

矩形板要素による膜構造の安定化移行解析

宮崎 賢一 *1

川口 健一 *1

半谷 裕彦 *1

概 概

膜材は曲げ剛性が極端に小さく、作用する荷重条件により形状が決まってくる。本論文では歪が零で生じる剛体変位に注目し、張力導入以前の不安定状態にある膜構造が、荷重が作用することで荷重モードに応じた安定状態に移行していく過程を理論的に解析する。

1. 研究目的

膜材のように極端に曲げ剛性の小さい材料を建築物の構造材として使用する場合には、通常何らかの方法で安定化させる必要がある。周辺を引っ張って初期張力を導入したり、内部空間に送風して膜面を膨らませて緊張させること等がその例である。しかし安定化以前には容易に大変位を生じることから、適当な時期に大変位を生じさせて所定の安定形状を形成するという方法で建設、使用されている場合が多い。

この時、ケーブルや膜面は与えられた荷重条件下でより安定な形状を自ら見つけだし、変形していく。大変位の前後で、構造の形状は大きく変わるが、膜面の幾何学的形状（特性寸法 [2]）は不変である。

本論文では、膜面がその特性寸法を保存しながら大変位を生じる過程を、その過程で支配的になる無歪変位（剛体変位）に注目し、解析的に追っていくことを目標にしている。膜面のモデル化としては剛な矩形板要素の集合として、膜面をモデル化している。本解析手法では一般逆行列理論に基づいた一般増分法を効果的に利用している [1]。

2. 安定化移行解析

形状の与えられた構造物が、与えられた荷重条件の

下で、ポテンシャルエネルギーの低い安定な釣合い状態を目指して変位していく過程を安定化移行過程と呼び、この過程を解析的に求めることを安定化移行解析と呼ぶ。

与えられた構造形状を一般化座標 x を用いて表す。図 1 に示すように、荷重の作用下において、初期状態 C_0 から現在の状態 C_i に至り、引き続き、 C_{i+1} の状態に移行していくとする。現時点 C_i での構造形状を x_i 、増分ベクトルを Δx_i で表すと、 C_{i+1} における構造形状は

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (1)$$

と表される。本解析では、一般増分法の手法に基づき

a. x_i を基準状態として Δx_i を導出し、 x_{i+1} を求める。

b. x_{i+1} を新たな基準状態として、 Δx_{i+1} を導出し、 x_{i+2} を求める。

と、各ステップで Update に基準状態を更新していく。

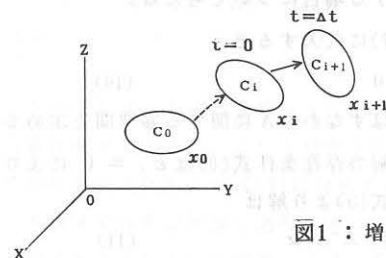


図1：増分解析の概念

*1 東京大学生産技術研究所

架構の形状をパラメータの関数として、基準状態 C_i について Maclaurin 展開すると

$$x_i(t) = x_i + \dot{x}_i \cdot t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \cdot t^2 + \dots \quad (2)$$

と $x(t)$ を表すことができる。状態の移行にともなう架構内の歪の変化について考える。状態 C_i と C_{i+1} における歪の状態を各々 e_i 、 e_{i+1} で表すと、式(1)、(2)と同様にして

$$e_{i+1} = e_i + \dot{e}_i \cdot \Delta t \quad (3)$$

$$e_i(t) = e_i + \dot{e}_i \cdot t + \frac{1}{2} \ddot{e}_i \cdot t^2 + \dots \quad (4)$$

本解析では線形近似として、式(2)、(4)の t の一次項までを採用することとする。したがって、常に現時点 C_i を基準として増分 Δt 後の状態を C_{i+1} とすれば

