

# 複合ケーブル構造の構造安定性に関する研究

—分岐座屈としての捩れ座屈—

半谷裕彦\*1, 林 暁光\*1  
真柄米毅\*2, 岡村 潔\*2

## 概要

ケーブルと棒材によって構成される複合ケーブル構造に軸対称荷重が作用する場合、分岐座屈としての全体的な捩れ座屈が発生する。本論文では、分岐座屈の解析法を述べた後、ZetlinタイプとGeigerタイプを解析モデルに選び、初期張力をパラメータとして、捩れ座屈の発生基準と捩れ座屈発生後の挙動を調査する。

### 1. 研究目的

著者等はケーブルと棒材によって構成される複合ケーブル構造の構造安定性について継続的に研究を実施している<sup>1, 2)</sup>。複合ケーブル構造はケーブルによる張力とポストに生じる軸圧縮力の組合せにより抵抗する構造システムである。ケーブルには圧縮力に対する抵抗能力(剛性)が期待できないので、自己釣合応力系を構成する初期張力を導入することにより、初期剛性を確保することになる。そのため、(a)自己釣合応力系を満足する形状の選定、(b)初期張力による剛性評価、(c)荷重載荷による剛性変化、(d)初期張力導入状態及び荷重載荷状態における構造安定、は複合ケーブル構造を設計する場合の基礎事項である。

項(d)における構造安定に関しては、

- (I) 部材レベル
- (II) 基本平面構造システムレベル
- (III) 全体構造システムレベル

の3レベルにおける問題が生じてくる。各項の典型例をあげると、(I)ポストの面外座屈<sup>1)</sup>、(II)ケーブル張力の消失による面内不安定<sup>2)</sup>、(III)周方向への全体的な捩れ座屈、等である。

本論文では、軸対称荷重を受ける場合における周方向への全体的な捩れ座屈を述べる。

### 2. 複合ケーブル構造における捩れ座屈

基本モデルは軸対称構造であり、軸対称荷重の作用下においては軸対称変形が進行する。この場合における荷重・変位曲線は基本釣合経路と名付けられている。この釣合経路を数値解析するため、幾何剛性行列を利用した修正荷重増分法を採用する。その場合、接線剛性行列は次式となる。

$$[K] = [K_E + K_G] \quad (2-1)$$

ここに、 $[K_E]$ ：弾性剛性行列、 $[K_G]$ ：幾何剛性行列である。

荷重を増加させて行くと接線剛性行列の行列式の値は減少していき、 $|K|=0$ の時点で周方向への捩れモードによる分岐座屈が発生する。さらに、分岐座屈後、分岐経路に沿って変形が進行する。この場合の概念図を描くと図-1となる。この図で、変位Dは捩れ方向への変位である。完全系の場合、座屈前においては軸対称変形のみが生じるので $D=0$ となる。Perの点で、 $|K|=0$ となり、 $D \neq 0$ のモードが出現する。さらに、初期不整のある不完全系の場合には、分岐点の出現しない非線形荷重・変位曲線となる。以上を前提として、

(1) 図-1に対応する荷重・変位曲線の追跡

\*1東京大学 生産技術研究所

\*2竹中工務店 技術研究所

- (2) 分岐座屈荷重の決定
- (3) 安定分岐点であるか不安定分岐点であるかの調査
- (4) 分岐座屈後の釣合経路の追跡

を研究目標として数値解析を実行した。

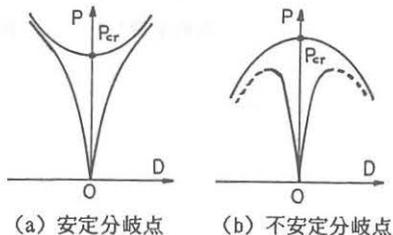


図-1: 分岐点と分岐後曲線

### 3. 座屈点とその分類

幾何学的非線形問題の解析においては、荷重増分法、変位増分法及び弧長法などが利用されている。最も幅広く使用されている荷重増分法は、接線剛性を利用し、増分区間内で線形化することにより、問題を解決する方法である。しかし、分岐座屈点では解の唯一性が成立せず、分岐経路の追跡が困難となる。一方、変位増分法では、座屈点の近傍において、増分パラメータの選択が難しくなる。

