

# 複合ケーブル構造の構造安定性に関する研究

—基本モデルの構造安定—

半谷裕彦<sup>\*1</sup>, 真柄栄毅<sup>\*2</sup>

岡村 潔<sup>\*2</sup>, 林 暁光<sup>\*1</sup>

## 概要

棒材、ケーブル材、膜材などにより構成される複合構造では圧縮に抵抗する棒材及び引張りに抵抗するケーブル材や膜材などの役割分担がなされ、そのため軽量構造を可能としている。しかし、圧縮を受ける棒材や初期張力の消失後の全体的挙動において構造安定がひとつの課題となる。本論文では、棒材とケーブル材から構成される基本モデルを利用して、この種の構造の構造安定性を調査するための基礎的事項を検討する。

### 1. 研究目的

ケーブル、膜、棒材（ポスト）などによる複合構造を「複合ケーブル構造」と呼ぶことにする。複合ケーブル構造の基本的な構造原理はケーブルと膜の張力とポストに生じる軸圧縮力の組合せにより抵抗する構造システムにある。ケーブルや膜材には圧縮力に対する抵抗能力（剛性）が期待できないので、自己釣合応力系を構成する初期張力を導入することにより初期剛性を確保することになる。そのため、自己釣合応力系を満足する形状の選定とともに、(a)初期張力による剛性評価、(b)荷重載荷による剛性変化、(c)初期張力導入状態及び荷重載荷状態における構造安定、は複合ケーブル構造を設計する場合の基本的検討事項となる。(a)、(b)項は応力、変形性状を把握する際に必要となる剛性評価を実施するものであり、構造設計の基礎となる。しかし、(a)、(b)項を理論構成するためには、(c)項において「不安定状態とはなっていない」ことが前提となる。

以上を背景として、本論文では、棒材とケーブル材からなる基本モデルを利用して、構造安定性を調査するための基礎的事項を検討する。

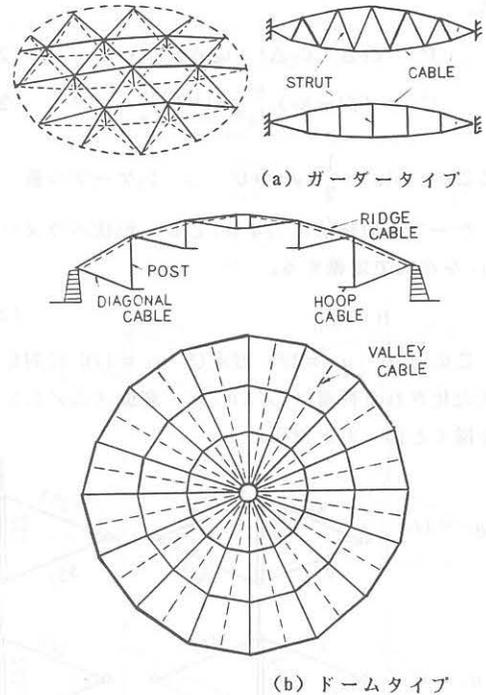


図-1 複合ケーブル構造の例

\*1 東京大学 生産技術研究所

\*2 竹中工務店 技術研究所

## 2. 初期張力と荷重・変位関係

本章では、図-2、図-6、図-10 に示す3個の基本モデルを用い、構造形状と初期張力の効果の関係、および荷重・変位関係における非線形性のオーダーについて述べる。

### 2.1 基本モデル-I

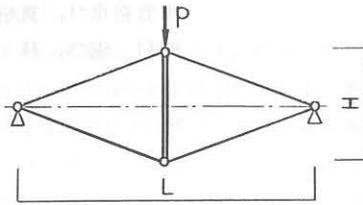


図-2 基本モデル-I

基本モデル-Iは4本のケーブルを対称位置に配し、ポストの上端に鉛直荷重Pを作用させるモデルである。スパンをLとし、ポストの長さをHとする。ケーブルの断面積をA、初期張力を $N_0$ 、ポストの鉛直方向変位を $\Delta$ とすると荷重・変位曲線は次式となる。

$$P = C_1 \Delta + C_3 \Delta^3 + C_5 \Delta^5 + \dots \quad (2-1)$$

$$C_1 = (EA - N_0) \frac{H^2}{L_0^3} + 4 \frac{N_0}{L_0} \quad (2-2)$$

ここに  $L_0 = \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + L^2}$  : ケーブル長

