有限要素法による極小曲面の数値解析

大森　博司[†1]
萩原　伸幸[†2]
松井　徹哉[†3]
松岡　理　[†4]

梗　概

膜構造物の設計曲面の決定に際しての原型曲面を、有限要素法を用いて極小曲面問題を解く立場から論じている。問題を付帯条件付き変分問題とすることによって数値計算過程における高い収束性能が確保できること、汎関数の第二変分を考察することによって多価領域における解の安定性を判別することができること等が示されている。

§1.序文

§1-1.等張力曲面と極小曲面

膜構造は、その曲面内に作用する面内張力によって架構される構造形式であり、膜面に対して鉛直方向に作用する面外せん断力や面外曲げモーメントに対する抵抗力を有しないために、実現可能な曲面形態には自ずから制限がある。そのため設計曲面を決定する際、その原型曲面として等張力曲面が採用される場合が多い。これは自己釣合状態、もしくは等分布圧力を受けた状態において、膜面全域の各点でのすべての方向の面内断面力が等しくなるような曲面で、表面張力により等張力状態が簡単に実現できる石鹸膜による小規模な模型を用いた実験による形状の確認がよく行なわれている。

一方、このような与えられた形状の境界内に形成される等張力曲面は、同一の境界形状に張る様々な曲面の中で極小の表面積を持つ曲面となる。これは極小曲面、あるいは極小面積曲面と呼ばれるものであり、その曲面形状は等張力曲面と完全に同一となる。このような理由から、前述の膜構造物の原型曲面を理論的に求める際の方法に、その等張力状態に着目する方法と極小面積状態に着目する方法の、大別すれば２つのアプローチがある。

等張力状態に着目する方法としては、膜要素による有限要素法を用いた解析過程で、新たにその断面力に方向性がないという条件を収斂過程に付加することにより、強制的に面内断面力を等しく置く方法によるものが多く、各要素間の応力状態がほぼ均一になっている状態では高い収束性が期待できる。こうした方法は既存の幾何学的非線形問題を解析するためのプログラムをわずかに修正するだけで実行できるという長所を持つ一方、解析に当たってのメッシュ分割によっては等張力状態が実現できない場合があるという不便な面も併せ持っている。

一方、目的曲面が極小面積曲面であることを利用する方法では、理論的な筋立ては曲面の表面積を表わす面積汎関数に対して変分法を用いて行なわれるのが通例である。空間内に与えられた閉曲線を境界とする極小面積曲面を求める問題はPlateau問題と呼ばれ、変分法が威力を発揮する古典的問題として広く知られている。変分法における他の問題と同様、この問題も理論的にその閉解が得られる場合はごくまれで、多くは直接法を用いた数値解析によらねばならない。こうした考え方は従来からよく用いられてきており、変分原理に基づくEulerの方程式である非線形偏微分方程式を差分法で解くもの、既述の面積汎関数をFEMを用いて直接極小化するものなどがあり、幾何学的な諸量のみで記述され、理論構成が簡明であるなどの長所を持つ一方、元来強い非線形性をともなう問題で、一般によい収束性を得ることが難しいという短所を持っている。

§1-2.付帯条件付き極小曲面問題

設計に際して、予め設定された幾何形状の境界に張る

[†1] 名古屋大学・助手　[†2] 同・大学院生　[†3] 同・助教授　[†4] 同・教授

原型曲面を求めるに当たり、数値解析の方法としては現段階では有限要素法が最も汎用的で適切な方法であろう。偏微分方程式を直接解析する差分法は、曲面形状の局部的変化にともない生じる大きな勾配に追随することができず、更に解曲面が多価になった場合には原理的に適応することができない。この多価性に追随することができない点ではGalerkin法のような解析対象領域全体に仮定関数を重ね合わせる方法も同様の難点を持っている。有限要素法は形状変化の大小や曲面の多価性のいずれをも問題としない点で有利な手法といえよう。

このようにここで扱っているような、極小曲面を有限要素法を用いて求めようとすることは自然な考え方ではあるが、実際にこれを用いて解析するとき常に支障となるのは解の求め易さ、還元すれば収束性の問題である。

本稿では以上のような観点から、極小曲面を求める方法として、面積汎関数を有限要素法により離散化し極小化を計る際に、汎関数に曲面内包体積や自由境界長さを付帯条件として付け加えることにより安定解を逐次求めることができることを示す。また、境界形状によっては解曲面が複数個存在し、これらの曲面が安定曲面として実際に存在するか否かの判定が、既述の面積汎関数の第二変分の符号により判別できるものであることについても併せて記述する。

§2.付帯条件付き変分問題としての極小曲面問題

§2-1.変分問題の定式化

曲面の包含する内容積値を付帯条件とする極小曲面の変分問題は、次の汎関数を極小化する付帯条件のない変分問題と等価である。

$$J[\vec{r},\lambda] = S(\vec{r}) + \lambda\{V_0 - V(\vec{r})\} \qquad (1)$$

ここに、$\vec{r}$は曲面形状を表わす位置ベクトル、S，Vはそれぞれ曲面の表面積および曲面の内包する体積であり、V_0は指定する包含体積値、λは指定包含体積値を導入するためのLagrange乗数である。後述するようにこのλは求める曲面のGaussの平均曲率（主曲率の相加平均）という幾何学的な意味を持つものとなっている。