本論文では、幾何学的非線形問題の増分方程式に摂動法を適用し、摂動方程式を導入する。次いで、第一摂動方程式の解を有する条件を一般逆行列を利用して定式化し、この条件より座屈点の分類を行う。分岐点において、上述の条件を考慮することにより、分岐経路を追跡する簡便な解析法を提案する。

増分区間において、構造体に有限要素法や差分法を適用して、幾何学的非線形問題に対する離散型の基礎方程式を求めると、次の式となる。

$$[K]\{d\} + F_2 + F_3 + \dots = \{F\} \quad (3-1)$$

$F_2$ と $F_3$ は高次項である。荷重ベクトル $\{F\}$ を荷重モード $\{f\}$ で表すと、

$$[K]\{d\} = \{f\}\lambda \quad (3-2)$$

ここに、 $\lambda$ は荷重増分パラメータである。増分パラメータ $\lambda$ と変位 $d$ を任意のパラメータ $t$ の関数と考え、

増分区間内において、Maclaurin展開すると、

$$\begin{cases} d_i(t) = \dot{d}_i t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i t^2 + \dots \\ \lambda(t) = \dot{\lambda} t + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} t^2 + \dots \end{cases} \quad (3-3)$$

$t$ の2次項まで採用して、基礎方程式に代入し、 $t$ の次数毎に整理すると、次式のようなになる。

$$[K]\{\dot{d}\} = \{f\}\dot{\lambda} \quad (3-4)$$

$$[K]\{\ddot{d}\} + \{r(\dot{d})\} = \{f\}\ddot{\lambda} \quad (3-5)$$

釣合経路は剛性行列式の値によって、二種類の状態に分けられる。

[a].  $|K| \neq 0$ の場合、 $[K^{-1}]$ が存在することにより、

$$\begin{cases} \{\dot{d}\} = [K^{-1}]\{f\}\dot{\lambda} \\ \{\ddot{d}\} = [K^{-1}]\{\{f\}\ddot{\lambda} - \{r(\dot{d})\}\} \end{cases} \quad (3-6)$$

パラメータ $t$ として、荷重増分パラメータ $\lambda$ を選定すると、

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\lambda} = 1 \quad \ddot{\lambda} = \frac{d^2\lambda}{d\lambda^2} = 0 \quad (3-7)$$

(3-6)と(3-7)式を(3-3)式に代入すると、解 $d(\lambda)$ が求められる。

$$d(\lambda) = [K^{-1}]\{\{f\}\lambda - \frac{1}{2}\{r(d)\}\lambda^2\} \quad (3-8)$$

[b].  $|K| = 0$ の場合、一般逆行列理論を利用すると、(3-4)式の解の存在条件と解は次式でえられる。

$$[I - KK^{-1}]\{f\}\lambda = 0 \quad (3-9)$$

$$\{d\} = [K^{-1}]\{f\}\lambda + [I - KK^{-1}]\{\dot{\alpha}\} \quad (3-10)$$

一般逆行列の定義及び剛性行列の対称性より、

$$\begin{aligned} [KK^{-1}]^T &= [KK^{-1}] & [K^{-1}K]^T &= [K^{-1}K] \\ [K^{-1}]^T &= [K^{-1}] & [K]^T &= [K] \end{aligned} \quad (3-11)$$

これによって、

$$[K^{-1}K] = [K^{-1}]^T [K]^T = [KK^{-1}]^T = [KK^{-1}] \quad (3-12)$$

故に

$$[I-KK^{-}]^T = [I-KK^{-}] \quad (3-13)$$

(9)式に代入すると、解の存在条件は次式になる。

$$[I-KK^{-}]^T \{f\} \lambda = 0 \quad (3-14)$$

座屈点を単純座屈点とすると、 $\text{rank } [K] = n-1$  となるので、 $\text{rank } [I-KK^{-}] = 1$  になる。従って、 $[I-KK^{-}]$  は 1 個の独立な列ベクトルを持っている。それを  $\alpha$  とすると、(3-14)と(3-10)式は次式となる。

$$\begin{cases} g \dot{\lambda} = 0 \\ \{\dot{d}\} = [K^{-}]\{f\} \dot{\lambda} + \dot{\alpha}_1 \{\alpha\} \end{cases} \quad (3-15)$$

