

等張力曲面形状の数值解析

鈴木 俊男 *1

半谷 裕彦 *2

概 要

膜構造の形状解析をする場合に基本となる等張力曲面の形状解析法について検討した。この問題については、既に多数の解析法が提案されているが、本報告では、等張力曲面の基礎式の中に新たな変数を導入することによって、取束性がよく一義的に曲面を決定できる解析法を検討した。

1. まえがき

最近大空間構造建築特に全天候型スポーツ施設の建設が脚光を浴びているが、その中で膜構造が多用されるようになった。膜構造を設計する上で、第一の作業として膜面の形状決定がある。膜面の形状は、周囲の境界構造と内圧によって決定されるものであるが、クリープ変形などによる膜面形状の変化といった膜材料に特有の性質を考慮すると、初期状態の膜面は等張力状態に決定することが望ましい。

等張力曲面の決定方法には次の3つの方法がある。第一は模型を用いて薄布を張りつけることにより近似的に求める方法、第二は石けん膜の表面張力を利用して、模型を作製し、物理的に精密な等張力曲面を求める方法、及び第三は、電算機を用いて数値解析的に求める方法である。第一の模型による方法と第二の石けん膜による方法は、設計段階でその都度境界構造をつくらなければならない、形状の試行錯誤的な作業が容易に行なえないことや、作り出された曲面の座標値を立体測定するという困難な作業が伴うこと等の理由から、最近では、第三の数値解析的手法がよく用いられている。

等張力曲面を求める問題は、数学的には空間上の閉

曲線の中に張られる極小曲面を求める問題いわゆるブラトー問題と密接な関係がある。極小曲面問題は、はじめにラグランジュが極小曲面を表す非線形偏微分方程式を導いて以来、リーマン、シュワルツ、ワイヤストラウス、クーラン¹⁾等、著名な数学者が極小曲面形状の性質とその解の存在条件の研究を行ってきた。そして任意閉鎖曲線内に張られる極小曲面の存在は、ラドー¹⁾とダグラス¹⁾によりそれぞれ独立に証明された。更に、ごく限られたケースについては、極小曲面の解析解が求められている。しかし実際の膜構造では、境界形状は複雑であり、その等張力曲面を求めるためには何らかの数値解析的手法が必要となる。

等張力曲面を決定する数値解析的アプローチは、コンカス²⁾、グリーンズパン³⁾等による差分法的な解法にはじまって、今日まで数多くの研究者によって試みられてきたが、大別すると次の2つに分けられる。一つは極小曲面を求める立場から先に述べた非線形偏微分方程式ないしはその汎関数を、差分法^{2), 3)}あるいは有限要素法⁴⁾により数値的に解く方法である。二つめは、曲面を三角形の集合として多面体近似し、その多面体の面積を最小化する方法^{5), 6), 7), 8), 9)}である。第一の方法は、基礎式を微分方程式としているため、

*1 フジタ工業 技術研究所

*2 東京大学生産技術研究所 教授

垂直に近い曲面となる場合には解析が困難になること、及びケーブル境界の場合においてケーブルの取り扱いが容易でないことのために、最近では第二の方法が主に利用されている。

ところで、以上述べた二つの数値解析的手法を実際の問題に適用してみると、両者とも、解の取れん性が悪い場合や、解が得られない場合がしばしば起こり、等張力曲面を精密にかつ確実に求められる解析法は見い出されていない。本報告では、以上の問題点を解決するために、第一の方法で用いた微分方程式を、一般化座標で表現した微分方程式へ拡張し、かつその微分方程式の解の性質を吟味することによって、等張力曲面を決定するための新たな未知量を導入した。そして、その未知量を求める方法として有限要素法を採用した。これにより、第一の方法による適用上の制限を払拭でき、かつ第二の方法で問題となっている解の収束性について、ほぼ改善されている。

数値解析例として、回転懸垂曲面を解析し解の精度を検討するとともに、同一閉曲線内に安定な等張力曲面が二つ存在するケースについても解析した。

2. 等張力曲面の基礎式とその性質

等張力曲面の従来の定義は、「直交座標系 $O-x y z$ を採用し曲面形状を $z = z(x, y)$ で表すとき、次の汎関数を極小とするもの。」である。

$$\Pi = \int n_0 \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \quad (1)$$

または、

$$\Pi = \int n_0 \frac{S-S_0}{S_0} dx dy \quad (2)$$

ここで、 $z_x = \partial z / \partial x$, $z_y = \partial z / \partial y$, n_0 は等張力、 S_0 は初期曲面積、 S は等張力曲面積である。(1) は、バteman¹⁰⁾ が石けん膜のポテンシャルとして定義し、(2) は、文献⁵⁾ ~ 9) で弾性エネルギー的に定義されたものである。したがって、両式と極小曲面を定義する汎関数

$$\Pi = \int \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \quad (3)$$

を比較すると、物理的意味は異なるが形式上は同一であることがわかる。本報告では、等張力曲面の定義を(1), (2) のように汎関数から行なうのではなく、等張力という曲面に作用している応力の釣合い条件式を求め、その汎関数を求める。そして、その汎関数が極小

曲面の汎関数と一致することを示す。

また、先に述べた応力の釣合い条件式を等張力曲面の基礎式として、三つの座標変数間の関係を吟味するとともに、その基礎式を用いて等張力曲面の幾何学的意味はガウスの平均曲率が0となる曲面であることを示す。

2. 1 等張力曲面の基礎方程式

本論文では、等張力曲面として次の定義を採用する。「等張力曲面とは、任意の切断面に作用する応力が、方向は切断面に対して直角で大きさが一定となる曲面である。」

これを、図1を用いて示すと、切断面を曲面のパラメータ α, β に沿ってとる場合、等張力 n_0 は、 α, β 曲線に対して直角に作用する応力となる。

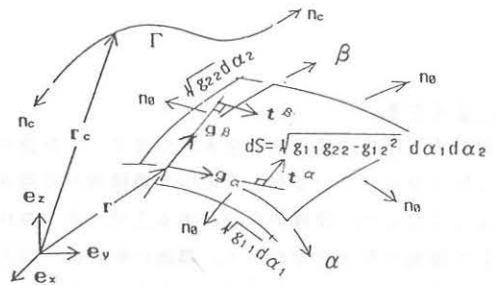


図1. 曲面の微小面積と曲線の微小長さ

等張力曲面の基礎方程式を求めるために、 α, β 曲線で表わされた曲面の微小部分の力の釣合式を求める。

まず、曲面を表わす座標を X, Y, Z とすると、これらは、次の様な α, β の関数として求められる。

$$X = X(\alpha, \beta) \quad (4-1)$$

$$Y = Y(\alpha, \beta) \quad (4-2)$$

$$Z = Z(\alpha, \beta) \quad (4-3)$$

つぎに、曲面の位置ベクトル r は、次式となる。

$$r = X e_x + Y e_y + Z e_z \quad (5)$$

ここで、 e_x, e_y, e_z はデカルト座標系の各方向の単位ベクトルである。(5)を用いて、基底ベクトル g_α, g_β , 法線ベクトル N を求める。