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \cdot \Delta t \quad (5)$$

$$e_{i+1} = e_i + \dot{e}_i \cdot \Delta t \quad (6)$$

と表される。ここに $\dot{x}_i$ 、 $\dot{e}_i$ は各々変位速度ベクトル及び歪速度ベクトルである。

変位速度ベクトルと歪速度ベクトルは構造の形状によって幾何学的に関係づけられ、次式で与えられる。

$$\dot{e}_i = A \dot{x}_i \quad (7)$$

この関係式は適合条件式と呼ばれている。適合条件の数を m 、 x_i に対応する自由度数を n とすれば、 A は $m \times n$ の長方マトリックスとなっている。

一般逆行列の理論を用いて式(7)を解く。式(7)が解を持つための必要充分条件は

$$[I_n - A A^+] \dot{e} = 0 \quad (8)$$

ここに A^+ は Moore-Penrose 型一般逆行列、 I_n は n 次元単位マトリックスである。式(8)が満たされるとき、式(7)は解を持ち、以下の式で表される。

$$\dot{x}_i = A^+ \dot{e}_i + [I_n - A^+ A] \dot{\alpha} \quad (9)$$

上式右辺の第1項は特解、第2項は余解に相当し、 $\dot{\alpha}$ は任意の n 次元ベクトルである。

以下では歪が零、すなわち剛体的な変位によって、構造形状が変化する場合について考える。

$\dot{e}_i = 0$ を式(7)に代入すると、

$$A \dot{x}_i = 0 \quad (10)$$

となる。式(10)はすなわち A に関する零空間を求める問題に等しい。解の存在条件式(8)は $\dot{e}_i = 0$ により常に満たされ、式(9)より解は

$$\dot{x}_i = [I_n - A^+ A] \dot{\alpha} \quad (11)$$

一般逆行列の性質から式(11)の右辺の係数マトリク

スは A の零空間への正射影行列を表している。

$\text{rank}(A) = r$ とすると、

$$p = \text{rank}(I_n - A^+ A) = n - r \quad (12)$$

上式は式(11)で表される解のうち、線形独立なベクトルの個数は p 個であること、つまり A の零空間の正規直交基底を $h_1, \dots, h_p$ とすると、式(11)は次式で表される。

$$\dot{x}_i = \dot{\alpha}_1 h_1 + \dots + \dot{\alpha}_p h_p \quad (13)$$

$h_1, \dots, h_p$ は独立な剛体変位モードを表しており、式(13)はその線形結合で $\dot{x}_i$ が得られることを示している。上式において $\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p$ が与えられれば、 $\dot{x}_i$ が得られ、式(5)より $\dot{x}_{i+1}$ が得られることになる。以下、 $\dot{\alpha}' = (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p)$ と置き直すことにする。

3. 安定化条件

以下、ポテンシャルエネルギーを増分過程における計量として採用する。与えられた構造が初期状態 C_0 から状態 C_i を経て最終的な安定化状態 C_f に到るとする。各状態において構造は漸次、安定化状態に向かっており、最小ポテンシャルエネルギーの原理によって、各状態におけるポテンシャルエネルギー Π の間には

$$\Pi(C_0) > \dots > \Pi(C_i) > \dots > \Pi(C_f) \quad (14)$$

が成立している。ポテンシャルエネルギーの増分を $\Delta \Pi(C_i)$ とすると、

$$\Pi(C_{i+1}) = \Pi(C_i) + \Delta \Pi(C_i) \quad (15)$$

これと式(14)から

$$\Delta \Pi(C_i) < 0 \quad (16)$$

C_f でポテンシャルエネルギーが最小値となることから

$$\Delta \Pi(C_f) = 0 \quad (17)$$

$e_i = 0$ の下で考えているから、歪エネルギーの変化は零となる。したがって増分 Δt によるポテンシャルエネルギーの変化は、荷重モードベクトルを f として

$$\Delta \Pi(C_i) = -(\dot{x}' f) \Delta t \quad (18)$$

となる。安定化状態においては式(17)より

$$\dot{x}' f = 0 \quad (19)$$

が成立する。上式を安定化移行条件と呼ぶ。

式(16)に式(13)を代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta \Pi(C_i) &= -(\dot{\alpha}_1 h_1 + \cdots + \dot{\alpha}_p h_p)' f \Delta t \\ &= -(\dot{\alpha}_1, \cdots, \dot{\alpha}_p) \begin{Bmatrix} h_1' f \\ \vdots \\ h_p' f \end{Bmatrix} \Delta t \quad (20) \\ &= -\dot{\alpha}' p \Delta t\end{aligned}$$