ここに、 $g = \alpha^T f$

座屈点では解の存在条件より(3-15)式が成立しなければならない。 $|K|$  より、 $[K]$  の最小固有値を  $C1$  とすると、座屈点は  $C1=0$  で与えられる。 $g \dot{\lambda} = 0$  より、 $g=0$  (分岐点)、 $g \neq 0$ 、 $\dot{\lambda} = 0$  (飛移点) となる。分岐点は、さらに、 $\dot{\lambda} = 0$  (対称分岐点)、 $\dot{\lambda} \neq 0$  (非対称分岐点) と分類される。以上をまとめると、図-2となる。

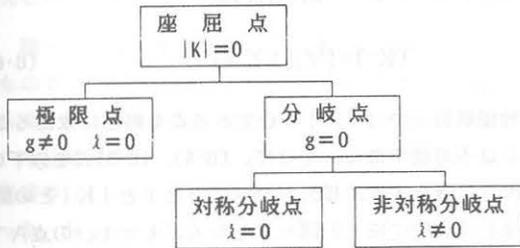


図-2: 座屈点の分類

#### 4. 座屈モード

極限点(飛移点)では  $\dot{\lambda} = 0$  が成立している。 $\dot{\lambda} = 0$  を(3-16)式に代入すると、

$$\{\dot{d}\} = \alpha_1 \{\dot{\alpha}\} \quad (4-1)$$

上式を書き換えると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha_1 \quad (4-2)$$

極限点における座屈モードは  $[I-KK^{-}]$  の線形独立なベクトルとなり、また、1 個であることが分かる。

分岐点では  $g=0$  が成り立っており、(3-17)式より  $\alpha$  と  $f$  とは直交していることが分かる。さらに、一般逆行列の定義\*を用いると、

$$\begin{aligned} \{f\}^T [K^{-}]^T [I-KK^{-}] &= \{f\}^T [K^{-}] [I-KK^{-}] \\ &= \{f\}^T [K^{-}-K^{-}KK^{-}] = \{f\}^T [K^{-}-K^{-}] = 0 \end{aligned} \quad (4-3)$$

よって、 $\{\alpha\}$  と  $[K^{-}]\{f\}$  は直交しており、相互に独立であることが分かる。故に、(3-16)式より、

$$\begin{Bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha_1 + \begin{Bmatrix} K^{-}f \\ 1 \end{Bmatrix} \alpha_2 \quad (4-4)$$

ここに、 $\dot{\alpha}_1$ 、 $\dot{\alpha}_2$  は任意のパラメータである。上式は、分岐点においては、2 個の独立なモードが存在しており、分岐経路はこれらのモードの組合せで与えられることを示している。

対称分岐点では、 $\dot{\lambda} = 0$  であるから、 $\dot{\alpha}_2 = 0$  となり、

(4-4)式は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_1 \quad (4-5)$$

#### 5. 分岐経路の解析

極限点では、(4-2)式から理解できるように、増分パラメータの数は 1 個となる ( $\dot{\alpha}_1$  を与えることにより、 $\dot{d}$  が得られる)。そのため、座屈後の釣合経路を比較的簡単に求めることが出来る。 $\dot{\alpha}_1$  として、変位の一分分を選ぶと変位増分法となる。

分岐座屈後の釣合経路を求めるには、(4-4)式における  $\dot{\alpha}_1$  と  $\dot{\alpha}_2$  の組合せを求める必要がある。以下、その解析法を述べる。第二摂動式(3-5)式が解を有する条件は

$$[I-KK^{-}]^T (\{f\} \ddot{\lambda} - \{r(\dot{d})\}) = \{0\} \quad (5-1)$$

上式の係数マトリクス線の線形独立なベクトルは  $\{\alpha\}$

(\*)  $(A A^T)^T = A A^T$ ,  $(A^T A)^T = A^T A$ ,  $A A^T A = A$ ,  $A^T A A^T = A^T$

で、かつ、分岐点では  $g = a^T f = 0$  が成立しているから、上式は次式となる。

$$a^T r(\dot{d}) = 0 \quad (5-2)$$

上式において、ベクトル  $a$  と  $r$  の  $r$  成分を  $a_r$ 、 $r_r$  で表すと、(5-2)式は

$$\sum_{r=1}^N a_r r_r = 0 \quad (5-3)$$

上式に(4-4)式を代入し、整理すると、

$$a(\dot{\alpha}_1) + 2b\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + c(\dot{\alpha}_2) = 0 \quad (5-4)$$