一方、石鹸膜により形成される等張力曲面の全ポテンシャルエネルギーを考える。この時、膜面内に生じている張力による歪エネルギーと内圧の成す仕事は、それぞれ曲面の表面積、包含する体積値の増分量に比例するものとなり結果として次のように表わされる。

$$I'(\vec{r}) = T\{S(\vec{r}) - S'_0\} + p\{V(\vec{r}) - V'_0\} \qquad (2)$$

ここに、Pは内圧、Tは曲面内に作用している膜張力、S_0'、V_0'は適当に定められた基準状態における曲面の表面積および包含体積値を表わしている。ここでI＝I'／Tとおくと、(2)式は次式のように書き換えられる。

$$I(\vec{r}) = S(\vec{r}) + \frac{p}{T}\{V(\vec{r})V'_0\} - S'_0 \qquad (3)$$

上式を(1)式と比較すると、P／TはLagrange乗数λに相当することがわかる。(1)式と(3)式は同一の形式の汎関数となっており、従って完全に同一の停留解を持つ。

(1)式をrとλを変分パラメーターとして停留条件を求めると次式を得る。

$$\delta J[\vec{r},\lambda] = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\right)\delta\vec{r} + (V_0 - V)\delta\lambda = 0 \qquad (4)$$

これを解くことにより問題の包含体積値指定の極小曲面を求めることができる。

§2-2.有限要素法による離散化

§2-2-1.軸対称回転曲面の場合の定式化

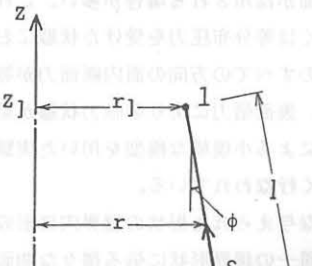


Fig.1 円錐台要素

(1)式に示された汎関数を直接離散化する求解過程として、まず軸対称回転曲面の場合について記述する。離散化は Fig.1 に示すような円錐台要素による有限要素法を用いて行なう。この時、各要素の表面積S_eは次式のように表わされる。

$$S_e = 2\pi\int r(s)ds = 2\pi\int_{z_2}^{z_1} r(z)\sqrt{1+(dr/dz)^2}\,dz \qquad (5)$$

また一つの円錐台要素によって包含される体積V_eは次式で表わされる。

$$V_e = \pi\int_{z_2}^{z_1} r^2(z)dz \qquad (6)$$

(5)式、(6)式を全要素について重ね合わせを行なった上でそれぞれ曲面の全表面積、全内包体積値として(1)式に用いれば最終的に(1)式の離散化表現として次式を得る。

$$J = \sum_e 2\pi\langle r\sqrt{1+(r')^2}\rangle + \lambda\{V_0 - \sum_e \pi\langle r^2\rangle\} \qquad (7)$$

ここに、

$$\langle * \rangle = \int_{z_2}^{z_1} * \, dz \quad , \quad r' = \frac{dr}{dz}$$

次に Fig.1 に示される円錐台要素の両端点の座標(r_i、z_i)を未知量として(7)式の第一変分を計算し、停留条件を求める。各要素内でr(s)およびz(s)が流動座標sについて線形変化するものとすれば、(5)式、(6)式のS_e、V_eはそれぞれ次のように表わされる。

$$S_e = \pi(r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+(z_1-z_2)^2} \qquad (8)$$

$$V_e = \frac{\pi}{3}(z_1-z_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2) \qquad (9)$$

これらの表現を(7)式に用いれば停留条件式として次のような式を得る。

$$\sum_e \{\overline{T}^e\} = \{0\} \qquad V_0 - \sum_e V_e = 0 \qquad (10)$$

ここに、 $\{\overline{T}^e\} = \{T^e\} - \lambda\{T'^e\}$

$$\{T^e\}^t = \pi\{l-(r_1+r_2)\sin\varphi,\ (r_1+r_2)\cos\varphi,\ l+(r_1+r_2)\sin\varphi,\ -(r_1+r_2)\cos\varphi\}$$

$$\{T'^e\}^t = \frac{\pi}{3}\{(z_1-z_2)(2r_1+r_2),\ (r_1^2+r_1r_2+r_2^2),\ (z_1-z_2)(r_1+2r_2),\ -(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)\}$$

§2-2-2.自由境界を含む三次元曲面の場合の定式化

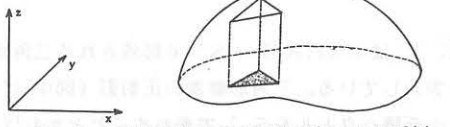


Fig.2 三次元曲面の三角形要素による近似

ここでは、自由にその形状を変化させることのできるいわゆる境界、いわゆる自由境界を含む任意形状の境界が与えられた場合の三次元の極小曲面を三角形要素を用いて求める方法について記述する。曲面を Fig.2 に示すように三角形有限要素の集合で近似することとし、各要素の三つの頂点の空間座標を未知量として前項の軸対称回転曲面で記述したものと同様の方法で定式化を進める。r_iを三角形要素の各節点の位置ベクトルとすれば面積汎関数およびその停留条件式は(1)式、(2)式で表わされる。三角形要素に関する記号および座標を Fig.3 のように定義し、一つの要素の面積S_eおよびその要素の直下のxy平面との間にできる柱状体の体積V_eを三角形要素の各頂点の位置ベクトルr_i($i=1,2,3$)で表わすことを考える。

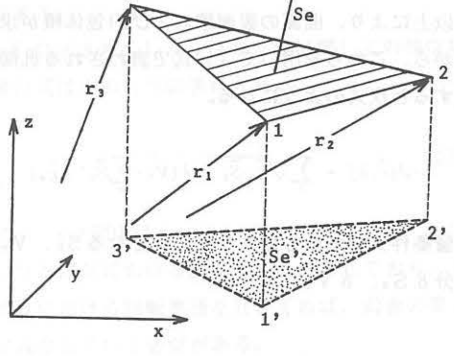


Fig.3 三角形要素の記号と座標

まず、三角形要素の面積ベクトルS_eを次式のように表わすこととする。

$$\vec{S}_e = \frac{1}{2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1+\vec{r}_1\times\vec{r}_2) \qquad (11)$$