ケーブルの降伏応力を $\sigma_y$ とし、形状パラメーター $\mu_1$ を次式で定義する。

$$\mu_1 = \frac{H}{L} \quad (2-3)$$

このとき、 $\mu_1 = 1/5$  および  $\mu_1 = 1/6$  に対して無次元化された荷重 ( $P/A\sigma_y$ ) ・変位 ( $\Delta/L$ ) 曲線を描くと図-3 となる。

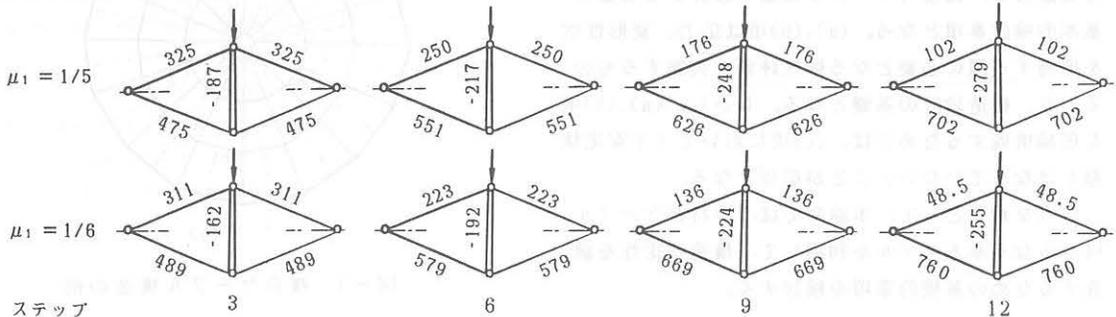


図-5 荷重の増加による軸力の変化

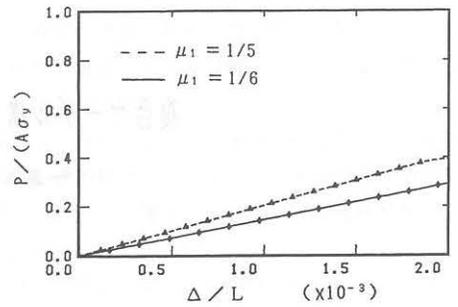


図-3 モデルIの荷重・変位曲線

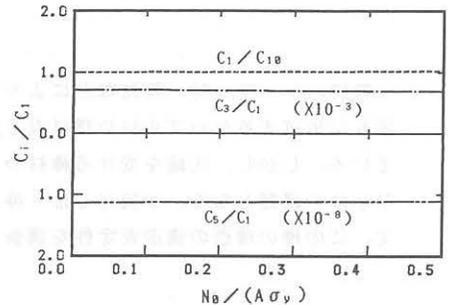


図-4 荷重・変位関係の非線形性のオーダー

実線と点線は(2-1)式による理論解、 $\Delta$ と $\diamond$ は下式を利用した増分法による解である<sup>[1]</sup>。増分法においては、ポストとケーブルの剛性比 $(EA)_p/(EA)_c$ を $10^4$ のオーダーとしている。

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & \ell n \\ \ell m & m^2 & mn \\ \ell n & mn & n^2 \end{bmatrix} + \frac{N_0}{L} \begin{bmatrix} 1-\ell^2 & -\ell m & -\ell n \\ -\ell m & 1-m^2 & -mn \\ -\ell n & -mn & 1-n^2 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

ここに、 $\ell$ 、 $m$ 、 $n$ はケーブルの全体座標系に対する方向余弦である。図-3より両者の解は一致している。図中の荷重・変位曲線はほぼ直線となっている。

