の大きさに注意していない。

3. 5 増分形要素剛性方程式の誘導

updated Lagrangian approach により増分形仮想仕事式を出発点として要素剛性方程式を導くことにする。

ある要素の変形過程の第 n 段階と第 $n+1$ 段階を考える。第 $n+1$ 段階の増分形仮想仕事式は、updated Kirchhoff 応力 (張力) 増分と updated Green ひずみ増分を用いて、次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} & \int \{ \delta(\Delta \varepsilon) \} \{ \Delta N^* \} ds \\ & + \int \{ \delta(\Delta \varepsilon N) \} \{ N0 \}^{(n)} ds + \int \{ \delta(\Delta q) \} \{ \Delta Q \} \\ & = \int \{ \delta(\Delta u) \} \{ \Delta f \} + \int \{ \delta(\Delta u) \} \{ f r \} \end{aligned} \quad (3-22)$$

ここで、上添字 (n) は第 n ステップにおける値を意味する。

上式の左辺第 1 項は線形のひずみ増分と応力増分のなす仮想仕事であるが、本形状解析においては膜材の弾性変形を無視しているため同項を考慮しないものと

する。したがって、(3-22)式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \int \{ \delta(\Delta \varepsilon N) \} \{ N0 \}^{(n)} ds + \int \{ \delta(\Delta q) \} \{ \Delta Q \} \\ & = \int \{ \delta(\Delta u) \} \{ \Delta f \} + \int \{ \delta(\Delta u) \} \{ f r \} \end{aligned} \quad (3-23)$$

(3-23)式の左辺第 1 項は、第 n 段階における初期応力 (初期張力) $\{ N0 \}^{(n)}$ のなす仮想仕事であり、式中の $(\Delta \varepsilon N)$ は、ひずみ増分の非線形成分を示している。同項は以下のようにマトリックス表示することができる。

$$\int \{ \delta(\Delta u) \} [T]^T [KG'] [T] \{ \Delta u \} \quad (3-24)$$

$[T]$: 座標変換マトリックス

ここで、

$$[KG'] = [G]^T [N0] [G] \cdot s^{(n)} \quad (3-25)$$

$[KG']$: 要素幾何剛性マトリックス

$s^{(n)}$: 第 n 段階での要素面積

$[N0]$: 初期応力 (初期張力) マトリックス
(等張力状態では $N_x = N_y$, $N_{xy} = 0$)

$$[N0] = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} \\ N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 & 0 \\ 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{ \Delta u k' \} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{ \Delta v k' \} \\ \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial x'} \{ \Delta w k' \} \\ \frac{\partial \Delta u'}{\partial y'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{ \Delta u k' \} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial y'} &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{ \Delta v k' \} \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial \Delta w'}{\partial y'} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k}{\partial y'} \{\Delta w k'\}$$

上式の関係を用いて、[G] は以下のように定義される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Delta v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Delta w'}{\partial y'} \end{array} \right\} = [G] \cdot \{\Delta u'\} \quad (3-28)$$

(3-23)式の左辺第2項は、アワーグラス仮想応力増分のなす仮想仕事であり、以下のようにマトリックス表示することができる。

$$[\delta(\Delta u)]^T [T]^T [KH'] [T] \{\Delta u\} \quad (3-29)$$

ここで、(3-18)、(3-21)式の関係より、

$$[KH'] = [BH]^T [C] [BH] \quad (3-30)$$

(3-23)式右辺の第1項は外力増分のなす仮想仕事であり、第2項は第n段階での残差力ベクトル{f_r}による仮想仕事である。

残差力ベクトル{f_r}は、下式により定義される。

$$\{f_r\} = \{f\} - \{ [T]^T [B_0]^T \{N_0\}^{(n)} ds - [T]^T [BH]^T \{Q\}^{(n)} \} \quad (3-31)$$

ここで、

- {f} : n段階での外力ベクトル
- [B₀] : n段階における線形のひずみマトリックス
- {N₀} : 初期張力ベクトル
- [BH] : アワーグラス仮想ひずみマトリックス
- {Q} : アワーグラス仮想応力ベクトル

以上から、増分形仮想仕事式をもとに増分形要素剛性方程式を求めると、

$$[T]^T \{ [KG'] + [KH'] \} [T] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} + \{f_r\} \quad (3-32)$$