また、要素直下の柱状体の体積V_eは、Fig.3 に示されているS_e'がS_eのxy平面への正射影であることにより次式のように簡単に表わすことができる。

$$V_e = V_1+V_2+V_3 \qquad (12)$$

ここに、V_i はi (1,2,3) −S’で形成される三角錐の体積を表わしている。三角形要素の正射影（図中 1'-2'-3'）の面積ベクトルをS_e'で表わすこととすれば、(12)式は次のように表わすことができる。

$$V_e = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\vec{S}_e'\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_i') = \vec{S}_e'\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}(\vec{r}_i-\vec{r}_i') \qquad (13)$$

ここに、 $\frac{1}{3}\vec{r}_i$ は三角形 1-2-3 の重心の位置ベクトルであり、r_i'についても同様のものとなっているから、Δg_eを要素の重心の移動を表わすベクトルとすれば (13)式は次のようにあらわすことができる。

$$V_e = \vec{S}_e'\cdot\Delta\vec{g}_e \qquad (14)$$

ここに、
$$\Delta\vec{g}_e = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(\vec{r}_i-\vec{r}_i')$$

$$\vec{S}_e' = \frac{1}{2}(\vec{r}_2'\times\vec{r}_3'+\vec{r}_3'\times\vec{r}_1'+\vec{r}_1'\times\vec{r}_2') \qquad (15)$$

以上により、曲面の表面積および内包体積が求められたから、これらを用いて (1)式で表わされる汎関数を表現すると次式のようになる。

$$J[\vec{r},\lambda] = \sum_e\sqrt{\vec{S}_e\cdot\vec{S}_e} + \lambda(V_0-\sum_e\vec{S}_e'\cdot\Delta\vec{g}_e) \qquad (16)$$

停留条件式を求めるにあたり必要となるS_e、V_eの第一変分δS_e、δV_eを示せば、

$$\delta S_e = \frac{\vec{S}_e\cdot\delta\vec{S}_e}{S_e}$$

$$= \frac{1}{2}\{\vec{n}\times(\vec{r}_3-\vec{r}_2)\cdot\delta\vec{r}_1+\vec{n}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_3)\cdot\delta\vec{r}_2+\vec{n}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\delta\vec{r}_3\} \qquad (17)$$

$$\delta V_e = \frac{1}{2}\delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_3'-\vec{r}_2')\cdot\delta\vec{r}_1' + \frac{1}{2}\delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_1'-\vec{r}_3')\cdot\delta\vec{r}_2' + \frac{1}{2}\delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_2'-\vec{r}_1')\cdot\delta\vec{r}_3' + \frac{1}{3}S'_e(\delta z_1+\delta z_2+\delta z_3) \qquad (18)$$

ここに、nはS_e方向の単位ベクトル、スカラーS_e'はベクトルS_e'のz方向成分、スカラーδz_iはベクトルδr_iのz方向成分をそれぞれ表わしている。
これらの表式から停留条件式として次式が得られる。

$$\sum_e(\vec{A}_i^e-\lambda\vec{F}_i^e) = \vec{0}$$

$$V_0 - \frac{1}{3}\sum_e S'_e(z^e+z_2^e+z_3^e) = 0 \qquad (19)$$

ここに、

$$\vec{A}_1^e = \frac{1}{2}\vec{n}\times(\vec{r}_3-\vec{r}_2),$$
$$\vec{A}_2^e = \frac{1}{2}\vec{n}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_3),$$
$$\vec{A}_3^e = \frac{1}{2}\vec{n}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$
$$\vec{F}_1^e = \frac{1}{2}\Delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_3'-\vec{r}_2') + \frac{1}{3}\vec{S}_e',$$
$$\vec{F}_2^e = \frac{1}{2}\Delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_1'-\vec{r}_3') + \frac{1}{3}\vec{S}_e',$$
$$\vec{F}_3^e = \frac{1}{2}\Delta\vec{g}_e\times(\vec{r}_2'-\vec{r}_1') + \frac{1}{3}\vec{S}_e' \qquad (20)$$

ここでさらに Fig.4 に示すように曲面の境界が自由境界で与えられている場合を考える。これは実際の問題としてはケーブル境界に対応するものであるが、ここでは幾何学的な諸量のみで議論しているために、その長さのみが既知量として与えられており、中間形状については自由に変化し得る境界として扱われることとなる。

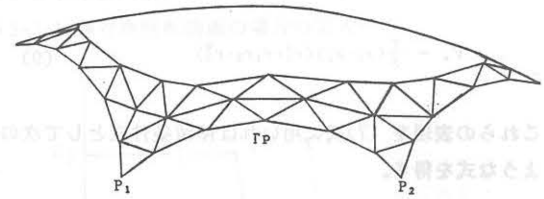


Fig.4 自由境界

いま、自由境界部分の両端点をP_1, P_2として、これらをその端点として持つ曲線をΓpと書くこととする。自由境界部分の辺長が既知であるものとすれば、この条件は次式により表わされることになる。

$$\sum_{e\,on\,\Gamma_p} l_{pe} = l_p \qquad (21)$$

ここに、 $\sum_{e\,on\,\Gamma_p}$ は自由境界Γp上に節点を持つ各要素についての辺長の総和を表わしており、l_{pe}は自由境界Γp上の要素eの節点間距離を表わしている。