が、非線形性のオーダーを調べると図-4となる。  
 図-4は $\mu_1 = 1/6$ の場合における $N_0 / A\sigma_y \sim C_i / C_{10}$ 関係を描いたものである( $C_{10}$ は $N_0 = 0$ の場合の $C_1$ )。上弦ケーブルと下弦ケーブルが対称位置となっているため、 $C_i$  ( $i = 1, 3, 5$ )の値は $N_0$ の値にかかわらずほぼ一定となっている(図-8と比較)。同図より(2-1)式の各係数間のオーダーは概略、次式となる。

$$\begin{aligned} C_1 / C_{10} &= 0(1), & C_3 / C_{10} &= 0(10^{-3}), \\ C_5 / C_{10} &= 0(10^{-6}) \end{aligned} \quad (2-5)$$

次に、荷重の増加に伴う軸力の変化を観察すると図-5となる。荷重の増加により、上弦ケーブルの初期張力( $N_0 = 400\text{kg}$ )は減少していき、 $N = 0$ の時点でケーブルにたるみが発生する。一方、下弦ケーブルでは、張力は増大していき、 $N = A\sigma_y$ の時点で降伏に達する(本モデルでは $A\sigma_y = 845\text{kg}$ )。

## 2.2 基本モデル-II

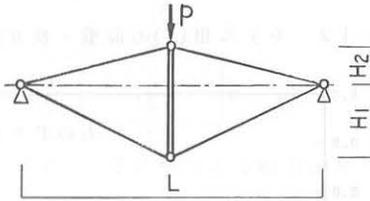


図-6 基本モデル-II

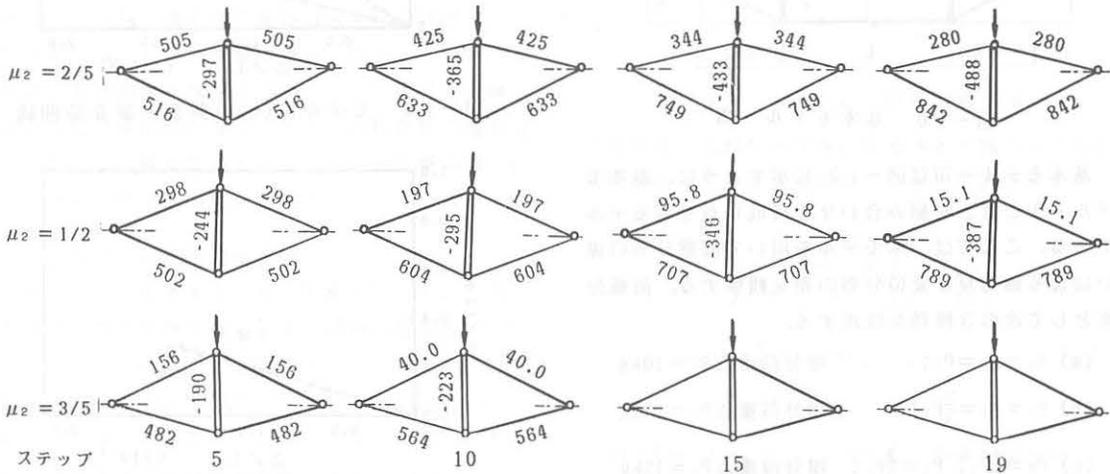


図-9 荷重の増加による軸力の変化

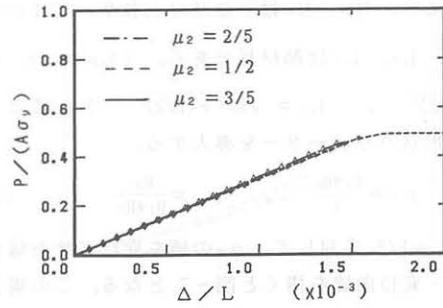


図-7 モデルIIの荷重・変位曲線

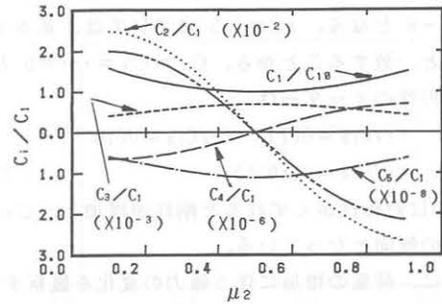


図-8 荷重・変位関係の非線形性のオーダー

基本モデル-IIは図-6に示すように、上、下弦ケーブルを非対称に配置したモデルである。このモデルの荷重・変位曲線は

$$P = C_1 \Delta + C_2 \Delta^2 + C_3 \Delta^3 + \dots \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(EA - N_0) \frac{H_1^2}{L_0^3} + 2(EA - N_1) \frac{H_2^2}{L_1^3} + \\ &+ 2 \frac{N_0}{L_0} + 2 \frac{N_1}{L_1} \end{aligned} \quad (2-7)$$

