

異方張力曲面形状の数値解析

鈴木 俊男^{・1}

半谷 裕彦^{・2}

概 要

膜構造の形状解析法として異方張力曲面について検討した。異方張力曲面は等張力曲面よりも膜形状を決定する自由度が大きい曲面である。異方張力曲面の基礎式を曲面の力の釣合式から導き、その一般解を求めた。解析例として回転懸垂面とHP曲面を数値解析することによって、本解析法の妥当性を確認した。

1. はじめに

膜構造を設計する上で、第一の作業として膜面の形状決定がある。膜面の形状は、力学的に最も安定性がある等張力曲面とすることが多い。しかし等張力曲面は境界構造の形態が与えられると一義的に曲面が決定されるので、膜デザインや設計外力に対する抵抗曲面としての融通性が小さいという問題点がある。これに対して、各方向の張力を異なる値に設定することにより曲面形状を種々に変化させることができる異方張力曲面^{[1], [2]}は、等張力曲面と共に実用設計上有意義な曲面といえる。

異方張力曲面の場合には、等張力曲面の場合のように曲面積の汎関数が容易に幾何学的考察から求められないため、その数値解析的研究は少ない。

本報告では、異方張力曲面の形状解析法に関する定式化と簡単な数値解析を行い、等張力曲面との性質の違いを述べる。

2. 異方張力曲面の基礎式

2. 1 異方張力曲面の基礎方程式

本論文では、異方張力曲面として次の定義を採用する。「異方張力曲面とは、微小要素の2辺の切断面に

作用する応力の方向がそれぞれの切断面に直交し、応力の大きさが異なる曲面のことをいう。」

これを、図1を用いて示すと、切断面を曲面のパラメータ α , β に沿ってとる場合、異方張力 n_α , n_β は、 β , α 曲線に対して直交する応力となる。

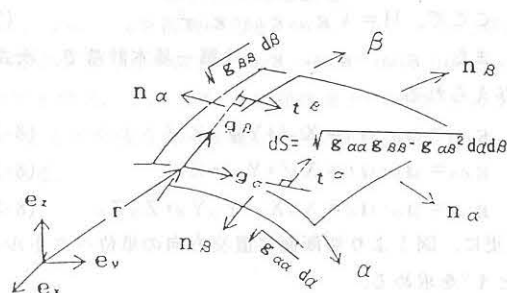


図1. 異方張力曲面の微小面積

異方張力曲面の基礎方程式を求めるために、 α , β 曲線で表わされた曲面の微小部分の力の釣合式を求める。まず、曲面を表わす座標を X , Y , Z とすると、

*1 フジタ工業 技術研究所 主任研究員

*2 東京大学生産技術研究所 教授

これらは、次の様な α, β の函数として求められる。

$$X = X(\alpha, \beta) \quad (1-1)$$

$$Y = Y(\alpha, \beta) \quad (1-2)$$

$$Z = Z(\alpha, \beta) \quad (1-3)$$

つぎに、曲面の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、次式となる。

$$\mathbf{r} = X \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y + Z \mathbf{e}_z \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はデカルト座標系の各方向の単位ベクトルである。(2)を用いて、基底ベクトル $\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_\beta$ 、法線ベクトル $\mathbf{N}$ を求める。

$$\mathbf{g}_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha = X_\alpha \mathbf{e}_x + Y_\alpha \mathbf{e}_y + Z_\alpha \mathbf{e}_z \quad (3-1)$$

$$\mathbf{g}_\beta = \partial \mathbf{r} / \partial \beta = X_\beta \mathbf{e}_x + Y_\beta \mathbf{e}_y + Z_\beta \mathbf{e}_z \quad (3-2)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $X_\alpha, X_\beta, \dots$ は X の α, β に関する偏微分を表わす。

また、 $\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_\beta, \mathbf{N}$ の単位ベクトルを次に示す。

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha / |\mathbf{g}_\alpha| = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} (X_\alpha \mathbf{e}_x + Y_\alpha \mathbf{e}_y + Z_\alpha \mathbf{e}_z) \quad (5-1)$$

$$\mathbf{t}_\beta = \mathbf{g}_\beta / |\mathbf{g}_\beta| = \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} (X_\beta \mathbf{e}_x + Y_\beta \mathbf{e}_y + Z_\beta \mathbf{e}_z) \quad (5-2)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{N} / |\mathbf{N}| = \frac{1}{H} \{ (Y_\alpha Z_\beta - Z_\alpha Y_\beta) \mathbf{e}_x + (Z_\alpha X_\beta - X_\alpha Z_\beta) \mathbf{e}_y + (X_\alpha Y_\beta - Y_\alpha X_\beta) \mathbf{e}_z \} \quad (6)$$

$$\text{ここで、} H = \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} \quad (7)$$

また、 $g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}, g_{\alpha\beta}$ は第一基本計量で、次式で与えられる。

$$g_{\alpha\alpha} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha = X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2 \quad (8-1)$$

$$g_{\beta\beta} = \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{g}_\beta = X_\beta^2 + Y_\beta^2 + Z_\beta^2 \quad (8-2)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = X_\alpha X_\beta + Y_\alpha Y_\beta + Z_\alpha Z_\beta \quad (8-3)$$

更に、図1より切断面に直交方向の単位ベクトル $\mathbf{t}^\alpha$ と $\mathbf{t}^\beta$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\alpha &= \mathbf{n} \times \mathbf{t}_\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \cdot \frac{1}{H} \{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \mathbf{e}_x + (Y_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_\alpha) \mathbf{e}_y + (Z_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_\alpha) \mathbf{e}_z \} \quad (9-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\beta &= \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \cdot \frac{1}{H} \{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \mathbf{e}_x + (Y_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_\beta) \mathbf{e}_y + (Z_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_\beta) \mathbf{e}_z \} \quad (9-2) \end{aligned}$$

次に、等張力が $\mathbf{t}^\alpha, \mathbf{t}^\beta$ 方向に作用したときの微小部分の力の釣合いを求めると、

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \alpha} (n_\alpha \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \mathbf{t}^\beta) d\alpha \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} (n_\beta \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \mathbf{t}^\alpha) d\beta = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

(10) に、(9-1) (9-2) を代入して $d\alpha d\beta$ で割ると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{n_\alpha}{H} \{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \mathbf{e}_x + (Y_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_\beta) \mathbf{e}_y + (Z_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_\beta) \mathbf{e}_z \} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{n_\beta}{H} \{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \mathbf{e}_x + (Y_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_\alpha) \mathbf{e}_y + (Z_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_\alpha) \mathbf{e}_z \} \right\} = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