が得られる。

非線形方程式の解法として、ここでは、ニュートンラプソン手法を用いている。なお、膜面に内圧荷重を受ける場合の荷重の取扱いについては、変形後の形状において荷重ベクトルの方向を修正することにより変形に追従させることとした。

4. 数値解析例

前章での定式化に基づいて、数種の数値解析を実施した。ここでは、理論解を有する数値解析例として、カテナイド曲面の形状解析と内圧を受ける球面の形状解析を行った。なお、使用した計算機はグラフィックスーパーワークステーションstellar GS-2000である。

4.1 カテナイド曲面の解析

カテナイド曲面は、懸垂曲線を回転させることにより得られる等張力曲面であり、(4-1)式にその理論解を示す⁷⁾。

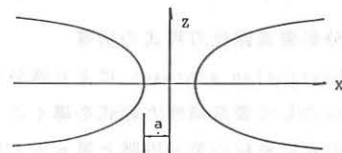


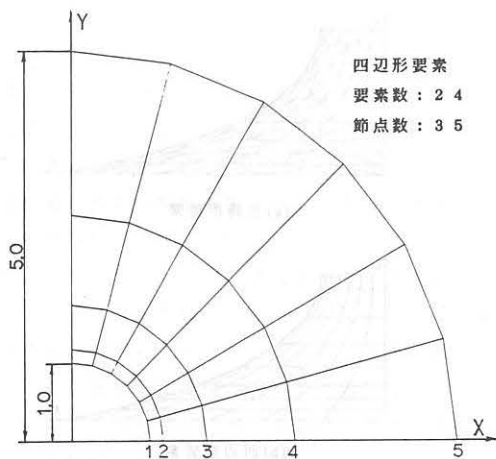
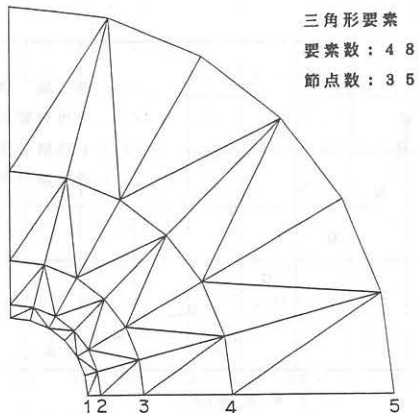
Fig. 4 カテナイド曲面

$$Z = a \{ \ln(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-a^2}) - \ln(a) \} \quad (4-1)$$

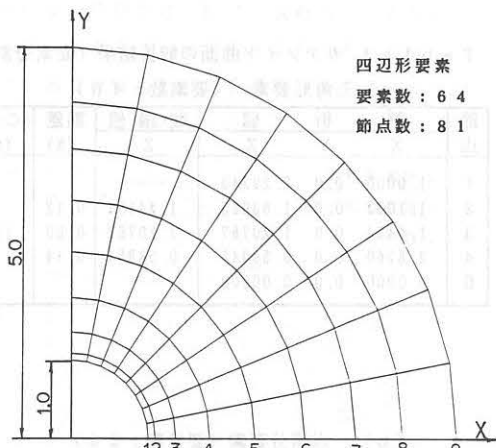
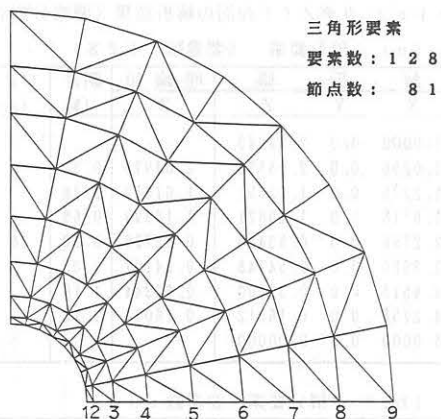
4.1.1 解析解の精度と演算時間の比較

Fig.5に示す2種類の節点データに関して、本研究で用いた1点積分要素のほか、通常積分要素(4点積分)、定ひずみ三角形要素についても解析を実施し、解析解の収束精度と演算時間の比較を行った。

節点データの異なる2種類の要素分割I、IIに関する解析結果をFig.6,7およびTable1,2に示す。解析は、強制変位増分回数を5回とし、最終段階において10回の反復計算を実施した。解析結果からは、1点積分要素と他の2種類の要素による結果に差はなく、理論

