# 部材のたるみを考慮した膜構造の動的応答

---- シミュレーションによる曲面構造の非線形振動解析

佐々木 直也\*1

梗

概

膜構造の動的応答を解析する際、振幅が大きいときには形態が非線形であることに加えて材料
が圧縮力を負担しないということが問題となる場合がある。ここでは膜材をケーブル要素に置換
したモデルを用いてこのような膜構造の特性を考慮した曲面構造の動的応答解析を、シミュレー
ションにより試みる。これによって、部材のたるみ(リンクリング)が、振動に与える影響を見
るとともに、膜構造の動的応答解析におけるシミュレーションの有効性を示す。

1. 研究の目的と概要

**膜構造は、軽量で剛性が極めて低いという特性を持** っている。このため変形量が大きく解析に幾何学的非 線形性が要求されるという問題がある。特に風圧力の 変動による膜面の動的応答は、これに加えて部材が圧 縮力を負担しないという片側応力問題となるため、部 材にたるみ (リンクリング)が牛じるような大振幅時 の膜面の挙動を正確に把握することは困難である。文 献5、6では変分不等式と非線形ポテンシャル関数を 利用して、初期張力とたるみを考慮した運動方程式を 導き、HP型ケーブル構造のたるみを考慮した振動解 析を試みているが、モード解析の範ちゅうであるため 幾何学的非線形性が要求されるような大振幅問題を解 くことではない。そこで、本論文ではシミュレーショ ンにより、このような膜構造の特性を考慮した自由振 動の数値解析を行う。シミュレーションには、ニュー マークのβ法を用いる。対象構造物は境界固定の鞍型 サスペンション膜構造とし「図-1]、これを線材の 有限要素に置換したケーブルネット構造の自由振動を、 以下の事項に着目して解析することにより、サスペン ション構造の基本的な振動特性及びリンクリングの影 響の把握を試みるとともに、この解析手法の正当性と



③部材のたるみ(リンクリング)の発生とそれが振動に与える影響。

④張力消失部材の張力復活時の 撃力の影響。

⑤ニューマークのβ法における微小時間△t及び収 束判定の取り方、計算時間等。

尚、解析に際しては以下の事項を仮定する。○全ての荷重は節点に作用する。

\*1 鹿島建設技術研究所 第二研究部

○材料は張力が生じている間は弾性範囲である。
 ○各節点はピン接合で滑りは生じない。

 ・力の単位は kg!を用い、質量は重量を重力加速度
 g(9.8m/s<sup>2</sup>)で除した値を用いる。

又、本論文では種々の条件に対する定性的な特性の把 握にとどまるため減衰は考慮せず非減衰自由振動を解 析することにする。

2. 解析理論

2.1 ニューマーク β法

多自由度の非減衰自由振動問題はマトリックスを用 いると

という微分方程式で表わされる。上式中uは各節点の 静的平衡点からの変位、üは加速度、又Mは質量マト リックス、Kは剛性マトリックスで、第1項は慣性力 を第2項は部材の弾性力による振動の復元力を表わし ている。ニューマークのβ法とは(1)式の微分方程式 を

 $\mathbf{u} (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{u} (\mathbf{t}) + \Delta \mathbf{t} \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{t})$  $+ (\Delta \mathbf{t}^2/2) \ddot{\mathbf{u}} (\mathbf{t}) + \beta \Delta \mathbf{t}^2 \{ \ddot{\mathbf{u}} (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) - \ddot{\mathbf{u}} (\mathbf{t}) \} \cdot \cdot (2)$  $\dot{\mathbf{u}} (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{t}) + \Delta \mathbf{t} \{ \ddot{\mathbf{u}} (\mathbf{t}) + \ddot{\mathbf{u}} (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) \} / 2 \cdot \cdot \cdot (3)$ 

という2つの近似式を用いて、微小時間△ t 秒ごとに シミュレートしていくことにより動的応答を求める方 法である。(2) 式中のβは公式の性格を与えるパラメ ータで、本解析ではβの値を1/6 で固定する。このと き(2),(3) 式は微小時間内で加速度が線形に変形する と仮定したことになり、線形加速度法とも呼ばれる。