$$g_\alpha = \partial r / \partial \alpha = X_\alpha e_x + Y_\alpha e_y + Z_\alpha e_z \quad (6-1)$$

$$g_\beta = \partial r / \partial \beta = X_\beta e_x + Y_\beta e_y + Z_\beta e_z \quad (6-2)$$

$$N = g_\alpha \times g_\beta = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 X_α, X_β, \dots は X の α, β に関する偏微分を表わす。

また、 $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\beta\beta}$, \mathbf{N} の単位ベクトルを次に示す。

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha / |\mathbf{g}_\alpha| = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} (X_\alpha \mathbf{e}_x + Y_\alpha \mathbf{e}_y + Z_\alpha \mathbf{e}_z) \quad (8-1)$$

$$\mathbf{t}_\beta = \mathbf{g}_\beta / |\mathbf{g}_\beta| = \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} (X_\beta \mathbf{e}_x + Y_\beta \mathbf{e}_y + Z_\beta \mathbf{e}_z) \quad (8-2)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{N} / |\mathbf{N}| = \frac{1}{H} \{ (Y_\alpha Z_\beta - Z_\alpha Y_\beta) \mathbf{e}_x + (Z_\alpha X_\beta - X_\alpha Z_\beta) \mathbf{e}_y + (X_\alpha Y_\beta - Y_\alpha X_\beta) \mathbf{e}_z \} \quad (9)$$

ここで、 $H = \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2}$ (10)

また、 $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\beta\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ は第一基本計量で、次式で与えられる。

$$g_{\alpha\alpha} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha = X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2 \quad (11-1)$$

$$g_{\beta\beta} = \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{g}_\beta = X_\beta^2 + Y_\beta^2 + Z_\beta^2 \quad (11-2)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = X_\alpha X_\beta + Y_\alpha Y_\beta + Z_\alpha Z_\beta \quad (11-3)$$

更に、図1より切断面に直角方向の単位ベクトル \mathbf{t}^α と \mathbf{t}^β を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\alpha &= \mathbf{n} \times \mathbf{t}_\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \cdot \frac{1}{H} \{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \mathbf{e}_x + (Y_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_\alpha) \mathbf{e}_y + (Z_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_\alpha) \mathbf{e}_z \} \quad (12-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\beta &= \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \cdot \frac{1}{H} \{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \mathbf{e}_x + (Y_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_\beta) \mathbf{e}_y + (Z_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_\beta) \mathbf{e}_z \} \quad (12-2) \end{aligned}$$

次に、等張力が \mathbf{t}^α , \mathbf{t}^β 方向に作用したときの微小部分の力の合力を求めると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha} (n_\beta \sqrt{g_{\beta\beta}} d\beta \mathbf{t}^\beta) d\alpha \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta} (n_\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\alpha \mathbf{t}^\alpha) d\beta = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

(13)に、(12-1) (12-2)を代入して $n_\alpha d\alpha d\beta$ で割ると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{H} \{ (X_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_\beta) \mathbf{e}_x + (Y_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_\beta) \mathbf{e}_y + (Z_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_\beta) \mathbf{e}_z \} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{H} \{ (X_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_\alpha) \mathbf{e}_x + (Y_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_\alpha) \mathbf{e}_y + (Z_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_\alpha) \mathbf{e}_z \} \right] = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

となる。これを更に書き下して、 \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z の係数に対して整理すると以下の様な微分方程式が得られる。

$$g_{\beta\beta} X_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha} X_{\beta\beta} = 0 \quad (15-1)$$

$$g_{\beta\beta} Y_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha} Y_{\beta\beta} = 0 \quad (15-2)$$

$$g_{\beta\beta} Z_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha} Z_{\beta\beta} = 0 \quad (15-3)$$

上式は、未知量が X , Y , Z に関する準線形の連立2階非線形偏微分方程式であり、この式が等張力曲面の基礎方程式となる。

2. 2 等張力曲面の一般解

(15)で表わされた等張力曲面の基礎方程式において、2階偏微分 $X_{\alpha\alpha}$, $Y_{\alpha\alpha}$, $Z_{\alpha\alpha}$ 等の係数 $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\beta\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ は、1階偏微分の2乗を含む非線形項となっており、このままでは解を見出すことができない。しかし、これは楕円型偏微分方程式に属する方程式であり、独立変数 (α, β) を、

$$\xi = \phi(\alpha, \beta) \quad (16-1)$$

$$\eta = \psi(\alpha, \beta) \quad (16-2)$$

なる関係の下に、 (ξ, η) に変換することにより、標準型の偏微分方程式に変換することができる。すなわち(15-1)~(15-3)は、条件式

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} \quad (17-1)$$

$$g_{\xi\eta} = 0 \quad (17-2)$$

の下で、

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = 0 \quad (18-1)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (18-2)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = 0 \quad (18-3)$$

に変換される。

上式は、 X , Y , Z に関して、同一の調和方程式となっていることがわかる。

したがって、 X , Y , Z は、次の調和方程式の解 $a(\xi, \eta)$ を共通の解としてもつことになる。

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0 \quad (19)$$

そして、 X , Y , Z は a の函数として次の様に表わ

すことができる。

$$X = f_1(a) \quad (20-1)$$

$$Y = f_2(a) \quad (20-2)$$

$$Z = f_3(a) \quad (20-3)$$

上式から、 X 、 Y 、 Z は互いに独立した変数ではなく、 a という共通の関数によって結び付けられた互いに従属関係にある変数であることがわかる。

次に、関数 $f_1(a) \sim f_3(a)$ の形式を求める。たとえば、 $f_1(a)$ について次のようになる。

(20-1) を (18-1) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad (21)$$

また、(20-1) より、

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi} = \frac{df_1}{da} \frac{\partial a}{\partial \xi} \quad (22-1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{df_1}{da} \frac{\partial a}{\partial \eta} \quad (22-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{df_1}{da} \right) \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{d^2 f_1}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (22-3)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 f_1}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{df_1}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \quad (22-4)$$