(21)式の辺長既知の条件を付帯条件とした極小曲面の面積汎関数は次のように表わされる。

$$L[\vec{r},\lambda,\Lambda_p] = J[\vec{r},\lambda] + \sum_p\Lambda_p(\sum_{e\,on\,\Gamma_p} l_{pe}-l_p) \qquad (22)$$

ここに、右辺第一項は（16)式で表わされる面積汎関数であり、第二項は（21)式の付帯条件を Lagrange の乗数Λ_{θ}により汎関数中に新しく導入したものである。

要素の一辺を自由境界上に持つ三角形要素eのΓ_p上の節点の位置ベクトルをr_{p1}，r_{p2}とすれば、l_{pe}は次のように表わされる。

$$l_{pe} = \sqrt{(\vec{r}_{p1}-\vec{r}_{p2})\cdot(\vec{r}_{p1}-\vec{r}_{p2})} \tag{23}$$

上式の第一変分は次のようになる。

$$\delta l_{pe} = \vec{n}_{pe}\cdot(\delta\vec{r}_{p1}-\delta\vec{r}_{p2}) \tag{24}$$

ここに、

$$\vec{n_{pe}} = \frac{\vec{r}_{p1}-\vec{r}_{p2}}{l_{pe}}$$

従って、（22)式の第一変分は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta J + \sum_p \delta\Lambda_p\Big(\sum_{e\,on\,\Gamma_p} l_{pe}-l_p\Big) + \sum_p\Big(\Lambda_p\cdot\sum_{e\,on\,\Gamma_p}\delta l_{pe}\Big)\\ &= \sum_e(\vec{A}_i^e-\lambda\vec{F}_i^e)\cdot\delta\vec{r}_i^e + \sum_p\Lambda_p\Big\{\sum_{e\,on\,\Gamma_p}(\vec{n}_{pe}\cdot\delta\vec{r}_{p1}-\vec{n}_{pe}\cdot\delta\vec{r}_{p2})\Big\}\\ &+\Big\{V_0-\frac{1}{3}\sum_e S'_e(z_1^e+z_2^e+z^e{}_3)\Big\}\delta\lambda + \sum_p\Big\{\Big(\sum_{e\,on\,\Gamma_p} l_{pe}-l_p\Big)\delta\Lambda_p\Big\}\end{aligned} \tag{25}$$

ここに、$\vec{A}_i^e$ ，$\vec{F}_i^e$ は（22)式で与えられているものと同一である。結局自由境界の辺長と内包体積値が指定されている場合の面積汎関数（22)式の停留条件式は次のように表わされることとなる。

一般点：

$$\sum_e(\vec{A}_i^e-\lambda\vec{F}_i^e) = \vec{0} \tag{26-1}$$

点iがp_1と一致するとき：

$$\sum_{e\,on\,\Gamma}(\vec{A}_i^e-\lambda\vec{F}_i^e+\Lambda_p\cdot\vec{n}_{pe}) = \vec{0} \tag{26-2}$$

点iがp_2と一致するとき：

$$\sum_{e\,on\,\Gamma}(\vec{A}_i^e-\lambda\vec{F}_i^e-\Lambda_p\cdot\vec{n}_{pe}) = \vec{0} \tag{26-3}$$

内包体積条件式：

$$V_0 - \frac{1}{3}\sum_e S'_e(z_1^e+z_2^e+z_3^e) = 0 \tag{26-4}$$

自由境界長条件式：

$$\sum_{e\,on\,\Gamma_p} l_{pe}-l_e = 0 \tag{26-5}$$

§2-3.極小曲面の多価性と安定性

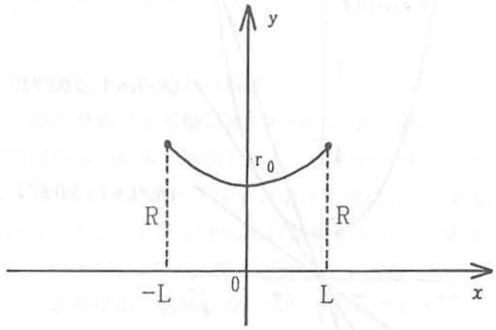


Fig.5　y 軸について対称なカテナリー

Fig.5 に示すようなA，Bの二つの点に重力下でケーブルをわたしてできるカテナリーをx軸回りに回転させて得られるカテノイドは、軸対称回転極小曲面となる。本項ではこれを用いて極小曲面の多価性と安定性について記述する。

Fig.5 に示されているようなy軸に関して対称な場合の曲線の式は次のように表わされる。

$$y(x) = r_0\cosh\frac{x}{r_0} \tag{27}$$

ここに、r_0は図中にも示されているようにカテノイドの中央くびれ部分における回転半径を表わしており、A，B両端点における回転半径をRとすれば、両者の間には次式が成立している必要がある。

$$R = r_0\cosh\frac{L}{r_0} \tag{28}$$

ここに、LはA点、B点の中央点との距離を表わしている。（28)式でL／r_0＝ξとすれば

$$\frac{R}{L}\xi = \cosh\xi \tag{29}$$

この超越方程式の解は、Fig.6 に示すグラフの交点で表わされることとなる。この図からR／Lの値に応じて、２つのグラフ間に交点が存在する領域と存在しない領域があることがわかる。さらに交点が存在するR／Ln領域では、２つのグラフが接する特別の場合を除いて常に２個の交点が存在することもわかる。