となる。これを更に書き下して、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の係数に対して整理すると以下の様な微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} n_\alpha g_{\beta\beta} X_{\alpha\alpha} - (n_\alpha + n_\beta) g_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} + n_\beta g_{\alpha\alpha} X_{\beta\beta} &= 0 \\ n_\alpha g_{\beta\beta} Y_{\alpha\alpha} - (n_\alpha + n_\beta) g_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta} + n_\beta g_{\alpha\alpha} Y_{\beta\beta} &= 0 \\ n_\alpha g_{\beta\beta} Z_{\alpha\alpha} - (n_\alpha + n_\beta) g_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} + n_\beta g_{\alpha\alpha} Z_{\beta\beta} &= 0 \quad (12) \end{aligned}$$

上式は、未知量が X, Y, Z に関する準線形の連立2階非線形偏微分方程式であり、この式が異方張力曲面の基礎方程式となる。

2. 2 異方張力曲面の一般解

(12) で表わされた異方張力曲面の基礎方程式において、2階偏微分 $X_{\alpha\alpha}, Y_{\alpha\alpha}, Z_{\alpha\alpha}$ 等の係数 $g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}, g_{\alpha\beta}$ は、1階偏微分の2乗を含む非線形項となっており、このままでは解を見出すことができない。しかし、これは楕円型偏微分方程式に属する方程式であり、独立変数 (α, β) を、

$$\xi = \phi(\alpha, \beta) \quad (13-1)$$

$$\eta = \psi(\alpha, \beta) \quad (13-2)$$

なる関係の下に、 (ξ, η) に変換することにより、標準型の偏微分方程式に変換することができる。すなわち (12) は等温直交変換関係式

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} \quad (14-1)$$

$$g_{\xi\eta} = 0 \quad (14-2)$$

の下で、

$$n_{\alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = 0 \quad (15-1)$$

$$n_{\alpha} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (15-2)$$

$$n_{\alpha} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = 0 \quad (15-3)$$

に変換される。

上式は、X, Y, Zに関して、同一の2階線形微分方程式となっている。したがって、X, Y, Zは、次の方程式の解 a (ξ, η) を共通の解としてもつことになる。

$$n_{\alpha} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0 \quad (16)$$

そして、X, Y, Zは a の関数として次の様に表わすことができる。

$$X = f_1(a) \quad (17-1)$$

$$Y = f_2(a) \quad (17-2)$$

$$Z = f_3(a) \quad (17-3)$$

上式から、X, Y, Zは互いに独立した変数ではなく、a という共通の関数によって結び付けられた互いに従属関係にある変数であることがわかる。

次に、関数 $f_1(a) \sim f_3(a)$ の形式を求める。たとえば、 $f_1(a)$ は次のようになる。

(17-1) を (15-1) に代入すると、

$$n_{\alpha} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad (18)$$

また、(17-1) より、

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi} = \frac{df_1}{da} \frac{\partial a}{\partial \xi} \quad (19-1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{df_1}{da} \frac{\partial a}{\partial \eta} \quad (19-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{df_1}{da} \right) \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{d^2 f_1}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (19-3)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 f_1}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \quad (19-4)$$

(19-3), (19-4) を (18) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{da^2} \left\{ n_{\alpha} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + n_{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \\ + \frac{df_1}{da} \left(n_{\alpha} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ところで、左辺第2項の $\left(n_{\alpha} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + n_{\beta} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right)$ は、(16) より 0 となるが、

左辺第1項の $\left\{ n_{\alpha} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + n_{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right\}$ は一般的に0とはならないので、上式が成立するためには、

$$\frac{d^2 f_1}{da^2} = 0 \quad (21)$$

なる関係が成立しなければならない。

(21) を2回積分すると、

$$f_1 = c_1 a + c_2 \quad (22-1)$$

となり、 f_1 の形式は a に関して一次式となることがわかる。ここで、 C_1, C_2 は積分定数である。

同様に、 f_2, f_3 についても次のように表わせる。

$$f_2 = d_1 a + d_2 \quad (22-2)$$

$$f_3 = e_1 a + e_2 \quad (22-3)$$

次に、パラメータ (ξ, η) で表わされた上式を、元のパラメータ (α, β) に変換すると、最終的に異方張力曲面の基礎式 (12) の一般解は、次式の形式となる。

$$X = \lambda(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + x_0(\alpha, \beta) \quad (23-1)$$

$$Y = \mu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + y_0(\alpha, \beta) \quad (23-2)$$

$$Z = \nu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + z_0(\alpha, \beta) \quad (23-3)$$

ここで、 $a(\alpha, \beta)$ が未知量で、 $\lambda, \mu, \nu, x_0, y_0, z_0$ は、初期条件によって定められる定数である。

また、上式の物理的意味は、図2で示されるように x_0, y_0, z_0 を初期曲面とし、 λ, μ, ν を初期曲面で設定された方向余弦としたとき、異方張力曲面を表わす座標 X, Y, Z は、初期曲面上の座標 x_0, y_0, z_0 と方向余弦方向の距離 a の和として求められることである。

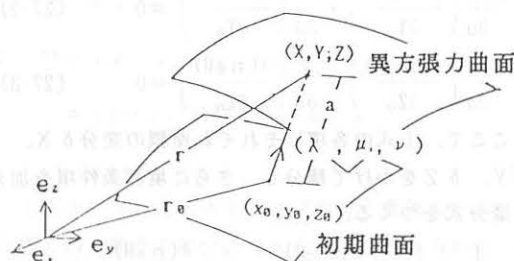


図2. 曲面を決定する未知量 a とその方向余弦

2. 3 異方張力曲面の変分式

ここでは、異方張力曲面の変分式を求める。まず、異方張力曲面の基礎方程式を求める過程の式(11)を再記する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{n_\alpha}{H} \left\{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) e_x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (Y_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_\beta) e_y \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (Z_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_\beta) e_z \right\} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{n_\beta}{H} \left\{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) e_x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (Y_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_\alpha) e_y \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (Z_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_\alpha) e_z \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 e_x 、 e_y 、 e_z の係数についてまとめると、たとえば e_x の係数は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{n_\alpha}{H} \left\{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \right\} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{n_\beta}{H} \left\{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ところで、上式の第1項と第2項は、次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{n_\alpha}{H} (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) \quad (26-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{n_\beta}{H} (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \right] = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) \quad (26-2)$$

したがって、(26-1) ~ (26-2) を(25)に代入して、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) = 0 \quad (27-1)$$