(22-3)、(22-4) を (21) に代入すると次式となる。

$$\frac{d^2 f_1}{da^2} \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right\} + \frac{df_1}{da} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (23)$$

ところで、左辺第2項の $\left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right)$ は、

(19) より 0 となるが、

左辺第1項の $\left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right\}$ は一般的に 0

とはならないので、上式が成立するためには、

$$\frac{d^2 f_1}{da^2} = 0 \quad (24)$$

なる関係が成立しなければならない。

(24) を2回積分すると、

$$f_1 = c_1 a + c_2 \quad (25-1)$$

となり、 f_1 の形式は a の一次式となることがわかる。

ここで、 C_1 、 C_2 は積分定数である。

同様に、 f_2 、 f_3 についても次のように表わせる。

$$f_2 = d_1 a + d_2 \quad (25-2)$$

$$f_3 = e_1 a + e_2 \quad (25-3)$$

次に、パラメータ (ξ, η) で表わされた上式を、元のパラメータ (α, β) に変換すると、最終的に等張力曲面の基礎式 (15) の一般解は、次式となる。

$$X = \lambda(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + x_0(\alpha, \beta) \quad (26-1)$$

$$Y = \mu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + y_0(\alpha, \beta) \quad (26-2)$$

$$Z = \nu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + z_0(\alpha, \beta) \quad (26-3)$$

ここで、 $a(\alpha, \beta)$ が未知量で、 λ 、 μ 、 ν 、 x_0 、 y_0 、 z_0 は、初期条件によって定められる定数である。

上式と似た形式の式は文献 4) にも紹介されているが、本報告では、 λ 、 μ 、 ν と x_0 、 y_0 、 z_0 を α 、 β の関数としており、任意に定める量としている。

また、上式の物理的意味は、図 2 で示されるように x_0 、 y_0 、 z_0 を初期曲面とし、 λ 、 μ 、 ν を初期曲面で設定された方向余弦としたとき、等張力曲面を表わす座標 X 、 Y 、 Z は、初期曲面上の座標 x_0 、 y_0 、 z_0 と方向余弦方向の距離 a の和として求められることである。

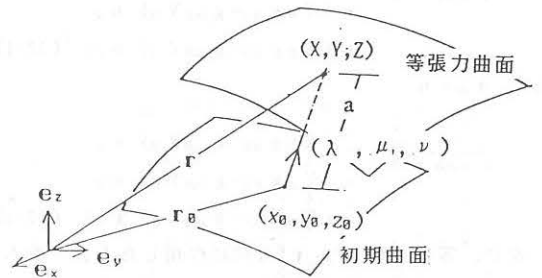


図 2. 曲面を決定する未知量 a とその方向余弦

2. 3 等張力曲面の汎関数

ここでは、等張力曲面の汎関数を求めることにする。

等張力曲面の基礎方程式を求める過程の式 (14) を等張力 n_0 の項を残した式として再記する。

$$\begin{aligned} n_0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{H} \left\{ (X_{\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_{\beta}) e_x \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (Y_{\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Y_{\beta}) e_y \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (Z_{\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} Z_{\beta}) e_z \right\} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{H} \left\{ (X_{\beta} g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} X_{\alpha}) e_x \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (Y_{\beta} g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Y_{\alpha}) e_y \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (Z_{\beta} g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta} Z_{\alpha}) e_z \right\} \right] \right) = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

ここで、 e_x, e_y, e_z の係数についてまとめると、 e_x の係数は次式となる。

$$n_0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{H} (X_{\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_{\beta}) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{H} (X_{\beta} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} X_{\alpha}) \right] \right) = 0 \quad (28)$$

ところで、上式の第1項と第2項は、次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{H} (X_{\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta} X_{\beta}) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial X_{\alpha}} \right) \quad (29-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{H} (X_{\beta} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} X_{\alpha}) \right] = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial H}{\partial X_{\beta}} \right) \quad (29-2)$$

したがって、(29-1) ~ (29-2)を(28)に代入して、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial X_{\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial X_{\beta}} \right) = 0 \quad (30-1)$$

同様に、 e_y, e_z の係数についても、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial Y_{\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial Y_{\beta}} \right) = 0 \quad (30-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial Z_{\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial(n_0 H)}{\partial Z_{\beta}} \right) = 0 \quad (30-3)$$

また、上式(30-1) ~ (30-3)の微分方程式からわかるように、この3式を停留式としてもつ汎関数は次の様に表現できる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \int n_0 H d\alpha d\beta \\ &= \int n_0 \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (31)$$

上式が、等張力曲面の汎関数表現である。

すなわち、文献10)で石けん膜のポテンシャル関数としてアブリオリに定義した式(31)は、物理的に等張力曲面を示す式であることが示された。また、(31)式によれば、いわゆる極小曲面の汎関数(3)は、等張力 n_0 を省略した式であることがわかる。

2. 4 デカルト座標系と円柱座標系における等張力曲面式

(26)で示された等張力曲面の一般解の内容を明確にするために、ここでは、デカルト座標系と円柱座標系における表現を与え、従来から知られている極小曲面式($n_0=1$)との関係を検討する。

まず、デカルト座標との対応を考える。

$$\text{曲面パラメータ } \alpha = x, \beta = y \quad (32)$$

$$\text{方向余弦 } \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 1 \quad (33)$$

$$\text{初期曲面 } x_0 = \alpha, y_0 = \beta, z_0 = 0 \quad (34)$$

(32) ~ (34)を(26)に代入する。

$$X = 0 \cdot a + \alpha = x \quad (35-1)$$

$$Y = 0 \cdot a + \beta = y \quad (35-2)$$

$$Z = 1 \cdot a + 0 = a \quad (35-3)$$

位置ベクトル

$$r = x e_x + y e_y + a e_z \quad (36)$$

第1基本計量

$$g_x = 1 \cdot e_x + 0 \cdot e_y + a_x e_z \quad (37-1)$$

$$g_y = 0 \cdot e_x + 1 \cdot e_y + a_y e_z \quad (37-2)$$

$$\therefore g_{xx} = g_x \cdot g_x = 1 + a_x^2 \quad (38-1)$$

$$g_{yy} = g_y \cdot g_y = 1 + a_y^2 \quad (38-2)$$

$$g_{xy} = a_x a_y \quad (38-3)$$

$$\begin{aligned} \therefore H &= \sqrt{g_{xx} g_{yy} - g_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(1 + a_x^2)(1 + a_y^2) - a_x^2 a_y^2} \\ &= \sqrt{1 + a_x^2 + a_y^2} \end{aligned} \quad (39)$$