ただし、

$$\dot{\alpha} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_p \end{Bmatrix}, \quad p = \begin{Bmatrix} h_1' f \\ \vdots \\ h_p' f \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式(20)は C_i の時点におけるポテンシャルエネルギー曲面の p 次元空間での接平面の表現となっている。増分 Δt における移行過程がポテンシャルエネルギー曲面の最大勾配方向に生じるとすると、その方向は

$$\dot{\alpha} \propto \text{grad}(\Delta \Pi) = \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial \alpha_i} \quad (22)$$

より

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha} \begin{Bmatrix} h_1' f \\ \vdots \\ h_p' f \end{Bmatrix} \quad (23)$$

となる。ただし、 $\dot{\alpha}$ は適当な実数。式(23)を最適移行条件と呼ぶ。式(23)より $\dot{\alpha}$ が与えられるから式(13)に代入して $\dot{x}$ は

$$\dot{x} = \dot{\alpha} (h_1' f h_1 + \cdots + h_p' f h_p) \quad (24)$$

と決定することができる。また式(18)に代入して

となるから式(16)は自動的に満たされる。安定化状態においては式(19)より

$$\begin{aligned}(h_1' f)^2 + \cdots + (h_p' f)^2 &= 0 \\ \therefore h_1' f &= 0, \quad \cdots, \quad h_p' f = 0 \quad (26)\end{aligned}$$

が得られ、全ての剛体変位モードと荷重ベクトルとが直交していることがわかる。

4. 矩形板要素による膜構造のモデル化

本論文では膜構造を剛な板の集合としてモデル化することを考える。ただしこの剛板は仮想的なもので、実際は図2に示すような直交する剛棒で板をさらにモデル化している。この直交する剛棒による要素を以降剛棒板と呼ぶ。

図3に示す様に、1個の剛棒板の4つの接点を i, j, k, l で、各接点の位置ベクトルを x_i, x_j, x_k, x_l で表す。剛棒 a に対応する点 i から j へ向かうベクトルを a 、剛棒 b に対応して、点 k から l へ

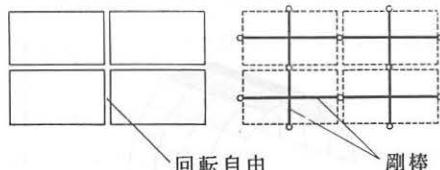


図2：矩形板と剛棒板

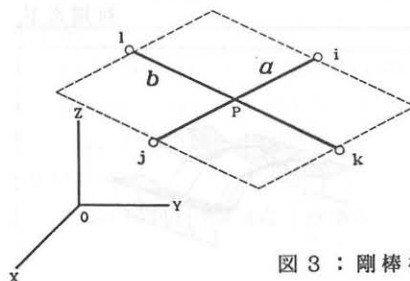


図3：剛棒板

向かうベクトルを b とすると、

$$a = x_j - x_i, \quad b = x_l - x_k \quad (27)$$

剛棒の長さ、互いの交角は各々

$$l_a = \sqrt{a'a}, \quad l_b = \sqrt{b'b} \quad (28)$$

$$\cos \psi_{ab} = \theta_{ab} = \frac{a'b}{l_a l_b} \quad (29)$$

さらに剛棒 a と b とが互いに中点で交わるための条件は

$$x_i + x_j = x_k + x_l \quad (30)$$

式(28)~(30)をパラメータ t に関して微分すると、

$$\dot{l}_a = \frac{a' \dot{a}}{l_a}, \quad \dot{l}_b = \frac{b' \dot{b}}{l_b} \quad (31)$$