（27)式を実際に解いて解を図示したものを Fig.7 に示

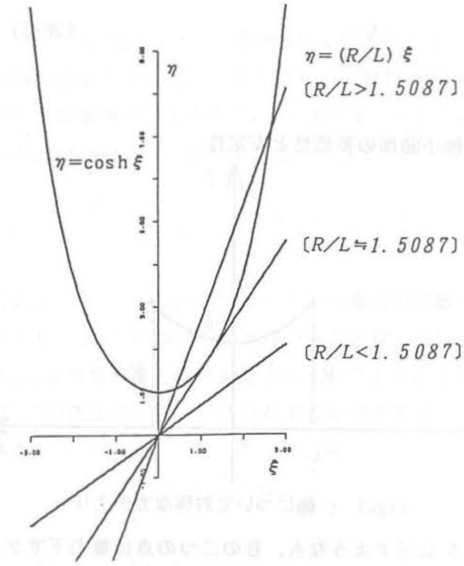


Fig.6 超越方程式の解の様子

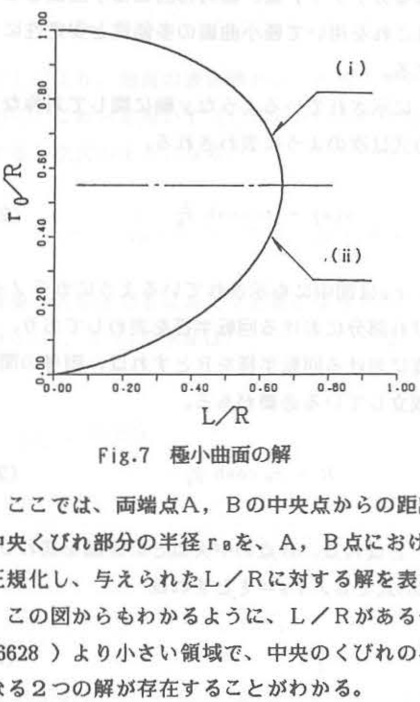


Fig.7 極小曲面の解

す。ここでは、両端点Ａ，Ｂの中央点からの距離Ｌおよび中央くびれ部分の半径r_0を、Ａ，Ｂ点における半径Ｒで正規化し、与えられたＬ／Ｒに対する解を表わしている。この図からもわかるように、Ｌ／Ｒがある一定値（ 0.6628 ）より小さい領域で、中央のくびれの半径r_0が異なる２つの解が存在することがわかる。

ところで、このカテノイドはもともと面積汎関数を停留させることにより得られるものであり、その停留解が極小か、極大かを判別するためには、汎関数の第二変分による判定が必要となる。これを実際に実行してみる。

まず、ここで問題にしている極小曲面の面積汎関数は次式により与えられる。

$$I = 2\pi \int_{-L}^{L} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (30)$$

この汎関数の第二変分$\delta^2 I$は次のように表わされる。

$$\delta^2 I = 2\pi\int_{-L}^{L}\left[\frac{2y'\delta y\delta y'}{\{1+(y')^2\}^{1/2}} + \frac{y(\delta y')^2}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}\right]dx \qquad (31)$$

ここで許容関数δyとして次のようにとることができる。

$$\delta y = r_0\cosh\frac{x}{r_0} - R \qquad (32)$$

δyのとり方は$\delta y(L) = \delta y(-L) = 0$の条件を満足しさえすれば何でもよく一意ではないが、仮に以下で$\delta^2 I < 0$が導かれれば、着目している停留解は極大解であることが結論される。

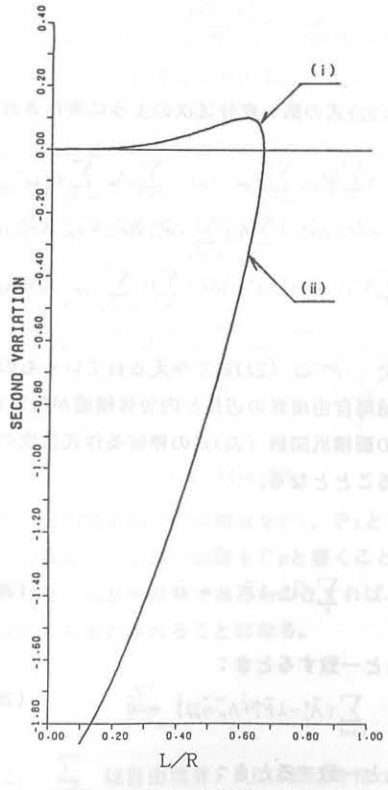


Fig.8 解が二価となる領域での第二変分の様子

停留解の極大、極小を論ずるために、ｙ（ｘ）として(25)式を、δy（ｘ）として(32)式を採用し、これらを(28)式に用いればこの場合の第二変分の値として次の結果を得る。