同様に、 e_y 、 e_z の係数についても、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Y_\beta} \right) = 0 \quad (27-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Z_\beta} \right) = 0 \quad (27-3)$$

ここで、上式の各項にそれぞれ座標の変分 δX 、 δY 、 δZ をかけて積分し、さらに境界条件項を加えた変分式をつくる。

$$\begin{aligned} & \int_\alpha \int_\beta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) \right) \delta X \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Y_\beta} \right) \right) \delta Y \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Z_\beta} \right) \right) \delta Z \right] d\alpha d\beta \\ & + \int_\alpha \left[\left(\bar{n}_\beta - \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) \delta X \right. \\ & \quad \left. + \left(\bar{n}_\beta - \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Y_\beta} \right) \delta Y \right. \\ & \quad \left. + \left(\bar{n}_\beta - \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Z_\beta} \right) \delta Z \right] \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \\ & + \int_\beta \left[\left(\bar{n}_\alpha - \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) \delta X \right. \\ & \quad \left. + \left(\bar{n}_\alpha - \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \right) \delta Y \right. \\ & \quad \left. + \left(\bar{n}_\alpha - \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \right) \delta Z \right] \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $\bar{n}_\alpha$ 、 $\bar{n}_\beta$ 等はそれぞれ境界 $\beta=\bar{\beta}$ 、 $\alpha=\bar{\alpha}$ における境界反力のX方向の分力を表す。

$$\sqrt{\bar{n}_\alpha^2 + \bar{n}_\alpha^2 + \bar{n}_\alpha^2} = n_\alpha \quad (29-1)$$

$$\sqrt{\bar{n}_\beta^2 + \bar{n}_\beta^2 + \bar{n}_\beta^2} = n_\beta \quad (29-2)$$

境界面に作用している内力 $\frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta}$ 等は

(9-1)で表される断面力 $n_\beta t^\alpha$ のX方向成分等である。

次に、(28)を書き換えると次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_\alpha \int_\beta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) \right) \delta X \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Y_\beta} \right) \right) \delta Y \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Z_\beta} \right) \right) \delta Z \right] d\alpha d\beta \\ & - \int_\alpha \left[\left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial X_\beta} \right) \delta X + \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Y_\beta} \right) \delta Y \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial(n_\beta H)}{\partial Z_\beta} \right) \delta Z \right] d\alpha \\ & - \int_\beta \left[\left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) \delta X + \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \right) \delta Y \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \right) \delta Z \right] d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\alpha} \left[\bar{n}_s \delta X + \bar{n}_s \delta Y + \bar{n}_s \delta Z \right] \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \\
& + \int_{\beta} \left[\bar{n}_\alpha \delta X + \bar{n}_\alpha \delta Y + \bar{n}_\alpha \delta Z \right] \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \\
& = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

ここで、上式中：……の2項を考える。

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{\alpha} \left(\frac{\partial(n_s H)}{\partial X_s} \right) \delta X d\alpha \right. \\
& \quad \left. - \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \right) \delta X d\alpha d\beta \right] \\
& = - \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \delta X}{\partial \alpha} d\alpha d\beta \\
& = - \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \delta X_\alpha d\alpha d\beta \quad (31)
\end{aligned}$$

従って、他の項も同様に変形すると(30)は次式となる。

$$\begin{aligned}
& - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial X_\alpha} \delta X_\alpha + \frac{\partial(n_s H)}{\partial X_s} \delta X_s \right. \\
& \quad + \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Y_\alpha} \delta Y_\alpha + \frac{\partial(n_s H)}{\partial Y_s} \delta Y_s \\
& \quad \left. + \frac{\partial(n_\alpha H)}{\partial Z_\alpha} \delta Z_\alpha + \frac{\partial(n_s H)}{\partial Z_s} \delta Z_s \right] d\alpha d\beta \\
& + \int_{\alpha} \left[\bar{n}_s \delta X + \bar{n}_s \delta Y + \bar{n}_s \delta Z \right] \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \\
& + \int_{\beta} \left[\bar{n}_\alpha \delta X + \bar{n}_\alpha \delta Y + \bar{n}_\alpha \delta Z \right] \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \\
& = 0 \quad (32)
\end{aligned}$$

ここで、境界条件として幾何学的境界条件を考えると境界上での座標の変分は0となるから、(32)の第2、第3項はなくなり、結局次式となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[n_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial X_\alpha} \delta X_\alpha + \frac{\partial H}{\partial Y_\alpha} \delta Y_\alpha + \frac{\partial H}{\partial Z_\alpha} \delta Z_\alpha \right) \right. \\
& \quad \left. n_s \left(\frac{\partial H}{\partial X_s} \delta X_s + \frac{\partial H}{\partial Y_s} \delta Y_s + \frac{\partial H}{\partial Z_s} \delta Z_s \right) \right] d\alpha d\beta \\
& = 0 \quad (33)
\end{aligned}$$

上式が、異方張力曲面の微分方程式を基とした変分式である。この式は等張力曲面の様に汎関数として表現されていないが、レーリーリッツ法等の離散化手法を適用する場合の基本式と見なすことができる。また、この式は弾性論における仮想仕事式に相当する式である。

2. 4 デカルト座標系と円柱座標系における異方張力曲面式

(26)で示された異方張力曲面の一般解の内容を明確にするために、ここでは、デカルト座標系と円柱座標系における表現を与える。

まず、デカルト座標で表された異方張力曲面を考える。(図3参照)

$$\text{曲面パラメータ} \quad \alpha = x, \quad \beta = y \quad (34)$$

$$\text{方向余弦} \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1 \quad (35)$$

$$\text{初期曲面} \quad x_0 = \alpha, \quad y_0 = \beta, \quad z_0 = 0 \quad (36)$$

(34) ~ (36) を (26) に代入する。

$$X = 0 \cdot a + \alpha = x \quad (37-1)$$

$$Y = 0 \cdot a + \beta = y \quad (37-2)$$

$$Z = 1 \cdot a + 0 = a \quad (37-3)$$

位置ベクトル

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + a \mathbf{e}_z \quad (38)$$