$$\dot{\theta}_{ab} = \frac{b' \dot{a} + a' \dot{b}}{l_a l_b} \quad (32)$$

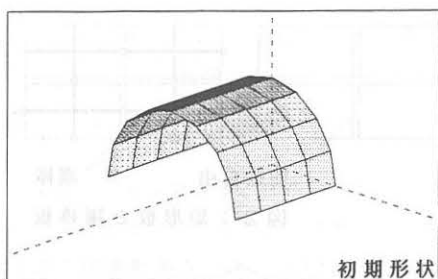
$$\dot{x}_i + \dot{x}_j = \dot{x}_k + \dot{x}_l \quad (33)$$

式(31)~(33)を自由度 $\dot{x}$ について整理してマトリックス表示すると、

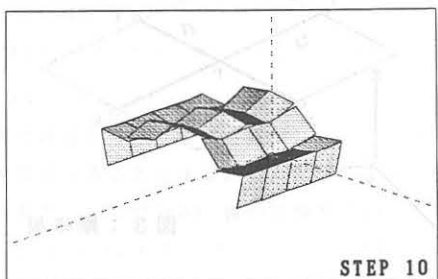
$$\begin{bmatrix} \dot{l}_a \\ \dot{l}_b \\ \dot{\theta}_{ab} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a'}{l_a} & \frac{a'}{l_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b'}{l_b} & \frac{b'}{l_b} \\ -\frac{b'}{l_a l_b} & \frac{b'}{l_a l_b} & -\frac{a'}{l_a l_b} & \frac{a'}{l_a l_b} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_j \\ \dot{x}_k \\ \dot{x}_l \end{bmatrix}$$

となる。上式における係数マトリックスが幾何学的適合条件を表しており、これを境界条件を考慮して全剛棒板に拡張したものが式(7)に対応する A となる。

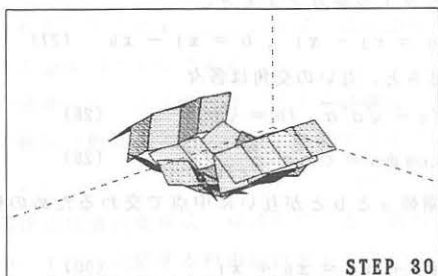
本論文では安定化移行過程を通して剛棒板の形状が不変であるとしているので、上式の左辺を零ベクトルとにおいて前述の解析手法を適用する。



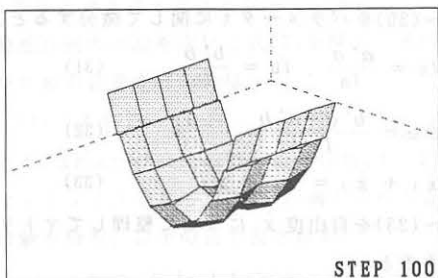
初期形状



STEP 10



STEP 30



STEP 100

図4：円筒型形状（32板）

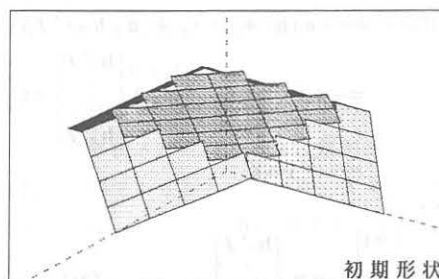
5. 解析結果

以上の定式化および解析手法を用いて、矩形板要素によりモデル化した膜構造の安定化移行解析を行った。以下図4、5に2例の解析例を示す。

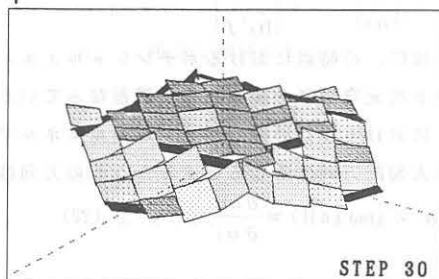
図4では剛棒板要素32、接点数76の膜モデルであり、円筒型の初期形状から出発し、ステップ100で最終形状（安定化条件により判定）に至っている。