[図-2] ケーブルネット構造

2.2 幾何学的非線形性

ここでケーブルネット構造の力のつり合いを考える。 [図-2]で外力Pの作用する節点iの座標をx, y, z、変位をu, v, wとすると、変形後の節点iにお ける力のつり合いは(4) 式のようになる。

x方向: Σ(N<sub>i</sub>, 
$$\frac{x_{ij} + u_{ij}}{L_{ij}}$$
) + P<sub>x</sub> = 0  
y方向: Σ(N<sub>i</sub>,  $\frac{y_{ij} + v_{ij}}{L_{ij}}$ ) + P<sub>y</sub> = 0  
z方向: Σ(N<sub>i</sub>,  $\frac{z_{ij} + w_{ij}}{L_{ij}}$ ) + P<sub>z</sub> = 0  
x<sub>i</sub>, α ζ ζ ζ x<sub>i</sub> + x<sub>i</sub> を 表わす。
(4)

このとき (4)式中Ni,は節点i-j間の部材張力で、

(5) 式を(4) 式に代入し整理すると、

x方向: 
$$\Sigma \frac{EA}{C_{ij}^{\circ}} \left( 1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}} \right) (x_{ij} + u_{ij})$$
  
+  $\Sigma \frac{x_{ij} + u_{ij}}{L_{ij}} N_{ij}^{\circ} + P_{xi} = 0$ 

y方向: 
$$\Sigma \frac{EA}{C^{o}_{i,j}} \left\{ 1 - \frac{C_{i,j}}{L_{i,j}} \right\} (y_{i,j} + v_{i,j})$$
 (f

 $\frac{13}{10}N_{13}^{0} + P_{23} = 0$ 

$$z \bar{\beta} \bar{n}: \Sigma \frac{EA}{C_{ij}^{\circ}} \left( 1 - \frac{C_{ij}}{L_{ij}} \right) (z_{ij} + w_{ij}) + \Sigma \frac{z_{ij} + w_{ij}}{r} N_{ij}^{\circ} + P_{zi} = 0$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{H}_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j}+u_{i,j})^2 + (y_{i,j}+v_{i,j})^2 + (z_{i,j}+w_{i,j})^2} \\ C_{i,j} = \sqrt{x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2 + z_{i,j}^2} \\ C_{i,j}^0 = C_{i,j} / (N_{i,j}^0 / EA + 1) \end{array}$$

(6)式の左辺の第2項までが部材の弾性力である。この式は非線形であるので変位が微小であるという仮定のもとに高次の項を省略しない限り変位をKuという1次式の形に分離することは出来ない。これが大振幅の振動問題をモード解析で解くことができない理由である。しかし、シミュレーション解析では各ステップごとに復元力の値がわかればよいので、(6)式の第2

項までの部分をそのまま振動の微分方程式(1) 式の第 2項:Kuの代わりに用いれば、形態非線形のケーブ ルネット構造の動的問題が解けることになる。

#### 2.3 リンクリング

さらにこの構造では、膜やケーブルといった材料が 圧縮力を負担しないため、大変形により部材にたるみ を生じることがある。いわゆるリンクリングである。 そこで、シミュレーションの各ステップごとに逐次全 部材長をチェックする。無歪状態での部材長よりも短 くなっている部材がリンクリングの発生している部材 と考えることができる。

本研究では、この無歪状態よりも短くなった部材の 剛性を零にするという方法でリンクリングを考慮する。 つまり、微分方程式の復元力の項にたるみを牛じた部 材の弾性力を加算しないということである。そして、 一度たるんだ部材も再び長さが回復すれば又元に戻す ようにする。

尚(1) 式の第1項の慣性力に用いる質量マトリック ス: Mには、各要素の質量を両端の節点に 1/2ずつ振 り分けるというLM法 (Lumped Mass matrix method) を用いる。

#### 3. 解析モデル

「図-1]で示されるサスペンション膜構造でスパ ンが5mのものを考える。曲面の対称性より x-y平面 第1象限の1/4の部分について(図-1の部)解析 することにし、「図-3」のようにこれを線材の有限 要素に置換したものを解析モデルとする。ケーブル要 素はX軸、Y軸に平行に配置し、それぞれが膜材の縦 糸方向、横糸方向を示す。自由度数は35である。曲面 の中心点である節点1にz方向正の向きに強制変位を 与えた状態を初期状態としてこれを解放したときに励 起される自由振動を下記に示すパラメータを考慮した [表-3]に示す合計27タイプについて解析する。