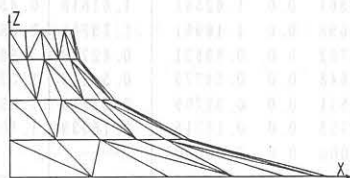


(a) 要素分割 I (初期張力: $N_x = N_y = 100 \text{ Kg/m}$, $N_{xy} = 0$)

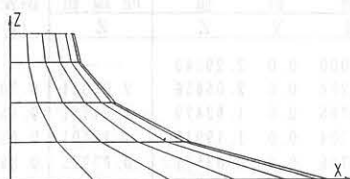


(b) 要素分割 II (初期張力: $N_x = N_y = 100 \text{ Kg/m}$, $N_{xy} = 0$)

Fig. 5 カテナイド曲面解析モデル (要素分割 I, II)



(a) 三角形要素



(b) 四辺形要素

Fig. 6-1 最終形状 (要素分割 I)

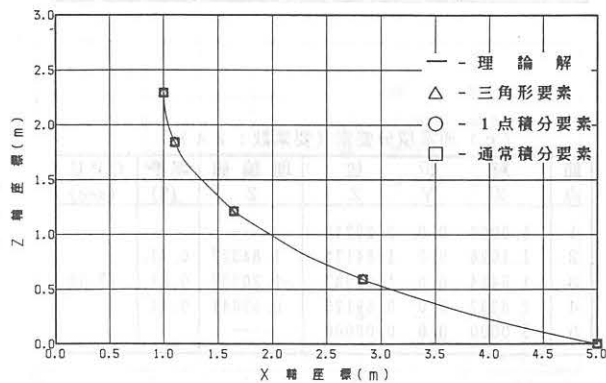
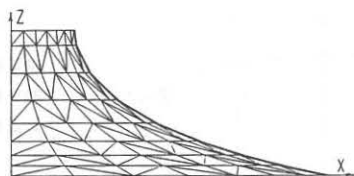
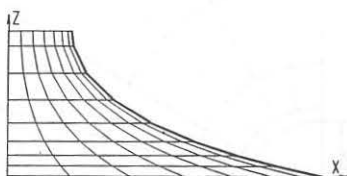


Fig. 6-2 理論解との比較 (要素分割 I)



(a) 三角形要素



(b) 四辺形要素

Fig. 7-1 最終形状 (要素分割II)

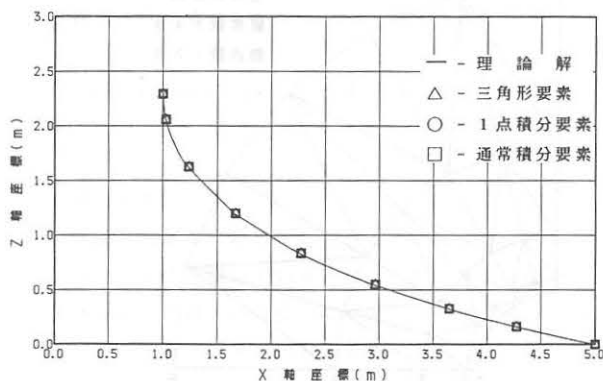


Fig. 7-2 理論解との比較 (要素分割II)

Table 1 カテナイド曲面の解析結果 (要素分割I)

(a) 三角形要素 (要素数: 48)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.1033	0.0	1.83963	1.84184	0.12	
3	1.6484	0.0	1.20767	1.20762	0.00	11.08
4	2.8360	0.0	0.59041	0.58954	0.14	
5	5.0000	0.0	0.00000	----		

(b) 一点積分要素 (要素数: 24)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.1023	0.0	1.84216	1.84393	0.10	
3	1.6440	0.0	1.21096	1.21101	0.01	9.26
4	2.8326	0.0	0.59166	0.59083	0.14	
5	5.0000	0.0	0.00000	----		

(c) 通常積分要素 (要素数: 24)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.1026	0.0	1.84135	1.84327	0.11	
3	1.6454	0.0	1.20987	1.20987	0.01	17.11
4	2.8337	0.0	0.59125	0.59041	0.14	
5	5.0000	0.0	0.00000	----		

Table 2 カテナイド曲面の解析結果 (要素分割II)

(a) 三角形要素 (要素数: 128)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.0296	0.0	2.05598	2.04979	0.30	
3	1.2375	0.0	1.62351	1.61613	0.46	
4	1.6718	0.0	1.19821	1.18999	0.69	
5	2.2796	0.0	0.83469	0.82728	0.90	34.55
6	2.9656	0.0	0.54748	0.54191	1.03	
7	3.6515	0.0	0.32700	0.32344	1.10	
8	4.2755	0.0	0.16212	0.16034	1.10	
9	5.0000	0.0	0.00000	----		