上式を(31)に代入するとデカルト座標系で表された等張力曲面の汎関数が次式のように求められる。

$$\Pi = \int n_0 \sqrt{1 + a_x^2 + a_y^2} dx dy \quad (40)$$

上式は、 n_0 を省略すればz座標のみを変数とした従来の極小曲面の汎関数と一致している。すなわち、従来のデカルト座標で表現された極小曲面式は、初期曲面を $z=0$ 平面とし、方向余弦を(0,0,1)とした場合に相当するものである。

次に円柱座標との対応を考える。

$$\text{曲面パラメータ } \alpha = \theta, \beta = z \quad (41)$$

$$\text{方向余弦 } \lambda = \cos \alpha, \mu = \sin \alpha, \nu = 0 \quad (42)$$

$$\text{初期曲面 } x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = \beta \quad (43)$$

(41) ~ (43)を(26)に代入する。

$$X = \cos \alpha \cdot a + 0 = \cos \theta \cdot a \quad (44-1)$$

$$Y = \sin \alpha \cdot a + 0 = \sin \theta \cdot a \quad (44-2)$$

$$Z = 0 \cdot a + \beta = z \quad (44-3)$$

曲面の位置ベクトル

$$r = \cos \theta \cdot a e_x + \sin \theta \cdot a e_y + z \cdot e_z \quad (45)$$

第1基本計量

$$\begin{aligned} g_{\theta} &= (-\sin \theta \cdot a + \cos \theta \cdot a \theta) e_x \\ &\quad + (\cos \theta \cdot a + \sin \theta \cdot a \theta) e_y \\ &\quad + 0 \cdot e_z \end{aligned} \quad (46-1)$$

$$g_z = \cos \theta \cdot a_z e_x + \sin \theta \cdot a_z e_y + 1 \cdot e_z \quad (46-2)$$

$$\therefore g_{\theta\theta} = g_{\theta} \cdot g_{\theta} = a^2 + a_{\theta}^2 \quad (47-1)$$

$$g_{zz} = g_z \cdot g_z = a_z^2 + 1 \quad (47-2)$$

$$g_{\theta z} = a_{\theta} a_z \quad (47-3)$$

$$\begin{aligned} \therefore H &= \sqrt{g_{\theta\theta} g_{zz} - g_{\theta z}^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + a_{\theta}^2)(a_z^2 + 1) - (a_{\theta} a_z)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 a_z^2 + a_{\theta}^2} \quad (48) \end{aligned}$$

いま、軸対称回転曲面を考えると、 $a_{\theta} = 0$ であり、

$$H = \sqrt{a^2 + a^2 a_z^2} = a \sqrt{1 + a_z^2} \quad (49)$$

上式を(31)に代入すると円柱座標系で表された等張力曲面の汎関数は次式により求められる。

$$\Pi = 2\pi \int n_{\theta} a \sqrt{1 + a_z^2} dz \quad (50)$$

上式は、 n_{θ} を省略すれば軸対称回転曲面を表す従来の極小曲面の汎関数と一致している。すなわち従来の式は、初期曲面を z 軸上にとり、方向余弦を半径方向にとった場合に相当するものである。

2. 5 ガウスの平均曲率

等張力曲面の基礎方程式(15)を基にしてガウスの平均曲率を求めると、ガウスの平均曲率が0となることを証明する。

$$\begin{aligned} &(15-1) \times (Y_{\alpha} Z_{\beta} - Z_{\alpha} Y_{\beta}) / 2H^3 \\ &+ (15-2) \times (Z_{\alpha} X_{\beta} - X_{\alpha} Z_{\beta}) / 2H^3 \\ &+ (15-3) \times (X_{\alpha} Y_{\beta} - Y_{\alpha} X_{\beta}) / 2H^3 \\ &= 0 \quad (51) \end{aligned}$$

として、これを整理すると次式となる。

$$\frac{1}{2H^2} (g_{\alpha\alpha} H_{\beta\beta} - 2g_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + g_{\beta\beta} H_{\alpha\alpha}) = 0 \quad (52)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H} \{ (Y_{\alpha} Z_{\beta} - Z_{\alpha} Y_{\beta}) X_{\alpha\alpha} \\ &\quad + (Z_{\alpha} X_{\beta} - X_{\alpha} Z_{\beta}) Y_{\alpha\alpha} \\ &\quad + (X_{\alpha} Y_{\beta} - Y_{\alpha} X_{\beta}) Z_{\alpha\alpha} \} \\ &= \frac{1}{H} \begin{vmatrix} X_{\alpha\alpha} & Y_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\alpha} \\ X_{\alpha} & Y_{\alpha} & Z_{\alpha} \\ X_{\beta} & Y_{\beta} & Z_{\beta} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{H} |g_{\alpha, \alpha} \quad g_{\alpha} \quad g_{\beta}| \quad (53-1) \end{aligned}$$

同様に、

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{H} |g_{\alpha, \beta} \quad g_{\alpha} \quad g_{\beta}| \quad (53-2)$$

$$H_{\beta\beta} = \frac{1}{H} |g_{\beta, \beta} \quad g_{\alpha} \quad g_{\beta}| \quad (53-3)$$

また、 $H_{\alpha\alpha}$ 、 $H_{\alpha\beta}$ 、 $H_{\beta\beta}$ は、(53)より、曲面の第

2基本計量となっていることがわかる。すなわち、(52)の g_{ij} および H_{ij} ($i, j = \alpha, \beta$)が、それぞれ曲面の第1および第2基本計量になっているので、定義より(52)の左辺はガウスの平均曲率となり、結局、等張力曲面においてはガウスの平均曲率が0になることがわかる。