図5は剛棒板要素64、接点数144の平面膜構造であり、ステップ数400で最終形状に至った。

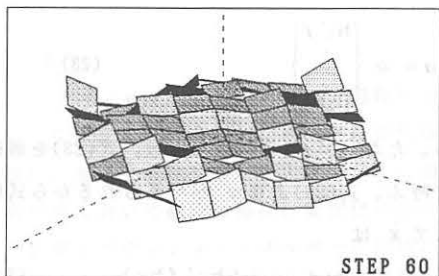
本解析では式(2)、および(4)における線形項のみを



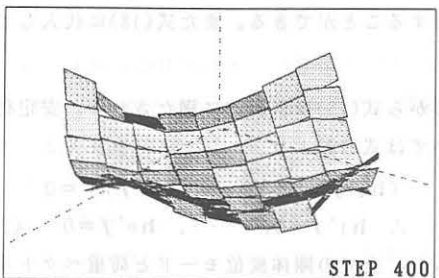
初期形状



STEP 30



STEP 60



STEP 400

図5：台形型形状（64板）

採用しているため、増分ステップが重なるにつれ誤差が増大していく傾向が強い。本来不変である剛棒の長さを誤差の指標とすると、最終状態において図4では6.9%程度、図5では1.2%程度の伸びが生じる。図4の最終形状にみられる2つの大きな凸面は、蓄積した伸び（誤差）のために生じたものと考えられる。本解析手法では増分刻みをさらに細かくしていく以外に、式(2)、(4)における高次項を採用することにより、効果的にこの誤差の発生を抑えることができる。この詳細については文献[3]に述べてある。

6. おわりに

膜が幾何学的特性寸法を保持したまま大変位を行う過程を矩形板要素によるモデル化により解析する手法を提案した。本手法は文献[1]等で提案した解析手法にさらに幾何学的な付帯条件を加えた定式化になっており、さらに種々の付帯条件のついた問題についても応用が可能である。同様の解析手法を、膜を連続体に置換して適用した例を文献[4]、[5]に投稿中である。

参考文献

- [1] 半谷、川口：不安定リンク構造の形状決定解析
日本建築学会構造系論文報告集
第381号、1987、pp.56 - 60

- [2] 安宅：要素特性寸法を入力データとした膜構造の形状解析について、日本建築学会学術講演梗概集
1984、pp.2601-2602
- [3] Hangai, Y., Kawaguchi, K., : Introduction of Higher Order Terms into the Analysis for Shape-Finding of Unstable Link Structures.
proc. IASS-MSU Symposium, Istanbul, 1988,
pp.471-478
- [4] Hangai, Y., Kawaguchi, K., : Shape-Finding of Unstable Structures, Forma vol.5 (投稿中)
- [5] 宮崎、川口、半谷：面積を付帯条件とした膜構造の安定化移行解析
第40回応用力学連合講演会(投稿中)

ANALYTICAL PROCEDURE OF STABILIZING PROCESS OF MEMBRANE STRUCTURES REPRESENTED AS ASSEMBLIES OF QUADRILATERAL RIGID PLATES

Ken-ichi MIYAZAKI
Ken-ichi KAWAGUCHI
Yasuhiko HANGAI

SYNOPSIS

Lots of membrane structures are constructed being largely deformed and formed into the desired shapes in the instant of erection at the sites. The inflation of the air supported dome is a good example. Therefore, it is necessary at the design stage to grasp how the membrane structures will be stabilized from the given initial state to the final position under the given load conditions.

The authors have already proposed the numerical procedure for the analyses of the large displacement process of structural mechanisms. This procedure is fundamentally based on the generalized incremental method which is effectively using the theory of generalized inverse matrix.

In this paper, aforesaid procedure is applied to the analyses of the large displacement process of membrane structures.

At the first, the fundamental equations in which the membrane structures are represented as assemblies consisting of rigid plates are derived. Secondly, some numerical examples are illustrated to show the validity of analyses.

*1. IIS, Univ. of Tokyo