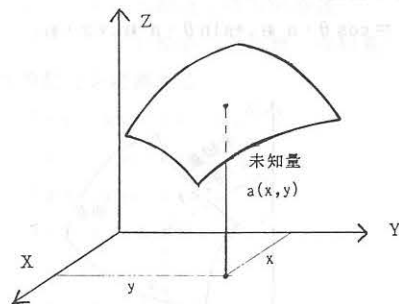


図3. デカルト座標系による曲面表示

第1基本計量

$$\mathbf{g}_x = 1 \cdot \mathbf{e}_x + 0 \cdot \mathbf{e}_y + a_x \mathbf{e}_z \quad (39-1)$$

$$\mathbf{g}_y = 0 \cdot \mathbf{e}_x + 1 \cdot \mathbf{e}_y + a_y \mathbf{e}_z \quad (39-2)$$

$$\therefore \mathbf{g}_{xx} = \mathbf{g}_x \cdot \mathbf{g}_x = 1 + a_x^2 \quad (40-1)$$

$$\mathbf{g}_{yy} = \mathbf{g}_y \cdot \mathbf{g}_y = 1 + a_y^2 \quad (40-2)$$

$$\mathbf{g}_{xy} = \mathbf{g}_x \cdot \mathbf{g}_y = a_x a_y \quad (40-3)$$

$$\begin{aligned}
\therefore H &= \sqrt{\mathbf{g}_{xx} \mathbf{g}_{yy} - \mathbf{g}_{xy}^2} \\
&= \sqrt{(1 + a_x^2)(1 + a_y^2) - a_x^2 a_y^2} \\
&= \sqrt{1 + a_x^2 + a_y^2} \quad (41)
\end{aligned}$$

上式を(36)に代入するとデカルト座標系で表された異方張力曲面の変分式は次式により求められる。

$\delta \Pi =$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[n_x \left(\frac{\partial H}{\partial X_x} \delta X_x + \frac{\partial H}{\partial Y_x} \delta Y_x + \frac{\partial H}{\partial Z_x} \delta Z_x \right) \right]$$

$$+ n_y \left(\frac{\partial H}{\partial X_y} \delta X_y + \frac{\partial H}{\partial Y_y} \delta Y_y + \frac{\partial H}{\partial Z_y} \delta Z_y \right) dx dy$$

$$= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} 1/H [n_x \cdot a_x \delta a_x + n_y \cdot a_y \delta a_y] dx dy$$

$$= 0 \quad (42)$$

上式は、 $n_x = n_y$ とすればデカルト座標系で表された等張力曲面を表す汎函数の変分式と一致する。

次に円柱座標で表された異方張力曲面を考える。

(図4参照)

$$\text{曲面パラメータ } \alpha = \theta, \beta = z \quad (43)$$

$$\text{方向余弦 } \lambda = \cos \alpha, \mu = \sin \alpha, \nu = 0 \quad (34)$$

$$\text{初期曲面 } x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = \beta \quad (45)$$

(43) ~ (45) を (26) に代入する。

$$X = \cos \alpha \cdot a + 0 = \cos \theta \cdot a \quad (46-1)$$

$$Y = \sin \alpha \cdot a + 0 = \sin \theta \cdot a \quad (46-2)$$

$$Z = 0 \cdot a + \beta = z \quad (46-3)$$

曲面の位置ベクトル

$$r = \cos \theta \cdot a \cdot e_x + \sin \theta \cdot a \cdot e_y + z \cdot e_z \quad (47)$$

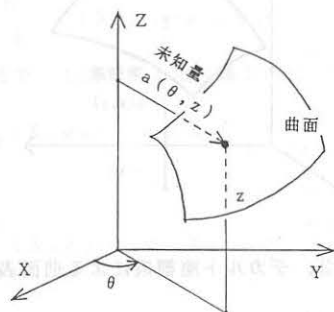


図4. 円柱座標系による曲面表示

第1基本計量

$$g_\theta = (-\sin \theta \cdot a + \cos \theta \cdot a_\theta) e_x$$

$$+ (\cos \theta \cdot a + \sin \theta \cdot a_\theta) e_y$$

$$+ 0 \cdot e_z \quad (48-1)$$

$$g_z = \cos \theta \cdot a_z e_x + \sin \theta \cdot a_z e_y + 1 \cdot e_z \quad (48-2)$$

$$\therefore g_{\theta\theta} = g_\theta \cdot g_\theta = a^2 + a_\theta^2 \quad (49-1)$$

$$g_{zz} = g_z \cdot g_z = a_z^2 + 1 \quad (49-2)$$

$$g_{\theta z} = a_\theta a_z \quad (49-3)$$

$$\therefore H = \sqrt{g_{\theta\theta} g_{zz} - g_{\theta z}^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + a_\theta^2)(a_z^2 + 1) - (a_\theta a_z)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 a_z^2 + a_\theta^2} \quad (50)$$

いま、軸対称回転曲面を考えると、 $a_\theta = 0$ であり、

$$H = \sqrt{a^2 + a^2 a_z^2} = a \sqrt{1 + a_z^2} \quad (51)$$

上式を (36) に代入すると円柱座標系で表された異方張力曲面の変分式は次式により求められる。

$$\delta \Pi = \int_0^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left[n_\theta \left(\frac{\partial H}{\partial X_\theta} \delta X_\theta + \frac{\partial H}{\partial Y_\theta} \delta Y_\theta + \frac{\partial H}{\partial Z_\theta} \delta Z_\theta \right) \right.$$

$$\left. + n_z \left(\frac{\partial H}{\partial X_z} \delta X_z + \frac{\partial H}{\partial Y_z} \delta Y_z + \frac{\partial H}{\partial Z_z} \delta Z_z \right) \right] d\theta dz$$

$$= 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{H} [n_\theta a (1 + a_z^2) \delta a + n_z a^2 a_z \delta a_z] \right] dz$$

$$= 0 \quad (52)$$

上式は、 $n_\theta = n_z$ とすれば軸対称回転曲面の等張力曲面を表す汎函数の変分式と一致する。

3. 異方張力曲面の数値解法

3.1 レーリーリッツ法による数値解法

異方張力曲面を表す変分式 (33) にレーリーリッツ法を適用する。ここでは、軸対称問題を考える。

仮定関数を次式で表す。

$$a = \phi_0(z) + \sum a_i \cdot \phi_i(z) = \phi_0(z) + {}^t \phi(z) \cdot a \quad (53)$$

ここで、 $\phi_0(z)$ 、 $\phi_i(z)$ ($i=1, n$) は基底関数列、 a_i ($i=1, n$) は未知変数数列である。また $\phi(z)$ 、 a は次の通り。

$$\phi(z) = {}^t [\phi_1(z) \phi_2(z) \cdots \phi_n(z)] \quad (54)$$

$$a = {}^t [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \quad (55)$$

また、

$$a_z = d\phi_0(z)/dz + \sum a_i \cdot d\phi_i(z)/dz$$

$$= d\phi_0(z) + d^t \phi(z)/dz \cdot a \quad (56)$$

次に、 a の変分を求める。

$$\delta a = {}^t \delta \phi \cdot \delta a \quad (57)$$

$$\delta a_z = {}^t d\phi(z)/dz \cdot \delta a = {}^t \phi_z \cdot \delta a \quad (58)$$