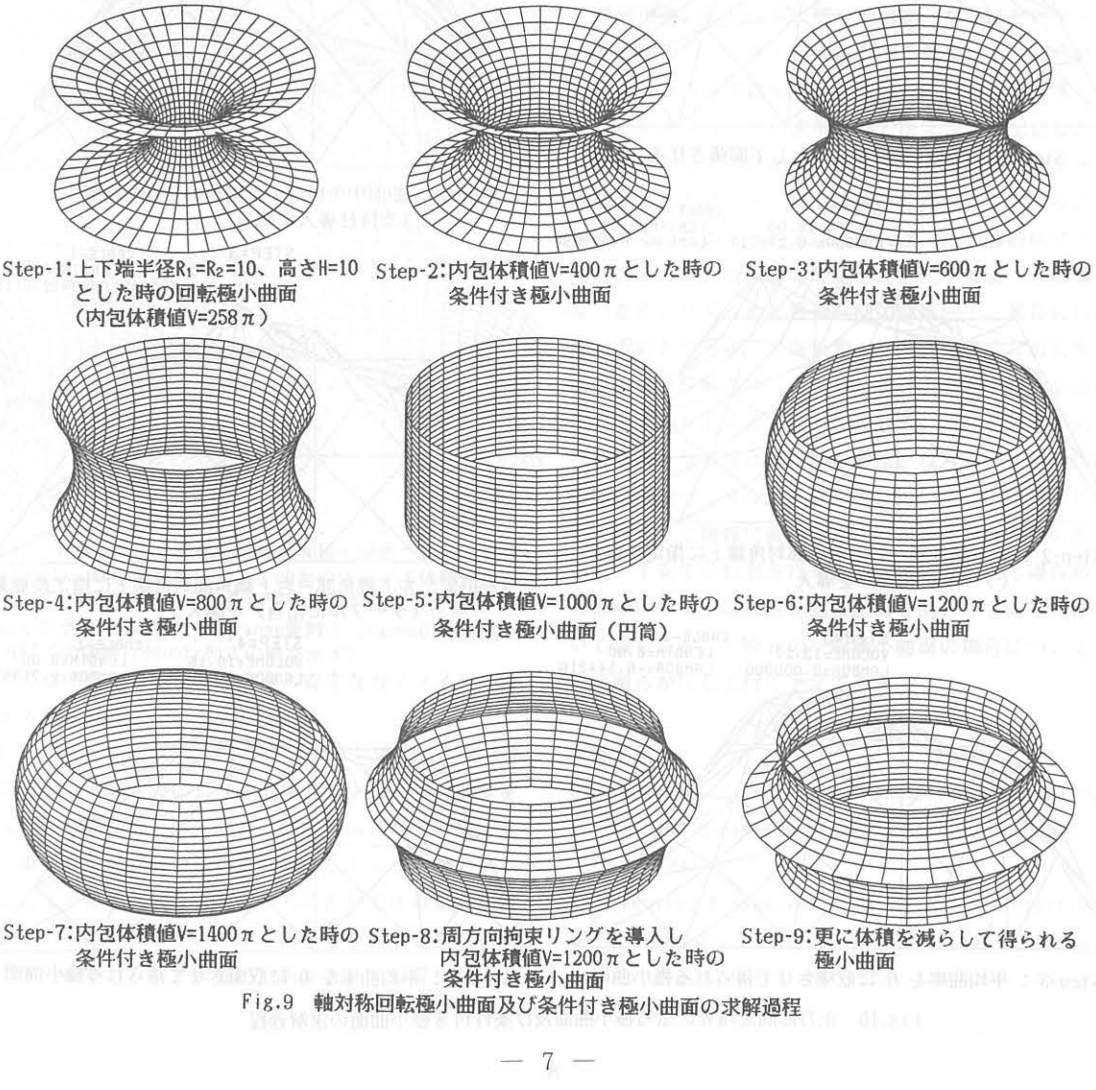
$$
\begin{aligned}
\delta^2 I = 4\pi\Big[& \bar{r}_0^2 \sinh\frac{\bar{L}}{\bar{r}_0}\cosh\frac{\bar{L}}{\bar{r}_0}\left(1-\operatorname{sech}^2\frac{\bar{L}}{\bar{r}_0}\right) \\
& + \bar{4}r_0\left\{\tan^{-1}\left(\tanh\frac{\bar{L}}{2\bar{r}_0}-\frac{\tanh(\bar{L}/2\bar{r}_0)}{1-\tanh^2(\bar{L}/\bar{r}_0)}\right\}\Big]
\end{aligned}
\tag{33}
$$

これを、Fig.7 に示されている解に対応して計算して図示すれば Fig.8 のようになる。図中（i)、(ii）はそれぞれ Fig.7 の図中の記号に対応しており、二価となっている領域において、(i）は中央部のくびれの大きい方、(ii）はその半径が小さい方の解曲面に対応している。この図から、(ii）の解曲面は第二変分が負となり、したがって面積汎関数の極大停留解であることを示している。ここで扱っている汎関数は曲面の表面積に関するものであり、力学現象での全ポテンシャルエネルギーの極小性に見られるような明確な原理は存在しないが、§1-2 でも記述したような力学現象との等価性を勘案すれば、この極大停留解は不安定な解と見なすことができよう。これは石鹸膜によるカテノイドが、与えられたＬ／Ｒに対して常に同一のものが得られるという実験事実に対応している。

§3.有限要素法を用いた数値解析

§3-1.円錐台要素による軸対称回転極小曲面の解析

軸対称回転極小曲面の解析として、端部の半径R_1，R_2とそれらの距離Ｈがすべて等しい場合を例にとって数値解析を行なった。Fig.9 にその解析結果を示す。計算は interactive に各ステップ間で収束状況を観察しつつ種々の条件を適宜付加、削除しながら行なわれている。ここに示した例についての計算諸元は要素数１０、総自由度２２で各ステップ間の計算には２～３回の収斂計算が行なわれている。