上式より、 $\dot{\alpha}_1$  と  $\dot{\alpha}_2$  の比が2個求められる。つまり、

$$\kappa_i = \frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\alpha}_2} \quad i = 1, 2 \quad (5-5)$$

結局、上式を(4-4)式に代入すると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K^{-1} f \\ 1 \end{Bmatrix} \kappa_i \dot{\alpha}_2 \quad (5-6)$$

$\dot{\alpha}_1$  を増分パラメータとして与えることにより、2個の  $\kappa_i$  に対応する分岐経路が解析できる。

なお、本論文で扱う振れ座屈は対称分岐座屈であり、(4-5)式、(5-6)式を比較することにより、 $\kappa_i = 0$  に対応する。

## 6. 数値解析法

釣合経路上の I 点が座屈点に近づくと、 $|K| \approx 0$  となり、数値不安定の生じる領域となる。この領域内では、釣合経路の数値解析には注意が必要である。

$|K| \neq 0$  の点においては、(3-8)式を利用して釣合経路を求めれば良い。 $[K^{-1}]$  の計算に不安定がある場合には、 $[K^{-}]$  を用いれば安定した解が得られる。なぜなら、 $|K| \neq 0$  の場合、 $[K^{-1}] = [K^{-}]$  となることによる。

$|K| = 0$  の座屈点においては、(4-2)式、あるいは、(4-4)式を求めることになる。この場合、 $[K^{-}]$  の評価が必要となる。 $|K|$  の値が零でなく、ほぼ零であるとする、 $[K^{-}]$  を計算すると  $[K^{-1}]$  となる。そのため、(3-10)式の  $[I - K^{-1}K]$  は  $[I - K^{-1}K] = [O]$  となり、(3-16)式の  $\{a\} = \{0\}$  となる。このような

事態が生じると、座屈点において、釣合経路の追跡は不可能となる。以上の事態を避けるため、一般逆行列の計算に特異値分解法を利用し、以下に述べる工夫を行う。

$[K]$  を特異値分解すると、

$$[K] = [U][\Sigma][V]^T \quad (6-1)$$

ここに、 $[U]^T[U] = [I]$ 、 $[V]$  :  $n$  次の直交行列、 $[\Sigma]$  :  $n$  次の対角行列、である。対角行列を

$$[\Sigma] = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (6-2)$$

とすると、一般逆行列は次式で与えられる。

$$[\Sigma^{-}] = \text{diag}(\sigma_1^{-}, \sigma_2^{-}, \dots, \sigma_n^{-}) \quad (6-3)$$

$\sigma_1 < \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$  とすると、座屈点に於いては、 $\sigma_1 = 0$  となるから、

$$\sigma_1^{-} = 0 \quad (6-4)$$

$$\sigma_i^{-} = \frac{1}{\sigma_i} \quad i = 2, \dots, n \quad (6-5)$$

以上を用いると、一般逆行列は

$$[K^{-}] = [V][\Sigma^{-}][U]^T \quad (6-6)$$

数値解析上では  $|K| = 0$  である点を厳密に求めることは不可能である。そこで、(6-4)、(6-5)式を以下のように修正する。増分パラメータと  $t$  と  $|K|$  との関係を描くと図-3となる。 $t = t_{cr}$  の点 A で  $|K| = 0$  となる。微小量  $\varepsilon$  を与えて、 $t_{cr} \leq t < \varepsilon$  の範囲において、 $|K| \approx 0$  が成り立つとする ( $|K| \approx 0$  となる  $\varepsilon$  を与える)。このとき、(6-4)、(6-5)式を次式で解析することとする。

$$\sigma_1^{-} = 0 \quad \varepsilon > t_1 \geq t_{cr} \text{ に対して} \quad (6-7)$$