3. 有限要素法による定式化

前章で求めた等張力曲面を表す一般解(26)と汎関数(31)を用いた有限要素解析について述べる。

ここでは、3角形要素を用いる。

図3に、初期曲面と等張力曲面上の座標および方向余弦を示す。

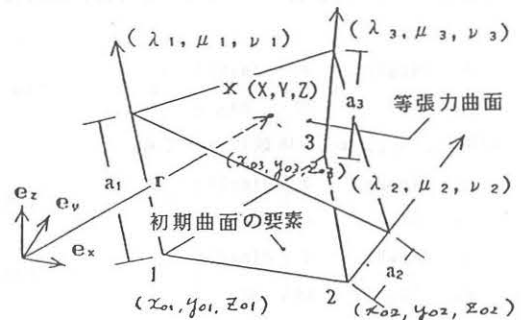


図3. 三角形要素による曲面表示

ここで、

x_{0i} , y_{0i} , z_{0i} : 初期曲面上の節点 i の座標

x_{0e} , y_{0e} , z_{0e} : 初期曲面上の要素内部の座標

x_i , y_i , z_i : 等張力曲面上の節点 i の座標

x_e , y_e , z_e : 等張力曲面上の要素内部の座標

λ_{xi} , λ_{yi} , λ_{zi} : 節点 i の方向余弦

a_i : 節点 i の距離(未知量)

また、次の記号を定義する。

$$x_{0i} = {}^t \{ x_{01} \ x_{02} \ x_{03} \ y_{01} \ y_{02} \ y_{03} \ z_{01} \ z_{02} \ z_{03} \} \quad (54-1)$$

$$x_{0e} = {}^t \{ x_{0e} \ y_{0e} \ z_{0e} \} \quad (54-2)$$

$$x_i = {}^t \{ x_1 \ x_2 \ x_3 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ z_1 \ z_2 \ z_3 \} \quad (54-3)$$

$$x_e = {}^t \{ x_e \ y_e \ z_e \} \quad (54-4)$$

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu_3 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_z = \begin{bmatrix} \nu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \nu_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$a_i = {}^t \{ a_1 \ a_2 \ a_3 \} \quad (56)$$

また、等張力曲面上の節点座標 x_i は、初期曲面上の節点座標 x_{0i} と節点距離 a_i とにより、次の様に表わされる。

$$x_i = x_{0i} + \Lambda \cdot a_i \quad (57)$$

$$\text{ここで、} \quad \Lambda = \begin{Bmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{Bmatrix} \quad (58)$$

また、図3により、要素内部の座標 x_0 は要素節点座標 x_i で表わすことができる。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & \cdot & x & \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & y & \cdot & \cdot & y & \cdot & \cdot & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Lambda \end{bmatrix} x_i \\ = U(x, y) \cdot x_i = U \cdot (x_{0i} + \Lambda \cdot a_i) \quad (59)$$

上式が、等張力曲面上の要素内部の座標 x_0 を、節点距離 a_i で表わしたもので、今後第1基本計量を計算するときの基本となるものである。

つぎに、要素の汎関数を定義する。

$$\Pi_0 = n_0 \int \sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} \, dx dy \quad (60)$$

ここで、座標系はデカルト座標で表わした要素座標系とする。

等張力曲面上の位置ベクトルは、

$$r = x_0 e_x + y_0 e_y + z_0 e_z \quad (61)$$

で表わされるから、第1基本計量は次式となる。

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \quad (62-1)$$

$$g_{yy} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \quad (62-2)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial z_0}{\partial y} \quad (62-3)$$

また、(59)から、

$$\left\{ \frac{\partial x_0}{\partial y_0} \middle/ \frac{\partial x}{\partial x} \right\} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x_i = U_x x_i \quad (63-1)$$

$$\left\{ \frac{\partial x_0}{\partial y_0} \middle/ \frac{\partial y}{\partial y} \right\} = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot x_i = U_y x_i \quad (63-2)$$

上式を、(62-1) ~ (62-3) に代入すると、

$$g_{xx} = {}^t x_i {}^t U_x U_x x_i \quad (64-1)$$

$$g_{yy} = {}^t x_i {}^t U_y U_y x_i \quad (64-2)$$

$$g_{xy} = {}^t x_i {}^t U_x U_y x_i \quad (64-3)$$

次に、第1基本計量のベクトル表示を示す。

$$g = {}^t \{ g_{xx} \ g_{yy} \ g_{xy} \} \quad (65)$$

更に、 g の変分を (64)、(65) から求めると、

δx_i を用いて次の様に表わすことができる。

$$\delta g = V \cdot \delta x_i \quad (66)$$

ここに、

$$V = \begin{bmatrix} 2 {}^t x_i {}^t U_x U_x \\ 2 {}^t x_i {}^t U_y U_y \\ {}^t x_i ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x) \end{bmatrix} \quad (67)$$

次に、汎関数 (60) の変分を考える。まず H の第1変分をつくると、

$$\delta H = \delta \sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} \\ = \frac{1}{2H} (\delta g_{xx}g_{yy} + g_{xx}\delta g_{yy} - 2g_{xy}\delta g_{xy})$$

$$= \frac{1}{2H} \{ \delta g_{xx} \ \delta g_{yy} \ \delta g_{xy} \} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

$$\text{ここで、} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\sigma = {}^t \{ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \} = \frac{1}{2H} D g \quad (70)$$

とすると、(68) は、(69)、(70) 及び (66) を用いて、

$$\delta H = {}^t \delta g \cdot \sigma \\ = {}^t \delta x_i {}^t V \sigma \quad (71)$$

更に、(57) を用いて、(71) を変形すると、

$$\delta H = {}^t \delta a_i {}^t \Lambda {}^t V \sigma \quad (72)$$

となる。これを (60) の変分式に代入すると、

$$\delta \Pi_0 = {}^t \delta a_i (n_0 {}^t \Lambda \int {}^t V \sigma \, dx dy) \quad (73)$$

また、 $\delta \Pi_0 = 0$ より停留式は次式となる。

$$n_0 {}^t \Lambda \int {}^t V \sigma \, dx dy = 0 \quad (74)$$

次に、ニュートンラプソン法を用いるときの、増分方程式を求める。まず、被積分項の増分を考える。

$$d({}^t V \sigma) \\ = {}^t V \cdot d\sigma + d({}^t V) \cdot \sigma \\ = {}^t V \cdot d\sigma + \begin{bmatrix} {}^t d x_i \cdot 2 {}^t U_x U_x \\ {}^t d x_i \cdot 2 {}^t U_y U_y \\ {}^t d x_i \cdot ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x) \end{bmatrix} \sigma$$

$$= {}^t V \frac{D}{2} d \left(\frac{g}{H} \right) \\ + [2 {}^t U_x U_x dx_i \ 2 {}^t U_y U_y dx_i \\ ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x) dx_i] \sigma \\ = {}^t V \frac{D}{2H^2} (dgH - g dH) \\ + [2 {}^t U_x U_x \ 2 {}^t U_y U_y \\ ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x)] {}^t \sigma dx_i$$

$$= \left(\frac{1}{2H} {}^t V D V - \frac{1}{H} {}^t V \sigma \cdot {}^t \sigma V \right) dx_i$$

$$+ [2^t U_x U_x \quad 2^t U_y U_y \quad ^t U_x U_y + ^t U_y U_x] ^t \sigma dx_i \quad (75)$$