Step-1:上下端半径$R_1=R_2=10$、高さH=10とした時の回転極小曲面（内包体積値V=258π）

Step-2:内包体積値V=400πとした時の条件付き極小曲面

Step-3:内包体積値V=600πとした時の条件付き極小曲面

Step-4:内包体積値V=800πとした時の条件付き極小曲面

Step-5:内包体積値V=1000πとした時の条件付き極小曲面（円筒）

Step-6:内包体積値V=1200πとした時の条件付き極小曲面

Step-7:内包体積値V=1400πとした時の条件付き極小曲面

Step-8:周方向拘束リングを導入し内包体積値V=1200πとした時の条件付き極小曲面

Step-9:更に体積を減らして得られる極小曲面

Fig.9　軸対称回転極小曲面及び条件付き極小曲面の求解過程

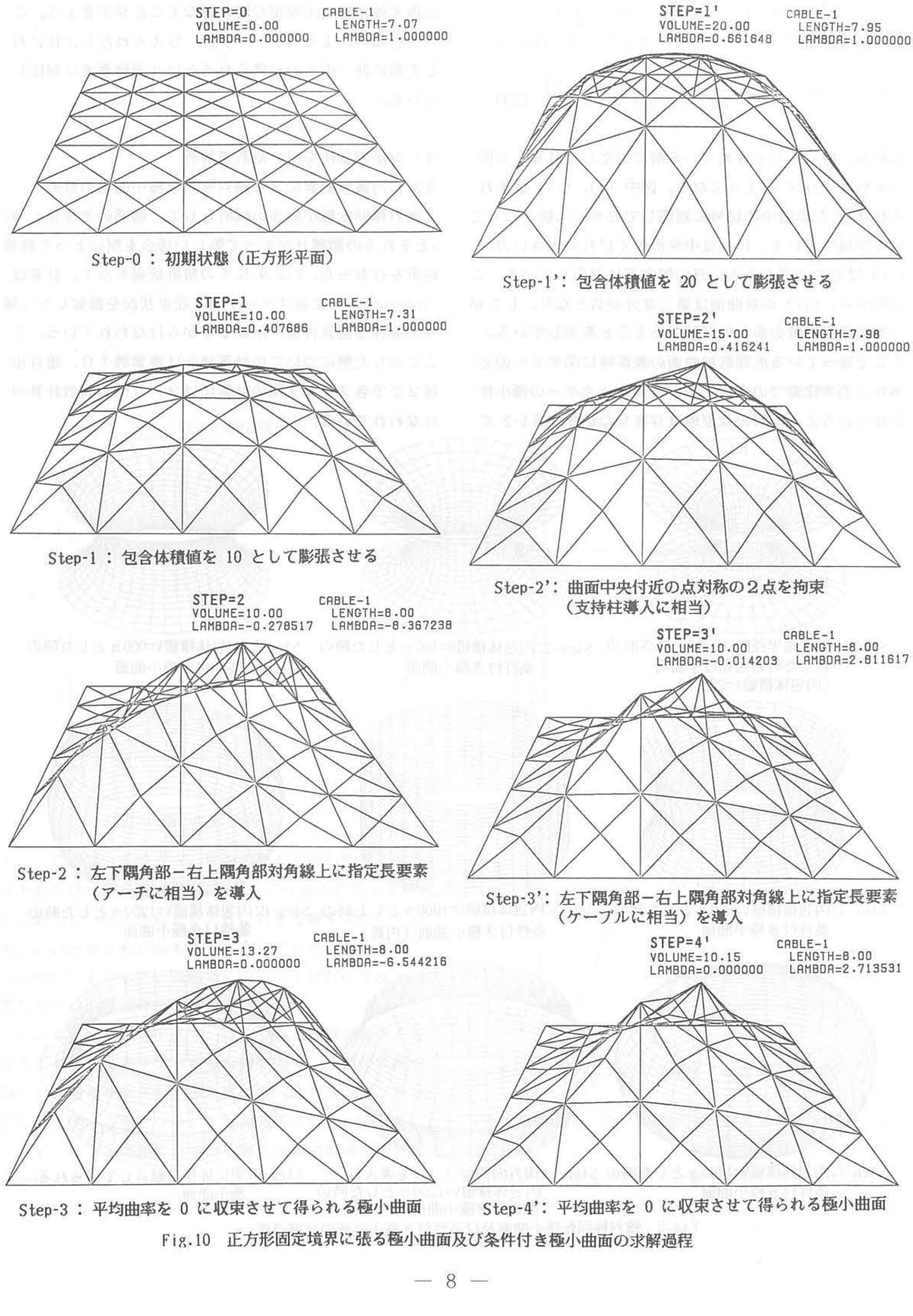


Fig.10 正方形固定境界に張る極小曲面及び条件付き極小曲面の求解過程

§3-2.三角形要素による三次元極小曲面の解析

三次元の極小曲面の解析例として、正方形平面を持つ境界に張る極小曲面の解析結果を Fig.10 に示す。前項の軸対称回転曲面の場合と同様、計算は各ステップで逐一収束状況を観察しながら行なわれている。

§3-3.面積汎関数の第二変分と極小曲面の安定性

前項§2-3 ではカテノイドの極大極小停留解について記述したが、ここでは§2-2-1で示した一般の軸対称回転曲面について検討を加えてみる。数値解析においては第二変分の正負の符号は (10) 式の非線形代数方程式を変分して得られる修正方程式の係数行列の行列式の値により判定することができる。Fig.11 にその計算例を示す。