ここに、 $N_0$ 、 $N_1$  は下弦及び上弦ケーブルの初期張力、 $L_0$ 、 $L_1$  は部材長である。 $(L_0 = \sqrt{H_1^2 + (L/2)^2}$ 、 $L_1 = \sqrt{H_2^2 + (L/2)^2})$ 。ここで、次の形状パラメーターを導入する。

$$\mu_1 = \frac{H_1 + H_2}{L}, \quad \mu_2 = \frac{H_2}{H_1 + H_2} \quad (2-8)$$

$\mu_1 = 1/4$  に対して、 $\mu_2$  の値を変化させた場合の荷重・変位曲線を描くと図-7 となる。この場合においても、理論解と増分解はほぼ一致している。荷重・変位関係における非線形性のオーダーを調べると図-8 となる。 $\mu_2 = 0.5$  においては、基本モデル-I と一致することから、 $C_2 = C_4 = \dots = 0$  となる。非線形性のオーダーは

$$C_1/C_{10} = 0(1), \quad C_2/C_{10} = 0(10^{-2}), \\ C_3/C_{10} = 0(10^{-3}) \quad (2-9)$$

$C_1$  は対称性がくずれると剛性が増加し、 $C_3$  はその逆の傾向となっている。

次に、荷重の増加に伴う軸力の変化を観察すると図-9 となる。 $\mu_2 = 2/5$  の場合は下弦ケーブルの降伏が、 $\mu_2 = 3/5$  の場合は上弦ケーブルのたるみが先行する。 $\mu_2 = 1/2$  の場合は降伏とたるみがほぼ同時に生じている(図-5 参照)。

### 2.3 基本モデル-III

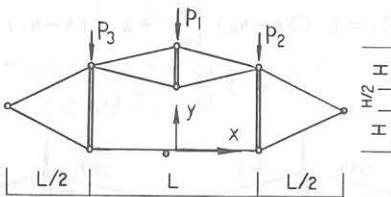


図-10 基本モデル-III

基本モデル-III は図-10 に示すように、基本モデル-I と II とを組み合わせて構成した平面モデルである。ここでは、本モデルを用いて荷重分布の違いによる軸力及び変位分布の差を観察する。荷重分布として次の3種類を採用する。

- (a)  $P_1 = P_2 = P_3$ ; 増分荷重  $\Delta P_1 = 10\text{kg}$
- (b)  $P_2 = P_3 = \frac{2}{3}P_1$ ; 増分荷重  $\Delta P_1 = 15\text{kg}$
- (c)  $P_2 = \frac{1}{3}P_1$ ;  $P_3 = \frac{2}{3}P_1$ ; 増分荷重  $\Delta P_1 = 15\text{kg}$