上式に(57)の増分式 $dx_i = A da_i$ を代入し、更に(74)に代入すると次式が得られる。

$$K \cdot da_i = df_i^* \quad (76)$$

ここで、

$$K = K_0 + K_\sigma \quad (77)$$

$$K_0 = n_0 \int \left(\frac{1}{2H} {}^t V D V - \frac{1}{H} {}^t V \sigma \cdot {}^t \sigma V \right) A dx dy \quad (78)$$

$$K_\sigma = n_0 \int [2^t U_x U_x \quad 2^t U_y U_y \quad ^t U_x U_y + ^t U_y U_x] \sigma A dx dy \quad (79)$$

$$df_i^* = -n_0 {}^t V \int {}^t V \sigma dx dy \quad (80)$$

である。

(76)が各ステップの増分方程式、(80)は不釣合量を表わす。計算は df_i^* が 0 となるまで反復させる。

4. 数値解析例

4.1 回転懸垂曲面

等張力曲面の解析例として、回転懸垂曲面を解析した(図4)。この曲面は、極小曲面の解析解が得られている例としてよく知られているが、数値解析上は、曲面の勾配が大きくなることや、2値となるために収束性がよくない例としても知られている。

分割数は、周方向および上下の対称性を考慮して円周方向に1分割(15°)、軸方向下半分で5分割とした。初期曲面は半径1の円筒面とし、方向余弦は各節点から回転軸方向にかつXY平面に平行な方向にとった。

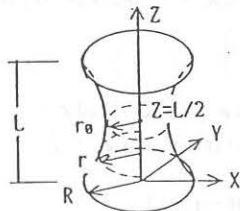


図4. 回転懸垂曲面

解析結果を表1に示す。数値解と解析解は、安定解と不安定解⁷⁾の両方の場合に対して、よく一致してい

ることがわかる。図5、図6にそれぞれ等張力曲面の断面図と透視図を示した。

また、方向余弦の任意性について検討するため、各節点を図7の様に適当に設定した。その場合の数値解と解析解を表2に示したが、両者はよく一致していることがわかる。図8は、円の高さ L/R を変えたときのくびれ位置 r_0/R の変化の様子を示したものである。数値解(●)は理論解(実線、文献7)から引用とよく一致している。曲面が存在する限界高さは、解析解では0.6550、理論解では0.6628⁷⁾であった。

表1. 数値解析結果 r/R

($L/R=1.0$ 方向余弦は $x-y$ 平面に平行な半径方向)

Z/R	安定解		不安定解	
	数値解	理論解	数値解	理論解
0.50000	0.84542	0.84834	0.23484	0.23510
0.40000	0.85143	0.85424	0.25644	0.25669
0.30000	0.86955	0.87202	0.32522	0.32542
0.20000	0.90004	0.90194	0.45380	0.45393
0.10000	0.94332	0.94440	0.66577	0.66582
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

表2. 数値解析結果 r/R

($L/R=1.0$ 方向余弦は節点ごとに任意に設定)

z/R	安定解	
	数値解	理論解
0.50000	0.23060	0.23510
0.33775	0.28852	0.29334
0.20224	0.44559	0.45025
0.10563	0.64780	0.65109
0.04188	0.84030	0.84184
0.00000	1.00000	1.00000
z/R	不安定解	
	数値解	理論解
0.50000	0.84549	0.84834
0.38715	0.85315	0.85586
0.27800	0.87524	0.87755
0.17572	0.90939	0.91107
0.08261	0.95222	0.95311
0.00000	1.00000	1.00000

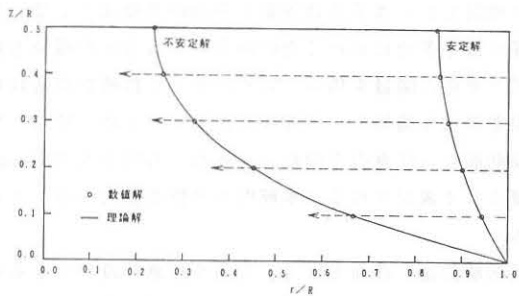


図5. 回転懸垂面 断面図

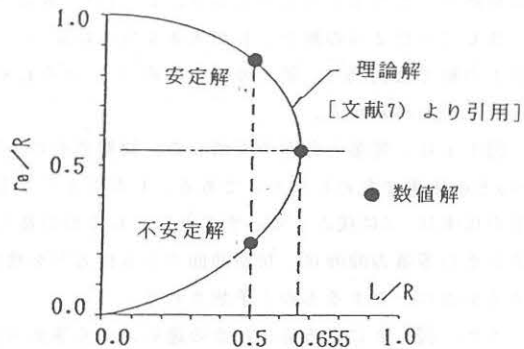


図8. 回転懸垂面のくびれ位置

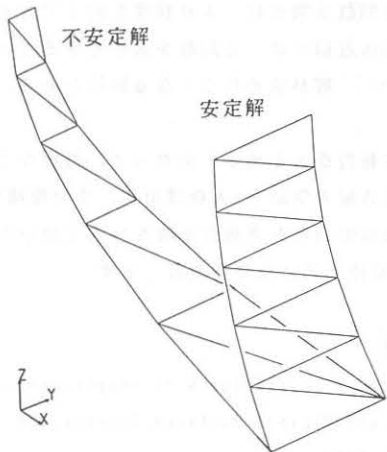


図6. 回転懸垂面 透視図

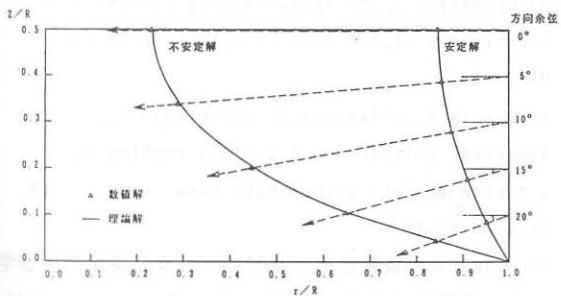


図7. 回転懸垂面 断面図

(方向余弦を任意に設定した場合)

4. 2 コの字型等張力曲面

文献8)で紹介されている極小曲面に対応する例として、図9に示すような直方体の稜の一部を閉曲線としたときの等張力曲面を求める。ただし、この直方体は一對の相対する面が正方形となっている。直方体の長さLを変化させることにより、等張力曲面のSaddle Pointの位置(図12のA点)が移動する様子を調べた。