(53)、(56) ~ (58) を (52) に代入する。

$$\delta \Pi = {}^t \delta a \cdot 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{H} [n_\theta a (1 + a_z^2) \phi \right.$$

$$\left. + n_z a^2 a_z \phi_z] \right] dz$$

$$= 0 \quad (59)$$

ここで、 δa は任意の値を取り得るので、停留式は

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{H} [n_\theta a (1 + a_z^2) \phi \right.$$

$$\left. + n_z a^2 a_z \phi_z] \right] dz$$

$$= 0 \quad (60)$$

となる。

次に、ニュートンラプソン法を用いるときの、増分方程式を求める。まず、(60)の増分を考える。

$$\int_{-L/2}^{L/2} [n_{\theta} a (1+a_z^2) \phi + n_z a^2 a_z \phi_z] d(1/H) + 1/H \int_{-L/2}^{L/2} [n_{\theta} a (1+a_z^2) \phi + n_z a^2 a_z \phi_z] dz = 0 \quad (61)$$

上式の増分項は次の様になる。

$$\begin{aligned} d(1/H) &= -1/H^2 dH = -1/H^2 d[a^2(1+a_z^2)] \\ &= -1/H^2 \cdot 1/H (a(1+a_z^2) + a^2 a_z) da \\ \text{ここで、(57)より } da &= \phi \cdot da \text{ であるから} \\ d(1/H) &= -1/H^2 \cdot 1/H (a(1+a_z^2) + a^2 a_z)^t \phi \cdot da \quad (62) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} d[n_{\theta} a (1+a_z^2) \phi + n_z a^2 a_z \phi_z] &= \phi n_{\theta} (da(1+a_z^2) + a^2 da_z) \\ &+ \phi_z n_z (2a da a_z + a^2 da_z) \\ &= [\phi n_{\theta} ((1+a_z^2)^t \phi + a^2 a_z^t \phi_z) \\ &+ \phi_z n_z (2a a_z^t \phi + a^2 \phi_z^t)] \cdot da \quad (63) \end{aligned}$$

(62)、(63)を増分式(61)に代入する。

$$\left(\int_{-L/2}^{L/2} [b^t u + 1/H E] dz \right) da = 0 \quad (64)$$

ここで、

$$b = n_{\theta} a (1+a_z^2) \phi + n_z a^2 a_z \phi_z \quad (65)$$

$$^t u = -1/H^2 \cdot 1/H (a(1+a_z^2) + a^2 a_z)^t \phi \quad (66)$$

$$\begin{aligned} E &= \phi n_{\theta} ((1+a_z^2)^t \phi + a^2 a_z^t \phi_z) \\ &+ \phi_z n_z (2a a_z^t \phi + a^2 \phi_z^t) \quad (67) \end{aligned}$$

従って、増分方程式は次式となる。

$$K da = df \quad (68)$$

ここで、

$$K = \int_{-L/2}^{L/2} [b^t u + 1/H E] dz \quad (69)$$

$$\begin{aligned} df &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{H} [n_{\theta} a (1+a_z^2) \phi \\ &+ n_z a^2 a_z \phi_z] dz \quad (70) \end{aligned}$$

(68)が各ステップの増分方程式、(70)は不釣り合を表わす。計算は $df=0$ となるまで反復させる。

3. 2 有限要素法による数値解法

ここでは、3角形要素を用いる。

図5に、初期曲面と異方張力曲面上の座標および方向余弦を示す。

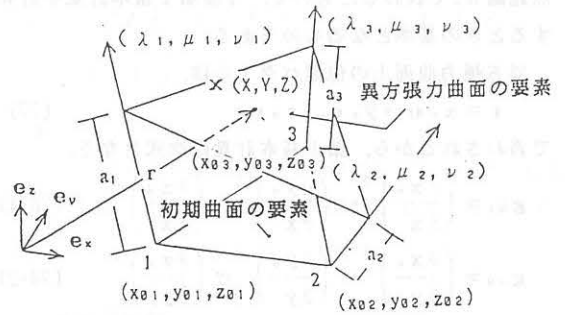


図5. 三角形要素による曲面表示

ここで、

x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} : 初期曲面上の節点 i の座標

x_{0e}, y_{0e}, z_{0e} : 初期曲面上の要素内部の座標

x_i, y_i, z_i : 等張力曲面上の節点 i の座標

x_e, y_e, z_e : 等張力曲面上の要素内部の座標

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$: 節点 i の方向余弦

a_i : 節点 i の距離 (未知量)

また、次の記号を定義する。

$$x_{0i} = {}^t \{x_{01} \ x_{02} \ x_{03} \ y_{01} \ y_{02} \ y_{03} \ z_{01} \ z_{02} \ z_{03}\} \quad (71-1)$$

$$x_{0e} = {}^t \{x_{0e} \ y_{0e} \ z_{0e}\} \quad (71-2)$$

$$x_i = {}^t \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ z_1 \ z_2 \ z_3\} \quad (71-3)$$

$$x_e = {}^t \{x_e \ y_e \ z_e\} \quad (71-4)$$

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu_3 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$\Lambda_z = \begin{bmatrix} \nu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \nu_3 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$a_i = {}^t \{a_1 \ a_2 \ a_3\} \quad (73)$$

また、異方張力曲面上の節点座標 x_i は、初期曲面上の節点座標 x_{0i} と節点距離 a_i とにより、次の様に表わされる。

$$x_i = x_{0i} + \Lambda \cdot a_i \quad (74)$$

$$\text{ここで、} \Lambda = \begin{Bmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{Bmatrix} \quad (75)$$

また、図3により、要素内部の座標 x_e は要素節点座標 x_i で表わすことができる。

$$\begin{aligned} x_e &= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & y & \cdot & y & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Lambda_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Lambda_z \end{bmatrix} x_i \\ &= U(x, y) \cdot x_i = U \cdot (x_{0i} + \Lambda \cdot a_i) \quad (76) \end{aligned}$$

上式が、異方張力曲面上の要素内部の座標 x_e を、節

点距離 a_i で表わしたもので、今後第1基本計量を計算するときの基本となるものである。

異方張力曲面上の位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z \quad (77)$$

で表わされるから、第1基本計量は次式となる。

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \quad (78-1)$$

$$g_{yy} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \quad (78-2)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial z_0}{\partial y} \quad (78-3)$$