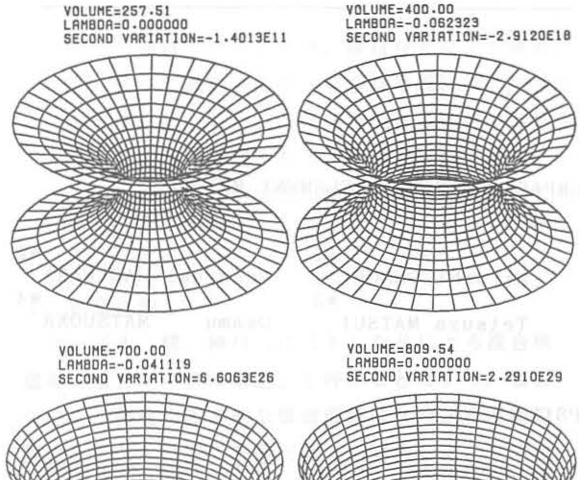


Fig.11 不安定な極小曲面から安定な極小曲面への移行過程
(Fig.7の２つの極小曲面解について曲面の包含する体積値を制御パラメーターとして安定解を探索している。各図の下の値はそれぞれ曲面が包含する体積値、Lagrange乗数λ (Gaussの平均曲率)、修正方程式の係数行列の行列式の値を示す)

ここでは不安定なカテノイドから安定なカテノイドへ移行する計算過程について示している。

Fig.12 は Fig.11 の第1ステップに示されている不安定な極小曲面を中央のレベルに周方向拘束のケーブルを導入した状態を表わしている。図中に示されているように、第二変分の値は負から正に変化しており、ケーブル導入により極小曲面を安定化することができる事実を表わしている。見方を変えれば、上半分の安定な極小曲面と下半分のやはり安定な極小曲面を互いに影響しないように境界の条件を保持したまま接続したものとも考えることができる。

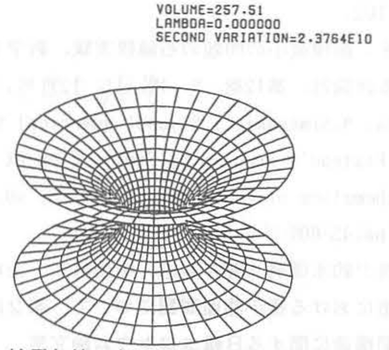


Fig.12 境界条件の変更により得られる安定化された極小曲面
(中央くびれ部分に拘束ケーブルを導入したもの。Fig.11の第一ステップの解と同一の形状でありながら、第二変分の値が負から正に変化している)

§4.結語

膜構造物の形状決定に際して必要となる原型曲面を求める方法として、極小曲面を求める立場から、有限要素法により面積汎関数を直接離散化し、付帯条件を導入することにより安定的に求解する方法について記述した。付帯条件としての自由境界長や曲面の内包体積値を逐一制御することにより、種々の極小曲面形状を求めることができる。このような手法によれば、応力解析法による場合のような、有限要素の変形に抵抗するような機構がないため、与えられた要素分割の精度内で、最良の目的曲面近似となるように各要素が空間内に自由に再配置されるという性質を持っており、等張力状態を目的曲面探索の手がかりとする手法と比較して、特に目的曲面の形状が複雑となる場合に便利な方法となろう。また、曲面の実現可能性、すなわち安定性については、境界形状などに依存して複雑に変化することが考えられ、その都度安定、不安定の判別を行なうことが必要となる場合があり得る。ここでは軸対称回転曲面を例として安定性について論じたが、三次元の一般極小曲面の場合についても今後明らかにして行く予定である。

参考文献

1) R.Courant: Dirichlet's Principle, Conformal Mapping ang Minimal Surface, Interscience, 1950, pp.95-139.

2) J.Kunita, H.Nakajima, T.Kunugi: An Interactive Shape Finding Analysis for Cable and Membrane Structures, Shells, Membranes and Space Frames,

Proceedings IASS Symposium, Osaka, 1986, Vol.2, pp.95-102.
3) 佐藤幸平：面積最小の問題の石鹸膜実験、数学セミナー、日本評論社、第12巻、9、10、11、12月号.
4) M.Hinata, M.Simasaki, T.Kiyono: Numerical Solution of Plateau's Problem by Finite Element Method, Mathematics of Computation, Vol.28, NO.125, 1974, pp.45-60.
5) 本間俊雄、鈴木俊男、荒井高志、中山昌尚、板根伸夫：膜構造における極小曲面問題について、第２回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集、１９８７、pp.111-118.
6) 大森博司、萩原伸幸、松井徹哉、松岡理：張力構造に関する基礎的考察－極小曲面の数値解析－、第２回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集、１９８７、pp.119-126.
7) 大森博司、萩原伸幸、松井徹哉、松岡理：張力構造に関する基礎的研究（その１：極小曲面問題の直接的な数値解析）、日本建築学会大会学術講演梗概集、１９８７、pp.1197-1198.
8) 大森博司、萩原伸幸、松井徹哉、松岡理：張力構造に関する基礎的研究（その２：極小曲面の安定性について）、日本建築学会大会学術講演梗概集、１９８８、1329-1330.

NONLINEAR ANALYSIS OF MINIMAL SURFACE BY FINITE ELEMENT METHOD

Hiroshi OHMORI *1　　Nobuyuki HAGIWARA *2
Tetsuya MATSUI *3　　Osamu MATSUOKA *4

SYNOPSIS

Numerical analysis scheme by the finite element method for the minimal surface, which has to be obtained as the initial surface to determine the design shape for membrane or tension structures, are mainly discussed. Introduction of the suitable subsidiary condition into the area functional is shown to be able to refine the convergence characteristics in the iteration process. As the subsidiary condition, the inside volume of the obtained surface and the length of the prescribed part on the surface are adopted. Multi-valued solution of the minimal surface is also discussed, where the second variation of the functional is shown to be able to be used for discrimination of the stability of the minimal surface solutions.

*1. Research Associate, Nagoya University
*2. Graduate Student, Nagoya University
*3. Associate Professor, Nagoya University
*4. Professor, Nagoya University