図-11 ~ 図-16 はポストの縦変位・荷重関係

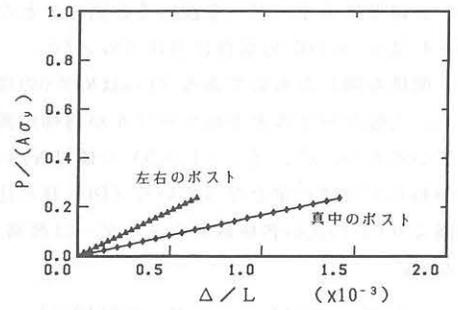


図-11 モデル III(a)の荷重・縦変位曲線

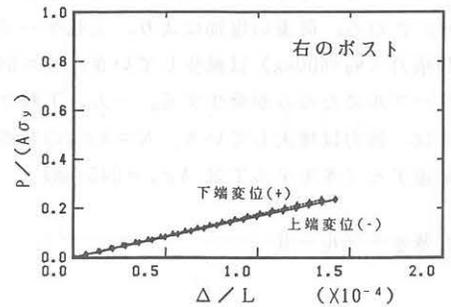


図-12 モデル III(a)の荷重・横変位曲線

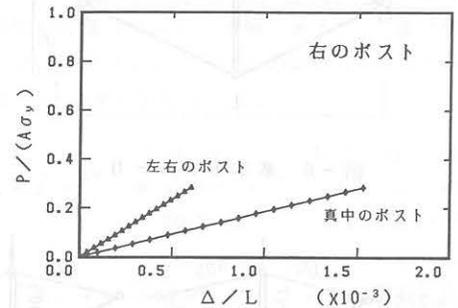


図-13 モデル III(b)の荷重・縦変位曲線

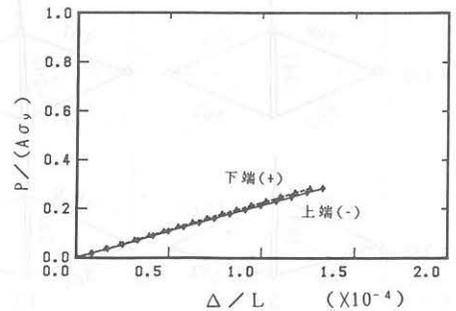


図-14 モデル III(b)の荷重・横変位曲線

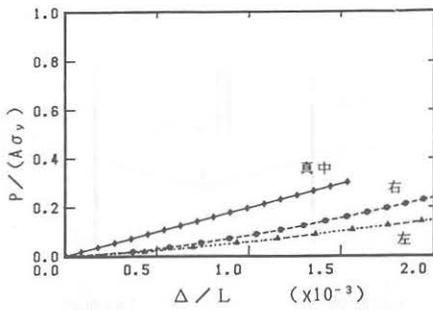


図-15 モデルIII(c)の荷重・縦変位曲線

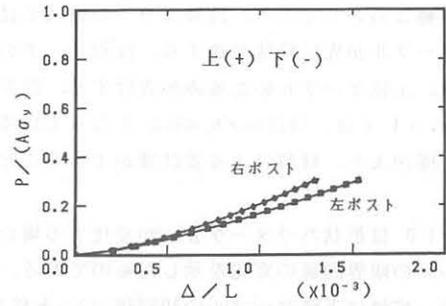


図-16 モデルIII(c)の荷重・横変位曲線

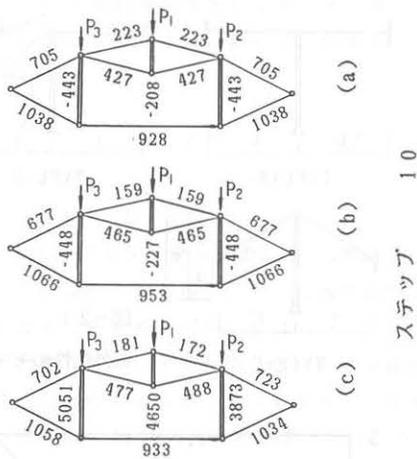


図-17 荷重状態による軸力の変化

および横変位・荷重関係を  $\Delta/L - P/A\sigma_y$  の無次元量で示したものである。図-11～図-14に示すように、対称荷重の場合は荷重と変位の関係は線形となっており、横方向の変位は縦変位のほぼ1/10となっている。非対称荷重の場合(図-15, 図-16)には、やや曲線となっており、左右のポストの縦方向の変位は逆関係となっている。対称荷重の場合は中央ポストの縦変位が大きく、非対称荷重の場合には、左右のポストの変位が大きくなっている。