また、(76) から、

$$\left\{ \begin{matrix} X_x \\ Y_x \\ Z_x \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial x} \right\} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \cdot \mathbf{x}_i = U_x \mathbf{x}_{i-1} \quad (79-1)$$

$$\left\{ \begin{matrix} X_y \\ Y_y \\ Z_y \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial y} \frac{\partial x_0}{\partial y} \right\} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \cdot \mathbf{x}_i = U_y \mathbf{x}_{i-2} \quad (79-2)$$

上式を、(78-1) ~ (78-3) に代入すると、

$$g_{xx} = {}^t \mathbf{x}_i {}^t \mathbf{U}_x \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i \quad (80-1)$$

$$g_{yy} = {}^t \mathbf{x}_i {}^t \mathbf{U}_y \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i \quad (80-2)$$

$$g_{xy} = {}^t \mathbf{x}_i {}^t \mathbf{U}_x \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i \quad (80-3)$$

次に、第1基本計量のベクトル表示を示す。

$$\mathbf{g} = {}^t \{ g_{xx} \ g_{yy} \ g_{xy} \} \quad (81)$$

更に、 $\mathbf{g}$ の増分を(80)、(81)から求めると、

$d\mathbf{x}_i$ を用いて次の様に表わすことができる。

$$d\mathbf{g} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}_i \quad (82)$$

ここに、

$$\mathbf{V} = \left[\begin{matrix} 2 {}^t \mathbf{x}_i {}^t \mathbf{U}_x \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i \\ 2 {}^t \mathbf{x}_i {}^t \mathbf{U}_y \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i \\ {}^t \mathbf{x}_i ({}^t \mathbf{U}_x \mathbf{U}_y + {}^t \mathbf{U}_y \mathbf{U}_x) \end{matrix} \right] \quad (83)$$

次に、(7)で定義されているHの増分を考える。

$$\begin{aligned} dH &= d \sqrt{g_{xx} g_{yy} - g_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2H} (dg_{xx} g_{yy} + g_{xx} dg_{yy} - 2g_{xy} dg_{xy}) \\ &= \frac{1}{2H} \{ dg_{xx} \ dg_{yy} \ dg_{xy} \} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\text{ここで、} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\sigma = {}^t \{ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \} = \frac{1}{2H} \mathbf{D} \mathbf{g} \quad (86)$$

とすると、(84)は、(85)、(86)及び(82)を用いて、

$$\begin{aligned} dH &= {}^t d\mathbf{g} \cdot \sigma \\ &= {}^t d\mathbf{x}_i {}^t \mathbf{V} \sigma \end{aligned} \quad (87)$$

更に、(74)を用いて、(87)を変形すると、

$$dH = {}^t d\mathbf{a}_i {}^t \mathbf{A} {}^t \mathbf{V} \sigma \quad (88)$$

つぎに、要素の変分式を(36)から次のように定義する。

$$\delta \Pi_0 =$$

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ n_x \left(\frac{\partial H}{\partial X_x} \delta X_x + \frac{\partial H}{\partial Y_x} \delta Y_x + \frac{\partial H}{\partial Z_x} \delta Z_x \right) \right. \\ & \left. + n_y \left(\frac{\partial H}{\partial X_y} \delta X_y + \frac{\partial H}{\partial Y_y} \delta Y_y + \frac{\partial H}{\partial Z_y} \delta Z_y \right) \right\} dx dy \\ & = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

ここで、座標系はデカルト座標で表わした要素座標系とする。

また、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H}{\partial X_x} \\ \frac{\partial H}{\partial Y_x} \\ \frac{\partial H}{\partial Z_x} \end{matrix} \right\} &= 1/H \left(g_{yy} \begin{bmatrix} X_x \\ Y_x \\ Z_x \end{bmatrix} - g_{xy} \begin{bmatrix} X_y \\ Y_y \\ Z_y \end{bmatrix} \right) \\ &= 1/H (g_{yy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (90-1)$$

同様に、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H}{\partial X_y} \\ \frac{\partial H}{\partial Y_y} \\ \frac{\partial H}{\partial Z_y} \end{matrix} \right\} &= 1/H \left(g_{xx} \begin{bmatrix} X_y \\ Y_y \\ Z_y \end{bmatrix} - g_{xy} \begin{bmatrix} X_x \\ Y_x \\ Z_x \end{bmatrix} \right) \\ &= 1/H (g_{xx} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (90-2)$$

また、(79)より

$$\left\{ \frac{\delta X_x}{\delta Z_x} \right\} = \mathbf{U}_x \delta \mathbf{x}_i \quad (91-1)$$

$$\left\{ \frac{\delta X_y}{\delta Z_y} \right\} = \mathbf{U}_y \delta \mathbf{x}_i \quad (91-2)$$

となる。(90)と(91)を(89)の変分式に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta \Pi_0 &= {}^t \delta \mathbf{x}_i \times \\ & \int \{ n_x {}^t \mathbf{U}_x \ 1/H (g_{yy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i) \\ & \quad + n_y {}^t \mathbf{U}_y \ 1/H (g_{xx} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i) \} dx dy \\ &= {}^t \delta \mathbf{a}_i \times \\ & {}^t \mathbf{A} \int \{ n_x {}^t \mathbf{U}_x \ 1/H (g_{yy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i) \\ & \quad + n_y {}^t \mathbf{U}_y \ 1/H (g_{xx} \mathbf{U}_y \mathbf{x}_i - g_{xy} \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i) \} dx dy \\ &= {}^t \delta \mathbf{a}_i \times \end{aligned}$$

$${}^t\Lambda \int [n_y {}^tU_y U_y x_i | n_x {}^tU_x U_x x_i | \\ -(n_x {}^tU_x U_y x_i + n_y {}^tU_y U_x x_i)] (1/Hg) dx dy \\ = 0 \quad (92)$$

また、 $\delta \Pi_0 = 0$ より停留式は次式となる。

$${}^t\Lambda \int [n_y {}^tU_y U_y x_i | n_x {}^tU_x U_x x_i | \\ -(n_x {}^tU_x U_y x_i + n_y {}^tU_y U_x x_i)] (1/Hg) dx dy \\ = 0 \quad (93)$$