この例では、同一の境界に対して等張力曲面が2つ存在するので、初期曲面をそれぞれの等張力曲面の近くに別々に設定した(図9)。方向余弦は、曲面を一価的に表現できるようにした。解析した直方体の長さLは、1~4の4ケースである。

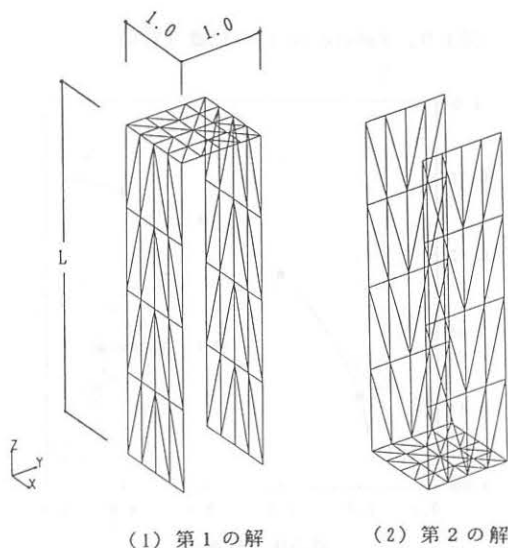


図9. 初期曲面

図10は、 L に対応した等張力曲面のSaddle Pointの位置 z/L を示したものである。 $L=1$ のときはほぼ一致していた2つの解が、 L が大きくなるに従って、第1の解では約0.9、第2の解では約0.1にそれぞれ近づくことがわかる。

図11は、等張力曲面の面積 S を、初期曲面の面積 S_0 との比率で表わしたものである。 L が大きくなるとその比率は1.0に接近する。すなわち、長方形が長くなるとその等張力曲面は、初期曲面である長方形を構成する平面に一致するものと予想される。

また、図12に直方体の長さの違いによる等張力曲面の形状変化を、図13には第1の解で $L=4.0$ のときの断面図を示した。

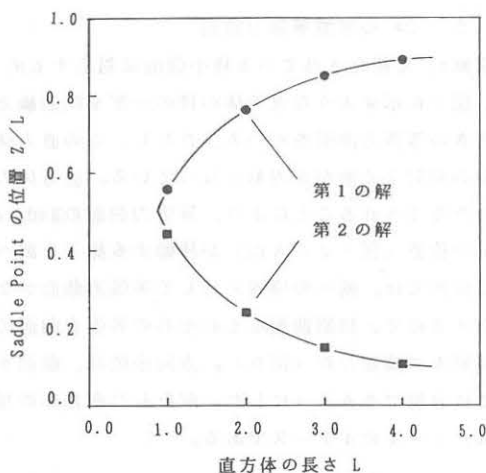


図10. Saddle Pointの位置 (z/L)

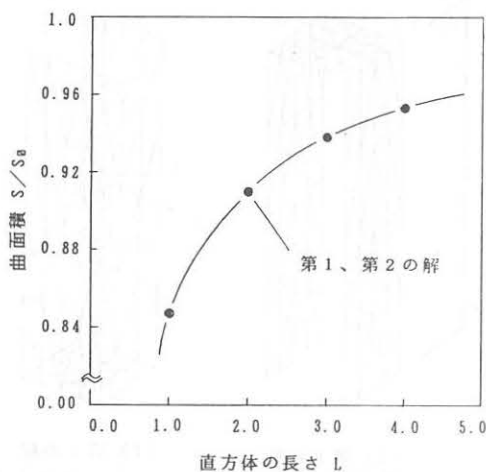


図11. 等張力曲面積 S と初期曲面積 S_0 との比率

5. まとめ

等張力曲面形状を求めるための数値解析手法について検討した。本手法は等張力曲面の基礎式として、曲面の微小部分における力の釣り合いから求めた微分方程式とその汎関数を用いている。そして数値計算法は有限要素法を適用した。曲面を決定するための解は、初期曲面から任意の方向に設定された方向余弦方向の距離として表現される。本解析法の特徴は次の通りである。

1. 初期曲面と曲面上の方向余弦を任意に設定できるので、より精度がよい滑らかな曲面が得られる。
2. 解析する未知量は、1節あたり1変数であり、従来の3変数と比較して計算時間が少なくなる。
3. 解の収束過程で特別な操作を行わずに、確実に収束解が得られる。
4. 要素分割数を増せば、より精度を向上できる。(従来の多面体近似では、分割数を大きくするとより不安定性が増し、解が求めにくくなる場合がある。)

謝辞 本報告をまとめるにあたって、貴重なご意見を頂いた名古屋大学助手・大森博司氏、及び原稿作成にあたり多大な労力と有意義な示唆を与えて頂いたフジタ工業・萩原伸幸氏に深く感謝致します。

参考文献

- 1) Courant, R., Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces, Interscience, New York, 1950
- 2) Concus, P., Numerical solution of the minimal surface equation Math. Comp., V. 21, 1967, pp. 340-350 MR37 #4968
- 3) Greenspan, D., On approximating extremals of functionals. -I, Icc Bull., V. 4, 1965, pp. 99-120. MR32 #8526
- 4) Hinata, M., Shimasaki, M. and Kiyono, T., Numerical solution of Plateau's problem by a finite element method, Math. Comp., V. 28, no. 125, 1974, pp. 45-60.
- 5) 石井一夫, 膜構造の形状解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東) 昭和59年10月, pp. 2599-2600
- 6) 本間俊雄他, 膜構造における極小曲面問題について, 第2回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集, pp. 111-118., Aug., 1987

7) 大森博司, 萩原伸幸他, 有限要素法による極小曲面の数値解析, 膜構造研究論文集'88, 日本膜構造協会, No. 2, pp. 1-10.