1) 高低差 0.5,1.0,2.0 m

2) 初期張力 200,400,2000 kg/m

3)初期変位 5,10,30 cm

材料の剛性は縦方向、横方向ともに40000kg/m、質 量は2.0kg/mとする。微小時間△tは10-3秒に取り、 ニューマークの β 法では反復法を用い、加速度の収束 判定値は10<sup>-1</sup>m/s とした。

## 4. 解析結果と考察

4.1 線形解との比較

提案手法による解析結果をモード解析及び線形シミ ュレーションの2つの線形解と比較する。線形解はと もに(6) 式を近似線形化して作られる剛性マトリック スを用いる(立体トラスの剛性マトリックスに初期張 カの項である幾何剛性マトリックスを加えて合成した もの)。モード解析はヤコビ法により(1)式の固有値 問題をといたもので、リンクリングは考慮していない。



[図-3] 解析モデル要素分割図

"   表   - 1   ]	解析モデルと	リンクリ	ング発生状況-	
12 1	TTUI CI IV C	1 - / /	- / Juli Ville	- 20-

高低差	初期張力	初期変位(cm)			
(m)	(kg/m)	5	1 0	3 0	
0.5	200	A 1 X	B 1 X	C1 O	
	400	A 2 X	B 2 X	C 2 0	
	2000	АЗ Х	вз Х	сз х	
1. 0	200	D1 X	E1 X	F1 ©	
	400	D2 X	E 2 X	F 2 0	
	2000	D3 X	E3 X	F3 X	
2.0	200	G1 X	H1 O	I1 ©	
	400	G 2 X	H 2 X	I 2 (	
	2000	G3 X	нз Х	13 O	

X:リンクリングは発生しない

〇:リンクリンクは発生するが同時に発生する部材 は最大でも2本以下 ③:同時3本以上の部材でリンクリンクが発生する

線形シミュレーションは、非線形解と同様にニューマ ークのβ法を用い、リンクリングを考慮する。

初期変位がスパンの 1/100である 5cmのときは微小 振動の範囲と考えられる。 [表-1] に非線形シミュ レーション結果でのリンクリングの発生状況も併記し てあるが、この範囲では全モデルともリンクリングは 発生していない。したがって、非線形解と線形解はほ ぼ一致するはずである。3種の解析法での TYPE-A1の 節点1のz方向の時刻歴変位を [図-4] に示す。こ の図に見るように、微小振動時においては、すべての 解析法で振幅、周期、振動モードともによく一致した。 しかし、初期変位がスパンの1/20以上である30cmにな ると [図-5] の様に解析法により波形は大きくずれ てきている。従ってこの様な大振幅になると、もはや 線形解析で解くことは困難であると思われる。

[図-4]と[図-5]を比較すると、モード解析では初期変位量が変わっても構造物の剛性は変わらないため応答波形は同じモードでほぼ相似形となっていることがわかる。しかし、初期変位が大きい大振幅時では、幾何学的非線形性及びリンクリングの影響により非線形シミュレーション解析による応答特性は、微小震動時の物とは大きく変わってくる。[図-5]では非線形解の方が線形解に比べて周期が短くなってきているが、後述のようにリンクリングには周期を長くする効果があることから、この構造(鞍型サスペンション構造)では形態の非線形性が大振幅時に構造物の周期を短くすることがわかる。つまり、大振幅時の固有周期は微小振動時のそれに比較して短くなる傾向がある。

4.2 初期条件の影響

解析結果より得られた初期条件が振動に与える影響 を以下にまとめる。

初期張力: [表-1]や[図-6]に見るように初 期張力が小さいほど振動数が低くなり、リンクリング が発生しやすくなる。サスペンション構造は初期張力 により剛性を得る構造なので、これが小さいと剛性が 小さくなるためであると考えられる。

高低差: 鞍型サスペンション構造では、スパンに 対する高低差が大きいほど振動数は高くなり、リンク リングが発生しやすくなる。 [表-1]、 [図-6] 参照。この構造では高低差すなわち曲率が大きいほど 形態の非線形性が強くなるものと思われる。