### 3. たるみと降伏の発生領域

図-6に示す基本モデル-IIを利用して、たるみと降伏の発生領域を検討する。荷重の増加とともに上弦ケーブルの張力は初期張力  $N_1$  から減少し、下弦ケーブルの張力は初期張力  $N_0$  から増大してくる。上弦ケーブルのたるみと下弦ケーブルの降伏のどちらが先に発生するかは、初期張力 ( $N_0, N_1$ )、ケーブルの降伏張力 ( $N_y = A\sigma_y$ )、形状 ( $\mu_1, \mu_2$ ) に

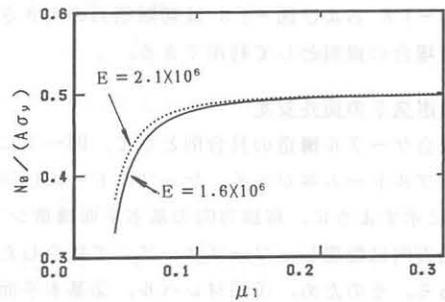


図-18 材料による限界曲線の変化

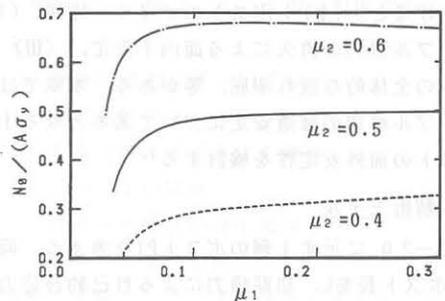


図-19  $\mu_2$  による限界曲線の変化

関係する。上弦ケーブルのたるみと下弦ケーブルの降伏が同時に発生する場合の限界方程式を求めると次式となる。

$$\mu_1^2 \mu_2 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2 \left( 1 + \frac{1}{4 \mu_1^2 \mu_2^2} \right) \frac{N_1}{EA}} \right] = (0.25 + \mu_1^2 \mu_2^2) \frac{N_1}{EA} - \{ 0.25 + \mu_1^2 (1 - \mu_2)^2 \} \frac{N_0 - N_y}{EA} \quad (3-1)$$

図-18は  $\mu_2 = 0.5$  ( $H_1 = H_2$ ) の場合において、2種類の材料  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $1.6 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  に対する限界曲線である。横軸は形状パラメータ  $\mu_1$

で、縦軸は $N_0/N_y$ である。曲線より上の領域では、下弦ケーブルが先に降伏に達する。反対に、下の領域では、上弦ケーブルのたるみが先行する。限界状態は $\mu_1 > 1$  では、ほぼ $N_0/N_y = 0.5$  となっている。また、同図より、材料による差は僅かであることがわかる。

図-19 は形状パラメータ $\mu_2$  が変化する場合 ( $H_1 \neq H_2$ ) の限界曲線の変化を示したものである。この場合、縦軸は下弦ケーブルの初期張力 $N_0$ と降伏張力 $N_y$ の比 ( $N_0/N_y$ ) を示す。 $\mu_2$  が0.5より大きくなると限界曲線は上方向に移動している。

図-18 および図-19 は初期張力の大きさを決める場合の資料として利用できる。

#### 4. ポストの面外安定

複合ケーブル構造の具案例として、図-1 に示すケーブルドーム等がある。ケーブルドームは図-1 (b)に示すように、母線方向の基本平面構造システムを周方向に配置し、フープケーブルで結合したものである。そのため、①部材レベル、②基本平面構造システムレベル、③全体構造システムレベル、の3レベルにおける構造安定問題が生じてくる。代表例をあげると、(I)：ポストのオイラー座屈、(II)：ケーブル張力の消失による面内不安定、(III)：周方向への全体的な捩れ座屈、等がある。本章では複合ケーブル構造の構造安定において基本となる1個のポストの面外安定性を検討する<sup>[2]</sup>。

##### 4.1 解析モデル

図-20 に示す1個のポストP1を考える。荷重をP、ポスト長をL、初期張力による自己釣合応力を図に示すようにR1、D1、P1、R2、D2とする。このポストの面外安定性を考えるため、図-20 (b)を 図-20 (a)に示すように、ポスト上、下端の面外剛性 $K_1$ 、 $K_2$  を有する解析モデルを作成する。 $K_1$ は初期張力を持つケーブルの面外方向への剛性(図-21)であり、 $K_2$ はフープケーブルの剛性である。そのため、通常では $K_2 \gg K_1$ が成立している。