この式が釣合式となる。

次に、ニュートンラプソン法を用いるときの、増分方程式を求める。まず、(93)の被積分項の増分を [] と $(1/Hg)$ の部分に分けて考える。

被積分項の増分

$$= d[] (1/Hg) + [] d(1/Hg) \quad (94)$$

ここで、

$$d[] (1/Hg) \\ = [n_y {}^tU_y U_y dx_i | n_x {}^tU_x U_x dx_i | \\ -(n_x {}^tU_x U_y dx_i + n_y {}^tU_y U_x dx_i)] (1/Hg) \\ = [n_y {}^tU_y U_y dx_i (1/Hg_{xx}) | \\ n_x {}^tU_x U_x dx_i (1/Hg_{yy}) | -(n_x {}^tU_x U_y dx_i + n_y \\ {}^tU_y U_x dx_i) (1/Hg_{xy})] \\ = [n_y {}^tU_y U_y (1/Hg_{xx}) | n_x {}^tU_x U_x (1/Hg_{yy}) | \\ -(n_x {}^tU_x U_y + n_y {}^tU_y U_x) (1/Hg_{xy})] dx_i \quad (95)$$

また、

$$[] d(1/Hg) \\ = [] (d(1/H) g + 1/H dg) \\ = [] (-1/H^2 dH + 1/H dg) \\ = [] (-1/H^2 g \cdot {}^t\sigma \nabla dx_i + 1/H \nabla dx_i) \\ = [] (-1/H^2 g \cdot {}^t\sigma \nabla + 1/H \nabla) dx_i \quad (96)$$

(95) と (96) に (74) の増分式 $dx_i = \Lambda da_i$ を代入し、更に(93)に代入すると次式が得られる。

$$K \cdot da_i = df_i \quad (97)$$

ここで、

$$K = K_1 + K_2 \quad (98)$$

$$K_1 = {}^t\Lambda \int [n_y {}^tU_y U_y (1/Hg_{xx}) | dx dy \\ n_x {}^tU_x U_x (1/Hg_{yy}) | \\ -(n_x {}^tU_x U_y + n_y {}^tU_y U_x) (1/Hg_{xy})] \Lambda dx dy \quad (99)$$

$$K_2 = {}^t\Lambda \int [n_y {}^tU_y U_y x_i | n_x {}^tU_x U_x x_i | \\ -(n_x {}^tU_x U_y x_i + n_y {}^tU_y U_x x_i) \\ (-1/H^2 g \cdot {}^t\sigma \nabla + 1/H \nabla) \Lambda dx dy \quad (100)$$

$$df_i = -{}^t\Lambda \int [n_y {}^tU_y U_y x_i | n_x {}^tU_x U_x x_i | \\ -(n_x {}^tU_x U_y x_i + n_y {}^tU_y U_x x_i)] (1/Hg) dx dy \quad (101)$$

である。

(97) が各ステップの増分方程式、(101) は不釣合量を表わす。計算は df_i が 0 となるまで反復させる。

4. 数値解析例

4. 1 回転懸垂曲面

異方張力曲面の解析例として、回転懸垂曲面をレーリーリッツ法により解析した(図6)。この曲面は、等張力曲面の場合には解析解が得られている。

仮定関数は、 $\phi_0(z)$ として等張力曲面の解析解である双曲関数を、 $\phi_1(z)$ として三角関数を設定した。

$$a = c \cosh(z/c) + a_1 \cos(\pi z/L) \quad (102)$$

ここで、 c は L によって決まる定数である。

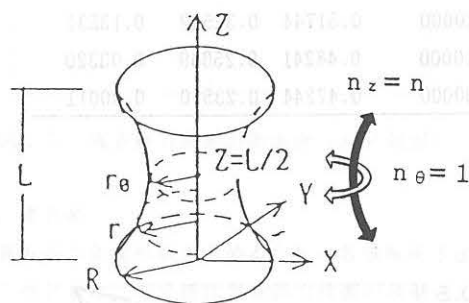


図6. 回転懸垂曲面

$L/R=1.0$ の場合の解析結果を表1~2に、図7に断面図を示した。張力比 (n_z/n_θ) が1.0より大きいと、等張力曲面と比較して安定解では外側に、不安定解では内側にはらむことがわかる。図8は、円の高さ L/R を変えたときのくびれ位置 r_0/R の変化の様子を示したものである。張力比が大きくなるに従って曲面の存在する限界高さは上昇することがわかる。また、点線の部分は解が発散した部分である。

参考のために、 $L/R=1.0, n_z/n_\theta=0.8$ と 1.2 の時の有限要素解を図9に示した。

表1. 数値解析結果 ($L/R=1.0$ 、安定解)

Z/R	張力比 n_z/n_θ		
	0.8	1.0	1.2
0.50000	1.00000	1.00000	1.00000
0.40000	0.92268	0.94440	0.96132
0.30000	0.86064	0.90194	0.93413
0.20000	0.81518	0.87202	0.91633
0.10000	0.78742	0.85424	0.90633
0.00000	0.77808	0.84834	0.90311

表2. 数値解析結果 ($L/R=1.0$ 、不安定解)

Z/R	張力比 n_z/n_θ		
	0.8	1.0	1.2
0.50000	1.00000	1.00000	1.00000
0.40000	0.73917	0.66582	0.59321
0.30000	0.59344	0.45393	0.31581
0.20000	0.51744	0.32542	0.13531
0.10000	0.48241	0.25669	0.03320
0.00000	0.47244	0.23510	0.00011

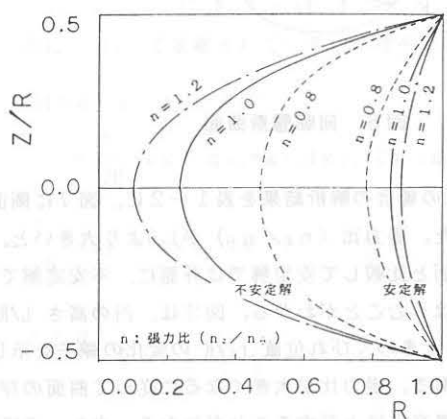


図7. 回転懸垂面 断面図

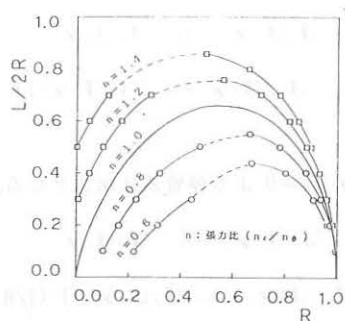


図8. 回転懸垂面のくびれ位置

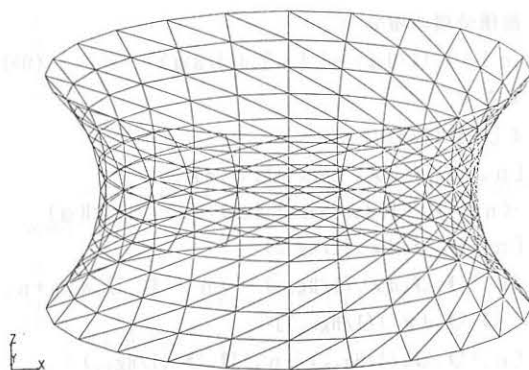


図9. 1 有限要素法による異方張力曲面
($L/R=1.0, n=0.8$)