[図-4] 微小振動時(TYPE-A1)の節点1のz方向変位



[図-5] 大振動時(TYPE-C1)の節点1のz方向変位



[図-6] 高低差と振動数

4.3 部材のたるみの影響

部材のたるみの影響を見るために [表-1] の ? 7の モデルについて非線形シミュレーションで部材のたる みを考慮しないで解いた結果と比較した。リンクリン グを考慮しないこと以外は同一の条件である。リンク リングの発生頻度の高い TYPE-F1及び TYPE-11の解析 結果を節点1 (中央点)の2方向の時刻歴変位で比較 したものを [図-7] に、又曲面中央部の部材応力を 比較したものを [図-8] に示す。これらより以下の 事が言える。

 リンクリングが発生すると構造物の剛性が低くなる ため、部材が圧縮力を負担する場合よりも振動数が



低くなる。 [図-7] 参照。 [図-7] で TYPE-F1 と TYPE-11のリンクリングの発生頻度の比は約1: 2である。前者ではリンクリングの発生による応答 波形の影響は余り出ていないが、後者になるとリン クリングの影響はかなり大きく、なっている。

2) リンクリングが発生するとその部材が圧縮力を負担 しない分を他の部材の引張り力が負担することにな るため、リンクリングを考慮しない解法による部材 応力よりも大きな引張り応力が発生する危険性があ る。[図-8]は「YPE-11での要素番号①の部材応 力の経時変化を腹材巾1m当りの張力に換算した値 を示したものであるが、リンクリングを考慮しない で解いた場合の最大応力が1186.7kg/mであるのに対 し、リンクリングを考慮して解いた場合には1655.7 kg/mと40%近く高くなっている。又この図よりリン クリングを考慮しない解析で部材に圧縮力が生じて いる様子がわかる。

# 4.4 撃力の影響

一度たるんだ部材の張力が再び復活する時に、撃力 が発生することが考えられる。撃力の作用時間は一般 に10<sup>-2</sup>~10<sup>-5</sup>秒という短いものである。ここでは、そ の部材の弾性力を10<sup>-2</sup>秒程度の間、数倍に増幅させる ことでこの問題を考えその影響を見た。これにより撃



力には減衰及び振動数を高くする効果があることがわ かった。しかしこれらの影響は、材料の内部抵抗や空 気抵抗による減衰に比べると小さいもので、数値解析 ではここまで考慮する必要はないと考えられる。作用 時間を10<sup>-2</sup>秒、弾性力を3倍に取った時の、撃力を考 慮した場合としない場合を TYPE-C1で [図-9]に比 較する。



4.5 シミュレーションの諸数の採り方

効率よく計算を行うためにシミュレーションでの種 々のパラメータをどのように採ればよいのか、微小時 間:△t及び反復法での収束の2つについてそれぞれ 値を変化させて計算を行った。その結果今回の解析で は以下のような結果となった。

微小時間:△tの値は最低次固有周期の1/60~1/100 程度に取るのが適当であった。1/50より大きいと解が 収束しないか、あるいは収束に時間がかかりかえって 不経済である。

収束判定値:反復法での収束判定は、反復の前後で 求める加速度の近似値がどれだけ変化したかで判断し、 この差がある許容値以下になるまで反復を繰り返す。 この時の許容値は生じる最大加速度の 1/100~1/1000 程度に取れば十分であり、これ以上厳しくしても計算 時間が増大するだけである。

### 4.6 計算時間

シミュレーション解析、特に非線形問題では解析に 要する時間が問題となるが、今回の自由度数35のモ デルではパソコンを使用して2STEP/秒、又、5節で 用いた自由度数145のモデルでも0.5~0.7STEP/秒 程度という時間で計算できた。以上より微小振動であ れば解析結果、解析時間の双方から見てモード解析が 有効であるが、振幅が大きくなる非線形振動では、や はり非線形解析の必要があると思われる。

#### 5. 振動モードとリンクリングの発生状況

シミュレーション解析では、全ての節点の変位を同時に計算していくので、解析結果をもとにディスプレイ上で容易に振動をシミュレートし、振動モードを視覚的に捕らえることができる。さらにリンクリングが生じた部材の表示方法を変えればリンクリングの発生箇所や発生の状況をつかむことも可能である。これもこの解析法の特長の一つである。解析例として前述のモデルのスパンを10mにし、節点数66、自由度145の構造で初期変位0.5mを与えた時の自由振動の様子を[図-10]に示す。このモデルでは材料の剛性を縦糸方向60000kg/m、横糸方向20000kg/mとした。リンクリングが発生している部材は点線で表示し、変位は3倍に表示してある。