##### 4.2 面外剛性の評価

図-20 の(b)から分かるように、ポストの上端に集まるケーブルは必ずしもポストと直交しているわけではない。そのため、図-22、図-23 に示すように、ポストとケーブルがある角度を有している

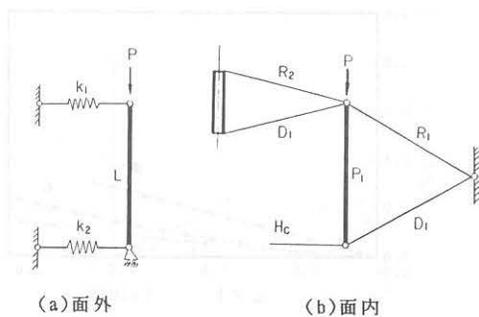


図-20 ポストのモデル化

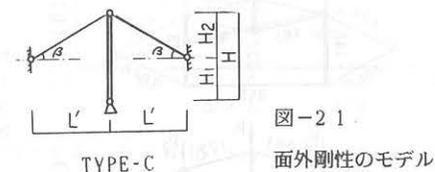
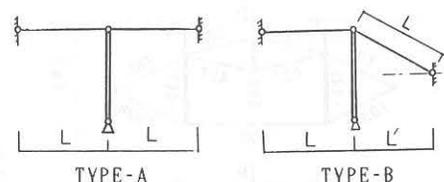


図-21 面外剛性のモデル

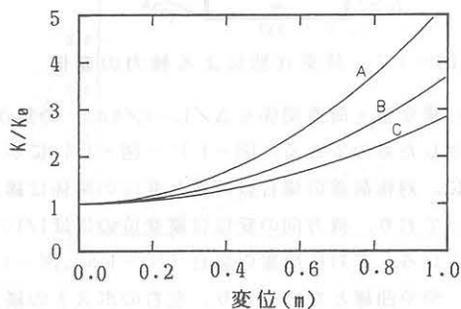


図-22 面外剛性の変化

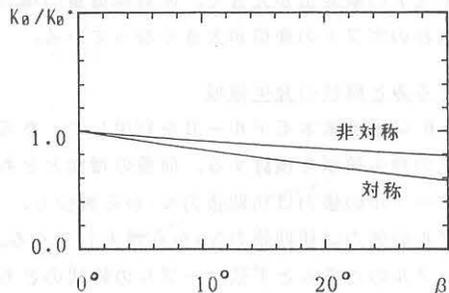


図-23 初期面外剛性と角度 $\beta$ の関係

場合における面外剛性の評価を行い、角度の影響を考慮してみる。

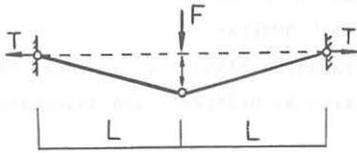


図-24 張力Tを受けるケーブルの変位

まず、図-24に示すように、ポストとケーブルが直交している場合を基準として考える。張力Tを受ける部材長Lのケーブルに対して、荷重Fと変位Δとの関係を求めると

$$F = 2T \sin \theta \approx \frac{2T}{L} \Delta \quad (4-1)$$

上式より、張力Tを受ける1個のケーブルに対しては、 $k_1 = T/L$ となる。

(4-1)式はΔが大きくなるにつれて、非線形となるが、図-22は $H_1 = H_2$ の場合における面外剛性の変化を示したものである。図-23は $H = H_1 + H_2$ を一定として、角度βを変化させた場合の初期面外剛性の変化を図示したものである。ポストとケーブルが直交している場合( $k_1 = T/L$ )を基準として、角度がある場合は

$$k_1 = \alpha \frac{T}{L} = \left(1 - \frac{H_2}{H}\right) \frac{T}{L} \quad (4-2)$$