(b) 一点積分要素 (要素数: 64)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.0294	0.0	2.05684	2.05069	0.30	
3	1.2361	0.0	1.62541	1.61818	0.45	
4	1.6698	0.0	1.19961	1.19151	0.68	
5	2.2782	0.0	0.83531	0.82799	0.88	27.07
6	2.9648	0.0	0.54773	0.54219	1.02	
7	3.6511	0.0	0.32709	0.32356	1.09	
8	4.2753	0.0	0.16215	0.16039	1.10	
9	5.0000	0.0	0.00000	----		

(c) 通常積分要素 (要素数: 64)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	1.0000	0.0	2.29243	----		
2	1.0294	0.0	2.05656	2.05041	0.30	
3	1.2365	0.0	1.62479	1.61751	0.45	
4	1.6704	0.0	1.19915	1.19101	0.68	
5	2.2786	0.0	0.83511	0.82775	0.89	48.17
6	2.9651	0.0	0.54765	0.54210	1.02	
7	3.6512	0.0	0.32706	0.32352	1.10	
8	4.2754	0.0	0.16214	0.16037	1.11	
9	5.0000	0.0	0.00000	----		

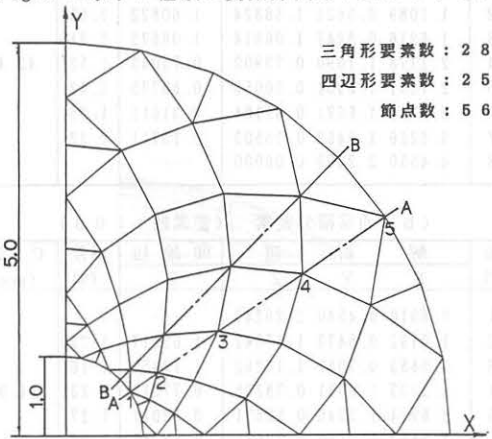
値ともそれぞれ良好に一致しており、要素分割の影響も見られなかった。

本解析では、1点積分要素を構成する4節点が変形後も同一平面上にあるような分割となっているため、解析結果も良好なものが得られたものと思われる。なお、演算時間の比較では、1点積分要素と通常積分要素を比較した場合に約45%程度、プログラム構成が違うので単純比較できないが、三角形要素では約20%程度の低減が計られた。本解析が、幾何剛性マトリックスのみを使用する形状解析であることを考えると、応力変形解析や動的非線形解析時にはさらに計算の効率化が期待できるものと思われる。

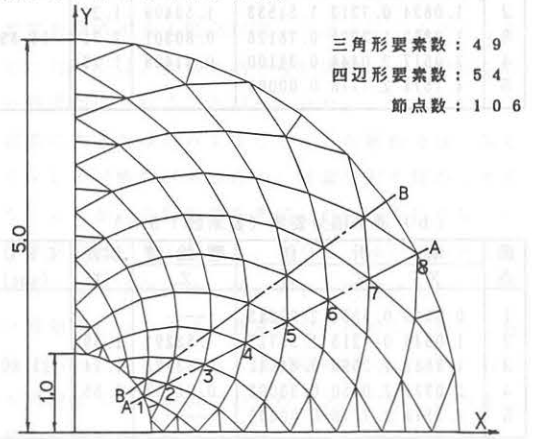
4. 1. 2 要素のゆがみと解析精度について

要素を構成する4節点が同一平面上に来ないような変形を生じる場合の解析例を示す。

Fig. 8 に示す2種類の要素分割Ⅲ、Ⅳについて、カ



テノイド曲面の形状解析を実施した。強制変位増分の方法は、前回と同様である。要素分割Fig8. 中のA-A点に関する解析結果を、Fig. 9-2, 10-2中の○、□およびTable3, 4に示す。○、□は、それぞれ1点積分要素と通常積分要素の解析結果を示したものであるが、どちらも理論解(実線)に良好に一致していることがわかる。しかし、A-A点に隣接するB-B点に関しては、1点積分要素の場合に限ってFig. 9-2, 10-2に●で示す通り、曲率変化が大きいところで大きく誤差を生じている。要素分割Ⅲでは理論値に対して14%、要素分割Ⅳで15%であった。これは、要素を平面近似している影響と考えられ、要素分割を細かくすることにより誤差は減少するものと思われたが、本解析で用いた程度の分割では、結果の改善は見られない。したがって、本要素は、要素のゆがみをあまり生じないように、ある程度変形形態を考慮した要素分割を行う必要があるものと考えられる。



c) 要素分割Ⅲ (初期張力: $N_x=N_y=100\text{Kg/m}$, $N_{xy}=0$) (d) 要素分割Ⅳ (初期張力: $N_x=N_y=100\text{Kg/m}$, $N_{xy}=0$)