8) 萩原伸幸, 大森博司他, 張力構造に関する基礎的研究(その4), 日本建築学会大会学術講演梗概集(九

州), 1989年10月

9) Haug, E., Finite element analysis of pneumatic structures, IASS, Delft, 1972

10) Bateman, H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, pp. 501-509., 1931

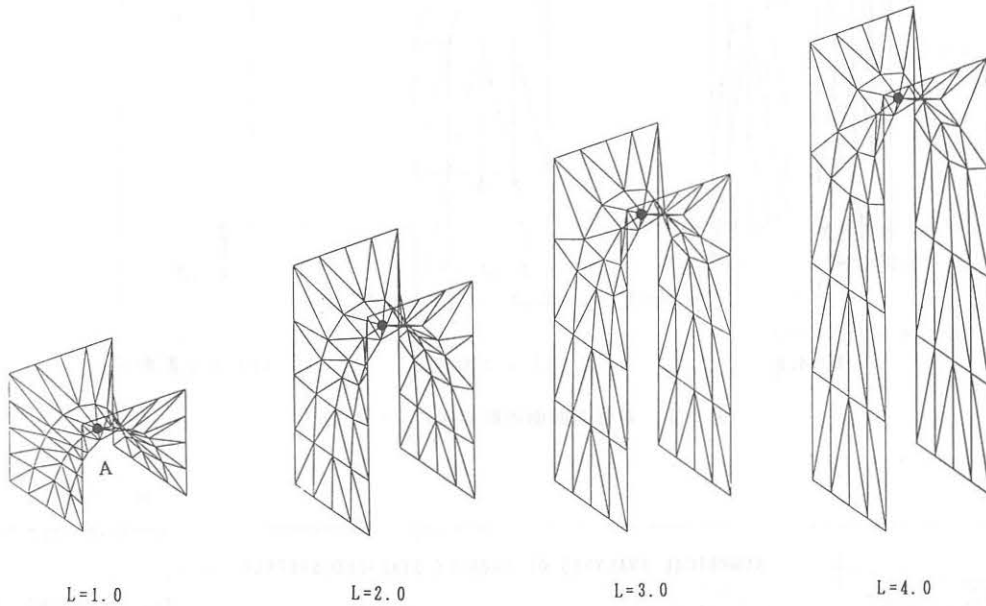


図 1 2 - 1. 直方体の長さLの違いによる等張力曲面の変化(第1の解)

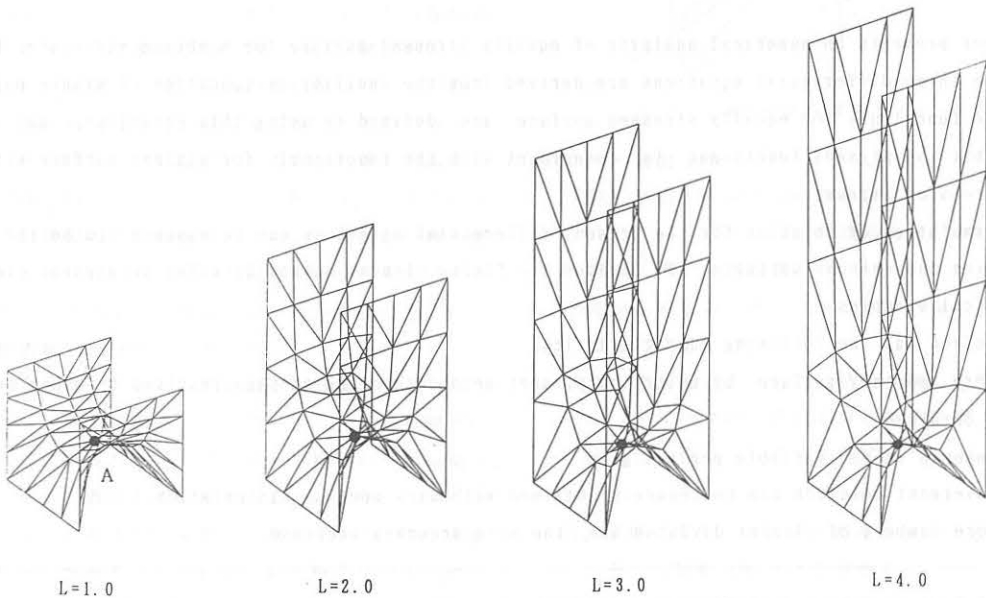


図 1 2 - 2. 直方体の長さLの違いによる等張力曲面の変化(第2の解)

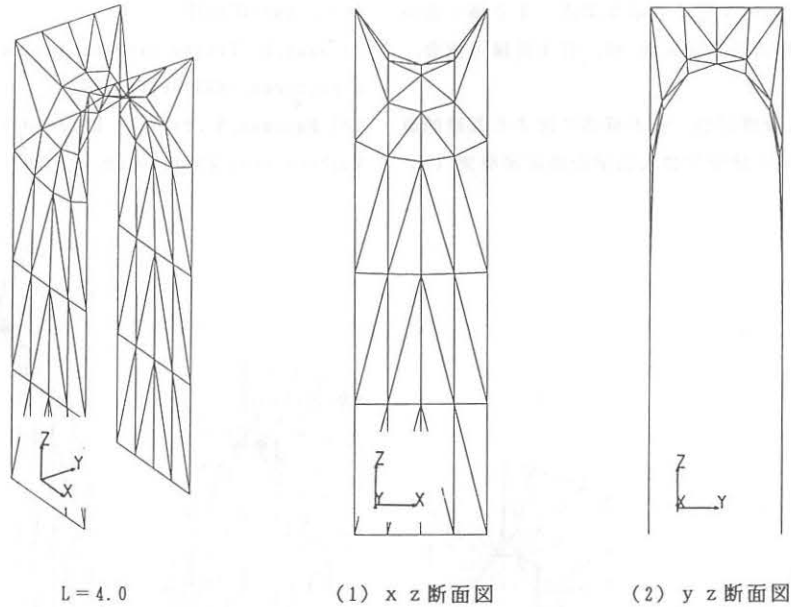


図 13. 等張力曲面の断面図 (L = 4.0)

NUMERICAL ANALYSIS OF EQUALLY STRESSED SURFACE

Toshio SUZUKI *1

Yasuhiko HANGAI *2

SYNOPSIS

The paper presents an numerical analysis of equally stressed surface for membrane structure. First, the basic three differential equations are derived from the equilibrium condition of minute parts. Next, the functional for equally stressed surface are defined by using this equations, and it is proved that the present functional is coincident with the functional for minimal surface without item of tension stress.

The formulation of solution for the present differential equations can be assumed to be the solution having one unknown variable. We applied the finite element method by using triangular element in numerical examples.

This method has the following characteristics,

1. The more smoothly surface by using the present method than the surface resulted by other methods can be obtained.
2. The unknown is one variable per uni grid.
3. The covergent solution can be securely obtained without a special manipulation.
4. The more numbers of element division are, the more accuracy increase.

*1. Chief Engineer, Technical Division, Fujita Corp.

*2. Professor, Institute of Industrial Science, University of Tokyo