αは角度に依存する低減係数である。

ポストの上端にN個のケーブルが結合されている場合には

$$k_1 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{T_i}{L_i} \quad (4-3)$$

#### 4.3 面外座屈荷重

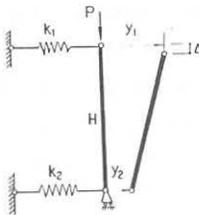


図-25 ポストの面外座屈

図-25に示すように、面外座屈後の上、下端の変位を $y_1$ 、 $y_2$ とすると、軸方向の変位Δは

$$\Delta = \frac{1}{2L} (y_1 - y_2)^2 \quad (4-4)$$

となる。上式を用いると全ポテンシャルエネルギーΠは、

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 - \frac{P}{2L} (y_1 - y_2)^2 \quad (4-5)$$

$\delta \Pi / \delta y_1 = 0$ 、 $\delta \Pi / \delta y_2 = 0$ より固有方程式を作成し、係数マトリクスの行列式の値を零とすることにより座屈荷重は次式で得られることになる。

$$P_{cr} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} L \quad (4-6)$$

$k_1 \ll k_2$ の場合には

$$P_{cr} = \frac{k_1}{k_1 / k_2 + 1} L = (k_1) L \quad (4-7)$$

(4-3)式を代入すると1個のポストの面外座屈荷重は次式となる。

$$P_{cr} = \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{T_i}{L_i} \right] L \quad (4-8)$$

具合例については、文献[2]を参照していただきたい。

#### 5. 結論

本論文では複合ケーブル構造の構造安定性を基本モデルを利用して検討した。その主な内容を箇条書きに示すと

- (1) 荷重の増加に伴う剛性変化
- (2) 非線形性のオーガー
- (3) たるみによる不安定の発生
- (4) ケーブルの降伏
- (5) たるみと降伏の発生領域
- (6) ポストの面外安定

等である。本論文では、平面構造システムレベルを中心として扱っている。今後、全体構造システムレベルの検討が必要であり、その具合例としては、周方向への全体的な捩れ座屈、などがあげられる。

#### 参考文献

[1] I.YAMAGUCHI et al.: <<A Study on the Mechanism and Structural Behaviors of Cable Dome>> Proc. IASS Symposium, Beijing, Oct.1987

[2] 半谷裕彦ほか: 「複合ケーブル構造の構造安定性に関する研究 -ポストの面外安定について-」; 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和63年10月

STRUCTURAL STABILITY OF HYBRID CABLE STRUCTURES  
- INVESTIGATION BY USE OF FUNDAMENTAL MODELS -

Yasuhiko HANGAI\*<sup>1</sup>, Hideki MAGARA\*<sup>2</sup>  
Kiyoshi OKAMURA\*<sup>2</sup> and Xiaoguang LIN\*<sup>1</sup>

SYNOPSIS

Hybrid cable structures, which are constituted of cables, membranes, posts, etc., have the structural characteristics such that tension stresses are transmitted by cables and membranes, and in the other hand, compression stresses are transmitted by posts. Since cables and membranes have no stiffness for compression, initial stiffness has to be given by the introduction of initial tension which satisfies the self-equilibrated stress system. So, the following items are considered to be studied: (1) Determination of configurations which satisfy the self-equilibrated stress system, (2) Estimation of initial stiffness by the introduction of initial tension, (3) Structural behaviours due to loading, and (4) Structural stability in the initial tension state and the loaded state. The items of (1) through (3) are bases for the structural design of hybrid cable structures. However, these items have to be treated under the condition that the considered hybrid cable structure is not in the unstable state.

Based on the above perspective, fundamental behaviours of structural stability for hybrid cable structures are examined in the paper by use of simple models. Main contents are as follows.

- (a) Load-displacement relations considering higher order nonlinear terms and estimate of nonlinear terms,
- (b) Occurrence conditions of slackness and yield of cables,
- (c) structural behaviours under the unsymmetrical loadings, and
- (d) Out-of-plane buckling of a post.

\*1 Institute of Industrial Science, University of Tokyo

\*2 Takenaka Technical Research Laboratory, Takenaka Komuten Co., Ltd.