Fig. 8 カテノイド曲面解析モデル (要素分割Ⅲ, Ⅳ)

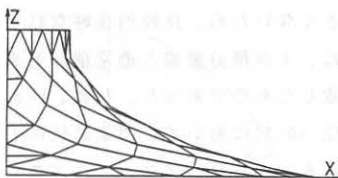


Fig. 9-1 最終形状 (要素分割Ⅲ)

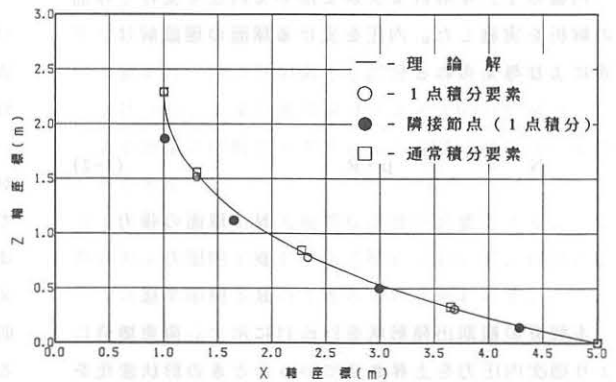


Fig. 9-2 理論解との比較 (要素分割Ⅲ)

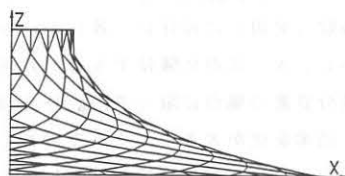


Fig. 10-1 最終形状 (要素分割IV)

Table 3 カテナイド曲面の解析結果 (要素分割III)

(a) 一点積分要素 (要素数: 53)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	0.8315	0.5557	2.29243	----		16.83
2	1.0834	0.7213	1.51533	1.53409	1.22	
3	1.9387	1.2925	0.78126	0.80301	2.71	
4	3.0617	2.0448	0.31100	0.31488	1.23	
5	4.1574	2.7778	0.00000	----		

(b) 通常積分要素 (要素数: 53)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	0.8315	0.5556	2.29243	----		25.80
2	1.0846	0.7213	1.55727	1.53291	1.59	
3	1.8883	1.2593	0.84642	0.83191	1.74	
4	3.0321	2.0250	0.33002	0.32497	1.55	
5	4.1574	2.7778	0.00000	----		

4.2 内圧を受ける球面の解析

円盤の1/4解析モデルを用いて内圧を受ける球面の解析を実施した。内圧を受ける球面の理論解は、下式により与えられる¹⁵⁾。

$$N = \frac{1}{2} p \cdot R \quad (4-2)$$

N: 球面の張力

p: 内圧力

R: 曲率半径

本解析の初期出発形状をFig. 11に示す。荷重増分により順次内圧力を上昇させていったときの形状変化をFig. 12に、理論値との比較をFig. 13に示す。

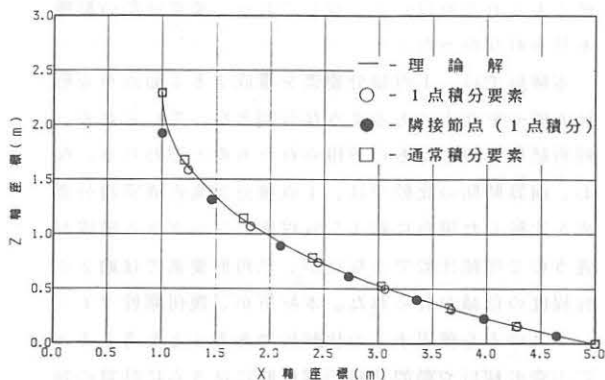


Fig. 10-2 理論解との比較 (要素分割IV)

Table 4 カテナイド曲面の解析結果 (要素分割IV)