$$\sigma_i^{-} = \frac{1}{\sigma_i} \quad i = 2, \dots, n \quad (6-8)$$

以上の修正により、座屈点近傍の釣合経路が解析可能となる。

## 7. 複合ケーブル構造への適用

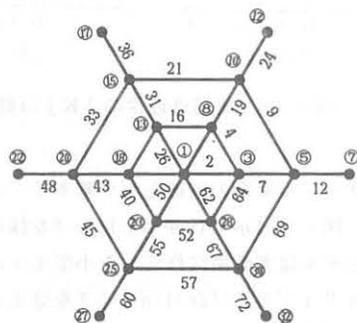
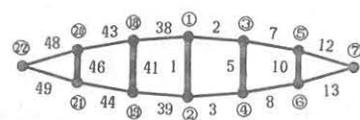
以上で述べた方法を利用し、軸対称荷重を受ける複合ケーブル構造の全体振れ座屈の解析を行う。



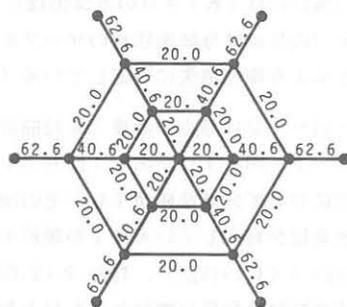
(3) 捩れ座屈の数値解析, を行ったものである。数値解析の結果、複合ケーブル構造の捩れ座屈は安定分岐点であることが分かった。なお、捩れ座屈荷重の略算法は文献[4]で扱っている。

参考文献

- [1] 半谷、真柄、岡村、林：複合ケーブル構造の構造安定に関する研究—ポストの面外安定について—、日本建築学会大会学術講演梗概集, 1988, pp.1363-1364.
- [2] 半谷、真柄、岡村、林：複合ケーブル構造の構造安定に関する研究—基本モデルの構造安定—、膜構造研究論文集 '88, 日本膜構造協会, 1988, pp.11-18.
- [3] Gasparini, D.A., Perdikaris, P.C. and Kanj, N.: Dynamic and Static Behaviour of Cable Dome Model, Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.2, 1989, pp.363-381.
- [4] 半谷、真柄、岡村、林：複合ケーブル構造の構造安定に関する研究—軸対称荷重下における捩れ座屈(I), (II)—、日本建築学会大会学術講演梗概集, 1989, pp.1207-1210.
- [5] HANGAI, Y.L., "Applicatio of the Generalized Inverse to the Geometrically Nonlinear Problems," SM Archives, Vol.6, 1981, pp.129-165.
- [6] HANGAI, Y., "Numerical Analysis in the Vicinity of Critical Points by the Generalized Inverse," IASS Bulletin, No.95f, 1987, pp.23-26.
- [7] GRAYBILL, F.A., "Introduction to Matrices with Application in Statistics, Wadsworth Publishing Company, 1969.

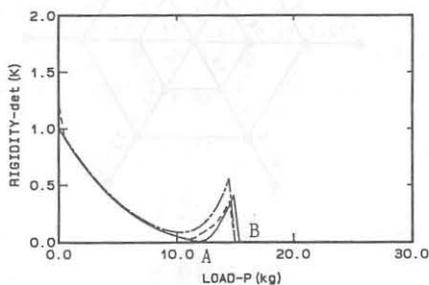


(a) 節点と部材の番号

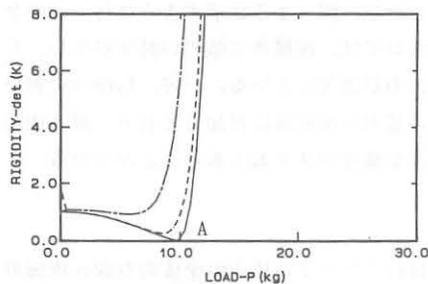


(b) 初期張力

図-5: Zetlinタイプ(Type-B)



(a) Type-A



(b) Type-B

図-6: 荷重の増加に伴う|K|の変化

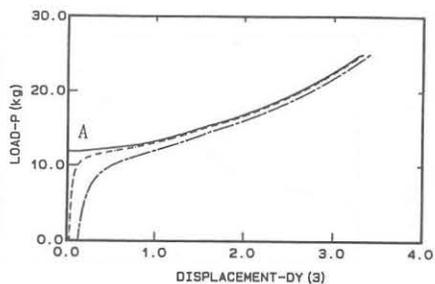


図-7： 節点3の周方向変位・荷重曲線(Type-A)