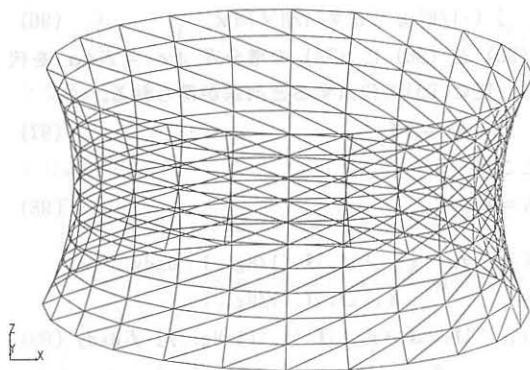


図9. 2 有限要素法による異方張力曲面
($L/R=1.0, n=1.2$)

4. 2 HP 曲面

図10に示した境界条件をもつHP曲面は次式で表される。

$$Z(x,y)=2h(x/a)(y/b) \quad (103)$$

初期曲面は上式を用いた。ここで $a=b$ とする。要素分割数は x, y 方向共に10分割である。異方張力は x 軸に対して 45° と 135° の方向に作用させ、張力比 $n=n_b/n_h$ とする。ここで n_h, n_b はそれぞれ、 45° 方向の張力と 135° 方向の張力である。解析した高さは $h/a=1.0, n=0.5, 1.0, 2.0$ である。図11と12にそれぞれパースと断面図を示した。張力比が高々2割程度の変化によって曲面形状は大きく異なることがわかる。このことから、設計者が希望する曲面のサグは張力比を多少変えることによって簡単に得られることがわかる。

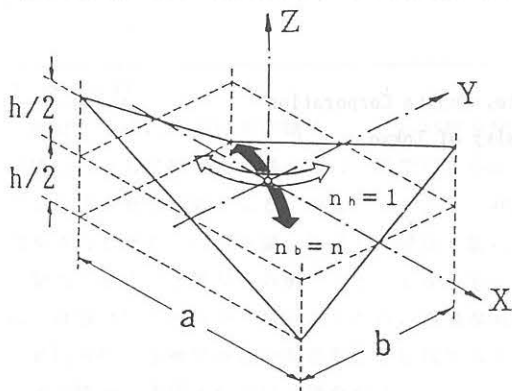


図10 HP曲面の境界条件

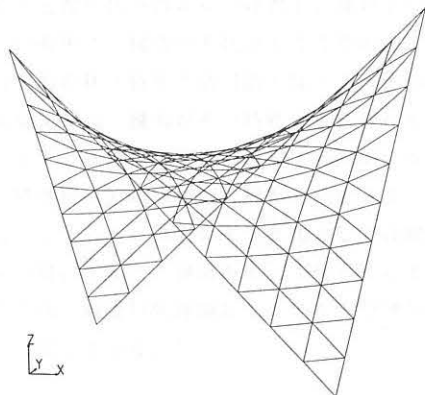


図11.1 異方張力曲面のパース (HP曲面)
($a=b=h, n=0.5$)

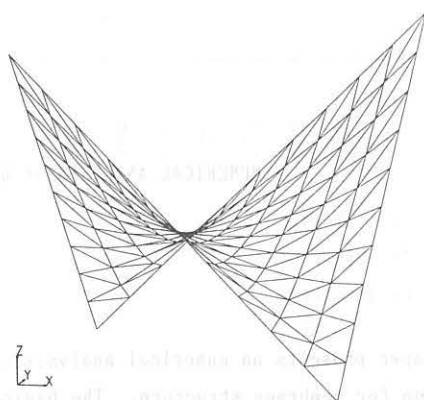


図11.2 異方張力曲面のパース (HP曲面)
($a=b=h, n=2.0$)

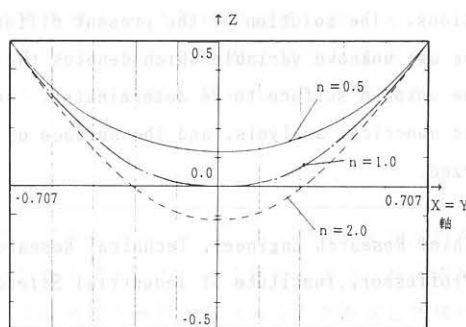


図12 異方張力曲面の断面図 (HP曲面)

5. まとめ

異方張力曲面形状を求めるための数値解析手法について検討した。本手法は異方張力曲面の基礎式として、曲面の微小部分における力の釣合いから求めた微分方程式とその変分式を用いている。曲面を決定するための解は、初期曲面から任意の方向に設定された方向余弦方向の距離として表現される。そして数値計算法としてレーリーリッツ法と有限要素法を適用し、軸対称曲面とHP曲面を解析することにより、異方張力曲面の性状を把握すると共に本解析法の妥当性を確認した。

参考文献

- [1] Otto, F., Tensile Structures : Volume 2, M.I.T. Press, 1969, pp.112
- [2] 石井一夫、安宅信行、建築膜構造の設計、工業調査会、1969, pp72
- [3] 鈴木俊男、半谷裕彦、等張力曲面形状の数値解析、膜構造研究論文集 '89, pp1~pp12

NUMERICAL ANALYSIS OF DIFFERENTLY STRESSED SURFACE

Toshio SUZUKI*¹Yasuhiko HANGAI*²

The paper presents an numerical analysis of surfaces stressed by different tensions in the two direction for membrane structure. The basic differential equations with three unknown coordinate functions are derived from the equilibrium condition of infinitesimal element. The variational equation for surface stressed by different tensions in the two direction are defined by using these equations. The solution of the present differential equations is formulated to be the solution having one unknown variable which denotes the length in the given direction from the initial surface to the unknown surface to be determined. We used Rayleigh-Ritz method and finite element method to the numerical analysis, and the surface of catenoid and hyperbolic paraboloid are numerically analyzed.

*1. Chief Research Engineer, Technical Research Institute, Fujita Corporation

*2. Professor, Institute of Industrial Science, University of Tokyo