(a) 一点積分要素 (要素数: 103)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	0.8910	0.4540	2.29243	----		43.40
2	1.1089	0.5624	1.58324	1.60822	1.55	
3	1.6216	0.8247	1.06814	1.08673	1.71	
4	2.1778	1.1090	0.73902	0.75043	1.52	
5	2.7291	1.3901	0.50055	0.50775	1.42	
6	3.2767	1.6691	0.31184	0.31611	1.35	
7	3.8216	1.9469	0.15503	0.15711	1.32	
8	4.4550	2.2699	0.00000	----		

(b) 通常積分要素 (要素数: 103)

節点	解析値			理論値 Z	誤差 (%)	CPU (sec)
	X	Y	Z			
1	0.8910	0.4540	2.29243	----		64.84
2	1.0792	0.5473	1.67542	1.65517	1.22	
3	1.5653	0.7957	1.14262	1.12952	1.16	
4	2.1333	1.0861	0.78265	0.77315	1.23	
5	2.6974	1.3740	0.52671	0.52011	1.27	
6	3.2562	1.6590	0.32681	0.32261	1.30	
7	3.8112	1.9419	0.16205	0.15989	1.35	
8	4.4550	2.2699	0.00000	----		

解析の結果は平面円盤を出発点として、ライズ/スパン比 = 0.31 (半球は 0.5) まで示しているが、理論値との比較で最大 1.5% 程度の誤差であった。要素分割が比較的荒く、変形時に要素を構成する節点在同一平面上にこない分割となっているが、要素のゆがみがあまり大きくないため、比較的良好的結果が得られている。また、1点積分要素と通常積分要素の結果はほとんど一致したものであった。なお、Fig. 12のライズ/スパン比 = 0.31において、要素形状に若干の不規則性が見られる。これは、アワーグラスモードに対する仮想弾性付加剛性を微量量としているため生じたものとも考えられるが、計算の実行に影響は出ていない。

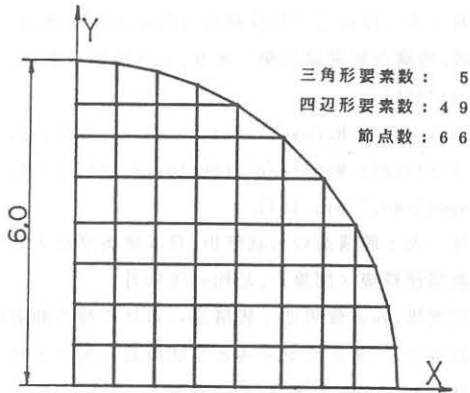


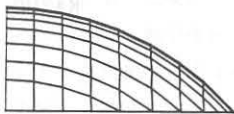
Fig. 11 初期出発形状 (平面)
(初期張力: $N_x = N_y = 100 \text{ Kg/m}$, $N_{xy} = 0$)



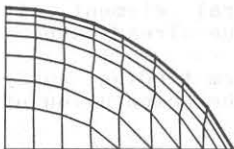
ライズ/スパン比 = 0.08



ライズ/スパン比 = 0.17



ライズ/スパン比 = 0.23



ライズ/スパン比 = 0.31

Fig. 12 形状変化

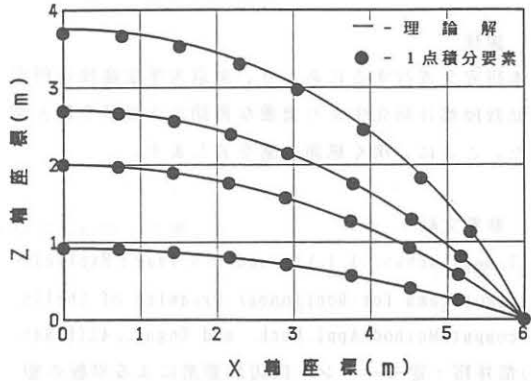


Fig. 13 理論解との比較

5. 結言

計算の効率化を目的に、低減積分を施した双一次アイソパラメトリック四辺形要素を膜構造形状解析問題に適用し、その定式化を行った。数値解析例として、カテナイド曲面の形状解析および内圧を受ける球面の形状解析を実施した。以下に得られた結果を示す。