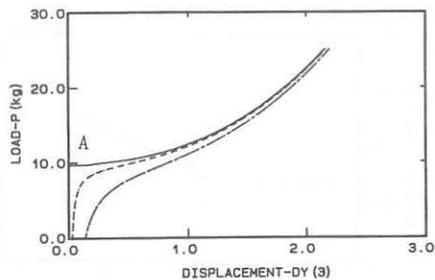


図-10： 節点3の周方向変位・荷重曲線(Type-B)

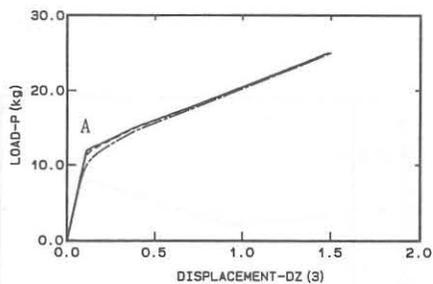


図-8： 節点3の縦方向変位・荷重曲線(Type-A)

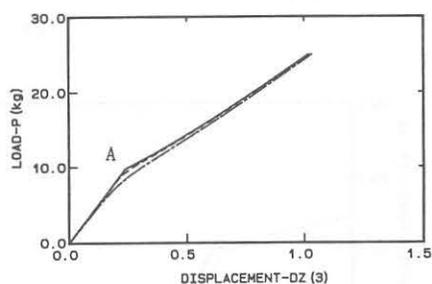


図-11： 節点3の縦方向変位・荷重曲線(Type-B)

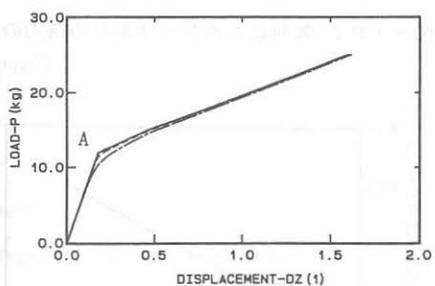


図-9： 節点1の縦方向変位・荷重曲線(Type-A)

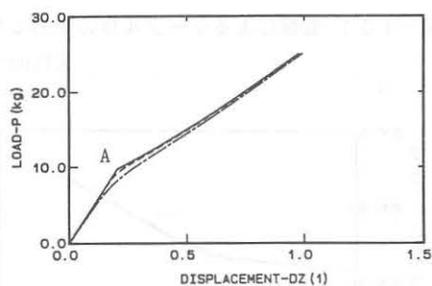


図-12： 節点1の縦方向変位・荷重曲線(Type-B)

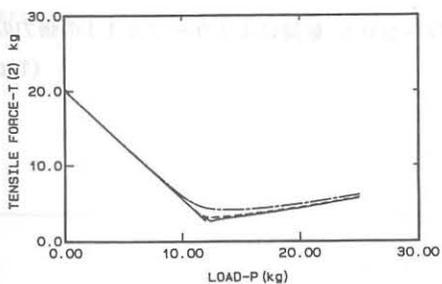


図-13： 載荷によるケーブル2の張力の変化 (Type-A)

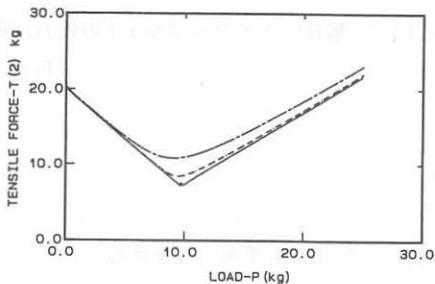


図-17： 載荷によるケーブル2の張力の変化 (Type-B)

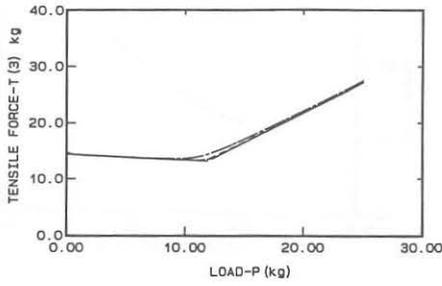


図-14： 荷重によるケーブル3の張力の変化  
(Type-A)