一番上の図が強制変位を与えた状態で、この強制変位を与えた中心点を開放した後の振動伝搬の様子を時



[図-10] 鞍型曲面の振動 ※変位は3倍に誇張してある。また、点 線はリンクリングが発生している部材

間を追ってプロットアウトさせてある。初期の段階で は強制変位によるモードが明確に現われているが、波 が境界に達し反射波が重なってくると、周期のあまり 違わない高次成分が増え、複雑な振動特性を示す。又、 種々のモデルのシミュレーションの結果を見ると、全 体的に見て対角線上([図-3]のx軸、y軸上)の 要素、特に初期変位をz方向正の向きに与えたため吊 り方向の要素でリンクリングが発生し易い傾向にある。

#### 6. 結び

本研究では幾何学的非線形性及びリンクリングの発 生を考慮した腹構造の振動解析手法を提案し、本手法 の有効性を確認するとともにこれを鞍型のサスペンシ ョン膜構造に適用することにより、この構造の基本的 な振動特性を把握した。特にリンクリングの影響につ いては、リンクリングを考慮すると、考慮しない(部 材が圧縮力を負担する)場合に比較して振動数が低く なり、部材に生じる最大応力が大きくなる可能性があ るということが把握された。文献6では"部材のたる みが生じると振動数は減少する方向へ移動し、応答振 幅は増大する"としているが、本研究では顕著な振幅 の増大は認められなかったものの振動数の減少という 点においては一致した結果となった。

本研究では、膜材を直交するケーブル要素に置換し、 それが膜材の縦糸方向及び横糸方向の剛性を表現する ような解析モデルを用いたが、より精度の高い解析手 法を確立するためには、斜材或は三角形要素を用いて 腹材のせん断剛性を評価する必要があると思われる。 ただし解析精度の向上とともに計算時間の増大も予想 されることからもこのような要素の分割法や分割数と いったモデル化をどのように行うのが最も効率的であ るのかという問題を検討していく必要がある。さらに、 実際に建物の動的応答を求める場合には膜材料の減衰 特性を評価する必要がある。以上のような問題を実験 値との比較の上で検討していくことが今後の課題とな る。

【参考文献】

 戸川隼人:「有限要素法による振動解析」 (サイエンス社)

- 2.中田公浩:「テンション構造物の動的構造特性に 関する基礎的研究」 横浜国立大学 昭和55年度 修士論文
- 今枝伸幸:「空気膜構造物の動的構造特性に関する基礎的研究」横浜国立大学昭和57年度修士論文
- 4. 石井一夫:「ケーフルネット・サスヘンション 構造の解析 I」
- 5. 半谷裕彦、山上敬:「ケーブル構造のたるみを考慮する振動解析 その1、その2」 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿)、昭和62年10月
- 5. 坪井善勝、半谷裕彦、山上敬:「H.P.型ケーブル 構造のたるみを考慮する振動解析」 日本建築学 会大会学術講演梗概集(関東)、昭和63年10月
- 石井一夫:「NET2.FORT」ニュートン ラフソン法 によるケーフルネット 構造の非線形解析プログラム

# DYNAMIC ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES INCLUDING GEOMETRICAL NONLINEARITY AND WRINKLING

NAOYA SASAKI<sup>\*1</sup>

#### SYNOPSIS

Membrane structures have many special problems from their special structural characteristics. One problem is that geometrical nonliniarity should be incorporated in the static and dynamic analysis because large deformation is generated from their flexible characteristics. The other problem is that wrinkling occurs occasionally because membrane elements can not transmit compressive forces.

In this paper, a dynamic analytical method of membrane structures is newly proposed by taking these two problems into consideration. In the analysis, membrane model was replaced with an assembly of cable elements. In order to resolve the wrinkling problem, the cable elements subjected to compressive force are removed automatically when their stressed length becomes shorter than their non-stressed initial length. The Newmark's  $\beta$  method is applied for the time integration.

The proposed method was applied to a saddle shaped membrane model having a fixed boundary condition. As the results, the effects of the wrinkling phenomena on the vibration and response behaviour of the membrane structures have been definitely grasped and the applicability of the proposed method has been confirmed.

\*1 Reserch Engineer,

Kajima Corporation, Institute Of Construction Technology