- 1) 要素を構成する4節点が同一平面上にくるような変形に対しては、要素分割が荒い場合にも、良好な解析精度が得られることがわかった。
- 2) 要素に大きなゆがみを生じるような解析では、誤差を生じる可能性があるため、要素分割を細かくするなどのほか、変形形態を考慮した分割を行うなどの配慮が必要と考えられる。ただし、ゆがみがあまり大きくない場合には、特に大きな問題はない。
- 3) 計算効率については、通常積分と比較してかなり有効であった。ここでは、幾何剛性マトリックスのみを考慮する形状解析での比較であったが、応力変形解析や動的非線形解析では、さらに効率化が期待できる。
- 4) アワーグラスコントロール用仮想弾性付加剛性の大きさについては、ここではあまり問題としなかったが、今後検討が必要である。
- 5) 本要素は、四辺形要素として最も単純な要素と位置づけられ、従来の通常積分 (2×2 Gauss 積分) による膜構造解析プログラムにも容易に組み込める特徴がある。

以上から、本要素は大規模な演算を必要とするような静的および動的な非線形膜構造解析において、目的に応じて効率的な活用が期待できるものと思われる。

今後、さらに検討を重ね各種解析への適用を試み、本要素の特性について検討を進めたい。

6. 謝辞

本研究を遂行するにあたり、東京大学生産技術研究所助教授都井裕先生より貴重な御助言と資料を頂きました。ここに、深く感謝の意を表します。

7. 参考文献

- 1) T. Belytschko, J. I. Lin and C. S. Tsay: Explicit Algorithms for Nonlinear Dynamics of Shells, *comput. Method. Appl. Mech. and Engng.*, 42(1984).
- 2) 都井裕: 定モーメント四辺形要素による平板の塑性解析, 日本造船学会論文集, 第155号(1984).
- 3) 都井裕, 正岡典夫, 川井忠彦: 双一次degenerateシェル要素による板殻構造の非線形解析(その1), 生産研究, 第38巻, 第5号(1986).
- 4) 都井裕, 正岡典夫, 川井忠彦: 双一次degenerateシェル要素による板殻構造の非線形解析(その2), 生産研究, 第38巻, 第6号(1986).
- 5) 都井裕, 弓削康平, 川井忠彦: 構造要素の衝突圧壊強度に関する基礎的研究(その1), 日本造船学会論文集, 第154号(1986).
- 6) D. P. Flanagan and T. Belytschko: A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18(1981).
- 7) 石井一夫: 膜構造の形状解析(形状決定の問題) 概説, 膜構造研究論文集' 89, 日本膜構造協会, No. 3(1989).
- 8) E. Haug and G. H. Powell: Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures, IASS Pacific Symposium, Tokyo, 1971.
- 9) 石井一夫: 膜構造の形状解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 昭和59年10月.
- 10) 本間俊雄, 鈴木俊男他: 膜構造における極小曲面問題について, 第2回シェルと空間構造に関する日・韓コロキウム論文集, Aug., 1987.
- 11) 大森博司, 萩原伸幸他: 有限要素法による極小曲面の数値解析, 膜構造研究論文集' 88, 日本膜構造協会, No. 2(1988).
- 12) 鈴木俊男, 半谷裕彦: 等張力曲面形状の数値解析, 膜構造研究論文集' 89, 日本膜構造協会, No. 3(1989).
- 13) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 3rd Ed., (1982).
- 14) E. Hinton and D. R. J. Owen: Finite Element Software for Plate and Shells, Pineridge Press, (1984)
- 15) 石井一夫: 空気膜構造—設計と応用, 工業調査会, (1977)

FORM FINDING ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES BY USING BILINEAR QUADRILATERAL MEMBRANE ELEMENT

NORIO MASAOKA*1

KAZUO ISHII*2

SYNOPSIS

A membrane structure is required the initial tension in its membrane surface to be stabilized by itself. To analyze such a structure by the finite element method, the geometrical nonlinearity should be considered. Generally, long period of computation is required for a static or a dynamic nonlinear analysis considering the stress concentration and the wrinkling due to its material characteristics. Thus, an efficient computation is one of the important matters.

In the present paper, to improve the computation efficiency, the membrane structure is analyzed with a bilinear quadrilateral element with one-point quadrature based on the reduced integration technique already used in the plate and shell structure analysis.

Based on the results obtained through the form finding analyses, it is investigated a feature of the present element and the computation efficiency.

*1 Tomoegumi Iron Works, Ltd., Construction Engineering Dept.

*2 Dr.-Eng., Prof. of Yokohama National University.