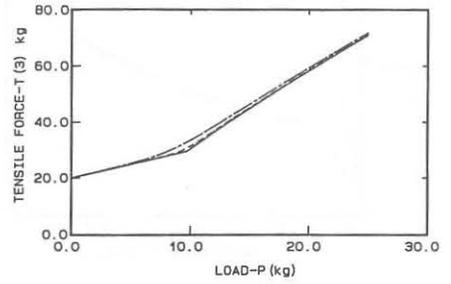


図-18： 荷重によるケーブル3の張力の変化  
(Type-B)

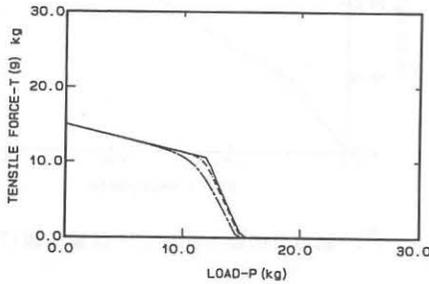


図-15： 荷重によるケーブル9の張力の変化  
(Type-A)

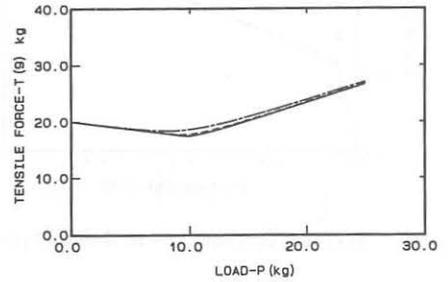


図-19： 荷重によるケーブル9の張力の変化  
(Type-B)

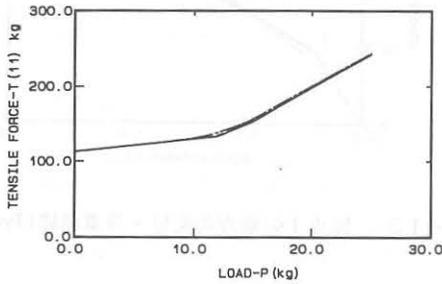


図-16： 荷重によるケーブル11の張力の変化  
(Type-A)

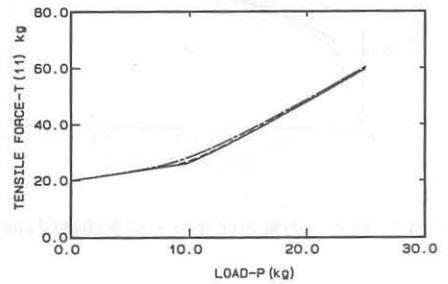


図-20： 荷重によるケーブル11の張力の変化  
(Type-B)

\* ————— : 不整荷重無し ( $\alpha=0$ )

..... :  $\alpha=1.0$

----- :  $\alpha=5.0$

但し、Pは増分荷重で、 $P=0.05$  kgfとした。

# STRUCTURAL STABILITY OF HYBRID CABLE STRUCTURES

-Torsional Buckling as a Bifurcation Buckling-

Yasuhiko HANGAI<sup>1</sup>, Xiaoguang LIN<sup>1</sup>

Hideki MAGARA<sup>2</sup> and Kiyoshi OKAMURA<sup>2</sup>

## SUMMARY

When the symmetrical load apply to the symmetrical hybrid cable structures, a bifurcation buckling which reveals the torsional, asymmetrical deformation appears. The objective of the present paper is to examine this bifurcation buckling for two kinds of hybrid cable structures such as the Geiger type and Zetline type.

In the first of the paper, an analytical method to pursue the geometrically nonlinear equilibrium paths in the vicinity of critical points is presented by using the generalized inverse. The perturbation equations for the incremental equilibrium equations are derived. Then, critical points on the equilibrium path are classified into limit point and bifurcation point by using the existence condition of solution, and an analytical method for post-critical paths beyond critical points is presented.

At the standpoint of the numerical analysis, it is very difficult to find numerically the exact critical point on the equilibrium path where  $|K|=0$ . To avoid this situation, the singular value decomposition method is effectively used here to obtain the generalized inverse numerically.

In the second part of the paper, the application of the present method to the torsional buckling problem in order to examine the post-bifurcation behaviours as well as the load carrying capacity of hybrid cable structures.

---

<sup>1</sup> Institute of Industrial Science, University of Tokyo

<sup>2</sup> Takenaka Technical Research Laboratory, Takenaka Komuten Co., Ltd.