

膜構造の形状解析の線形理論について

安宅 信行

概 要

膜構造やケーブル構造の初期の釣り合い形状を見いだす問題は形状解析問題と言われ、非線形の定式化が行われ、これを繰り返し演算によって大型計算機を用いて解かれてきた。しかし、問題によっては必ずしも非線形計算をする必要のない問題も数多く存在する。特に、最近ではパーソナルコンピュータの普及によって身近なところでこれらの機器を利用できるようになってきた、しかし、これらの機器も記憶容量や計算時間の点で、まだ多くの制約から、より簡略な計算法が望まれる。形状解析問題についてもその意味において線形計算法の確立が望まれている。そこで、本論文では線形理論の可能性と0次弾性体の概念を導入することによって合理的な線形理論の展開を行なう。また、ここで求めた線形理論とこれまで用いられている非線形理論との関係を明らかにする。

1. はじめに

テンション構造の形状解析問題はこれまで非線形問題として扱われてきており、その解析手法は一応定着してきている。しかし、形状解析は設計の基本の釣合形状を決定するためにエスキス段階から何度か形状解析を行う必要がある。ここでは

- (1) 多少の誤差があっても、解析が容易で手軽に結果が得られること。すなわち、パーソナルコンピュータなどを使用して短時間に処理結果が得られ、それをグラフィックな表現で表示することができること。
- (2) 一度得られた結果を用いて、これに倍率を乗ずることによって異なった条件の形態を容易に類推することができること。

などが求められている。

このような要求に対し、線形理論に基づき解析法は適しているが、非線形理論に基づき解析法は適していない。しかし、膜構造の形状解析の線形理論、特に数値解析的な解法はこれまであまり検討されてきていな

いようである。

非線形理論が用いられる最大の理由は本来線形では表現できない非線形現象を記述するためと、計算精度を高めるためとが考えられる。

たとえば、大変形を伴う構造物の応力・変形解析において非線形項を考慮することは、計算精度を高めることよりも、この項を考慮しなければ解析できないためである。

一方、形状解析において非線形項を考慮することは、後に示すように非線形形状を記述するためというよりも、むしろ、計算精度を高めることが目的であり、この項がなければ解析できないということはない。

しかし、設計のエスキス段階では精度よりも曲面を概括的に早くとらえることの方が重要であり、これによって定まった曲面の精度を上げたければ、必要に応じて非線形解析を行えばよい、その際、線形解の曲面を初期値として用いればよい。

そこで、本論文では、上述の諸条件を考慮して、膜構造の形状解析の線形理論について考察する。

2. 膜構造の形状解析の線形理論

2.1 偏平な曲面

理論を分かりやすくするために、先ず偏平な曲面について検討する。

形態安定後の曲面の任意の点の位置ベクトルを次のように表す。

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z(x, y) \mathbf{e}_3 \quad \dots\dots(2.1)$$

ここに、

\mathbf{r} : 形態安定後の曲面の任意の点の位置ベクトル

x, y, z : 直交座標系とする。

このとき、内圧 p を受け、膜張力 n の等応力の曲面を決定する汎関数は次のように表される。

$$\Phi = \iint \left\{ n \sqrt{A} + p z(x, y) \right\} dx dy \quad \dots\dots(2.2)$$

ここに、

$$\sqrt{A} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

$$z_x = \partial z / \partial x \quad z_y = \partial z / \partial y$$

は形態安定後の膜の面積要素を意味する。また、ここで、変分を受ける独立な量は z である。

この式を通常の有限要素法の手法に基づいて定式化することができる、この解法は一節点一自由度となり、これまでの一節点三自由度のものとは異なりかなり解き易くなっている。これは一種の不等間差分法的な解き方になっている。しかし、これらの基本方程式はいずれも非線形の方程式になっている。

さて、この汎関数を停留にする z は次の Euler-Lagrange の方程式を満足する。

$$n \frac{\Delta z + L(z)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}^3} = p \quad \dots\dots(2.3)$$

ここに、 $\Delta z = z_x^2 + z_y^2$

$$L(z) = z_x^2 z_{yy} - 2 z_x z_y z_{xy} + z_y^2 z_{xx}$$

$$z_{xx} = \partial^2 z / \partial x \partial x$$

$$z_{yy} = \partial^2 z / \partial y \partial y$$

$$z_{xy} = \partial^2 z / \partial x \partial y$$

これは、非線形の方程式となる。文献 4) ではこれを差分法を用いて解いている。

ここで、高次の項を無視し、線形化すると次のような Poisson の方程式が得られる。

$$\Delta z = p/n \quad \dots\dots(2.4)$$

また、内圧 p が存在しなければ、

$$\Delta z = 0 \quad \dots\dots(2.5)$$

となり、これは Laplace の方程式となっている。

これらの式は古くからポテンシャル問題として応用数学の分野で解析的にもまた、数値的にもよく研究されている。

さて、この問題は有限要素法でも、また、境界要素法でも解けることが分かっている。以下にこれを簡単に定式化しておく。ただし、Laplace の方程式は Poisson の方程式の特殊な場合に相当し、この中に含まれるので、ここでは Poisson の方程式のについてのみ検討する。

(1) Poisson の方程式の有限要素法による解法

Poisson の方程式を基にしてこの汎関数を求めると一般に、次のように表される。

$$\Phi = \iint \left\{ (1/2) n [z_x^2 + z_y^2] + p z(x, y) \right\} dx dy \quad \dots\dots(2.6)$$

この汎関数を停留にする Euler-Lagrange の方程式は Poisson の方程式となる。

さて、有限要素法ではこれを基にして定式化される。

このとき、基本方程式は線形の連立方程式がえられる。

(2) Poisson の方程式の境界要素法による解法

Poisson の方程式 (2.4) と Γ_1 境界における境界条件

$$z = z_0 \quad \dots (2.7)$$

および、 Γ_2 境界における境界条件

$$q = q_0 \quad \dots (2.7)$$

に対する重み付き残差表示は

$$\begin{aligned} & - \iint (p/n) w dx dy \\ & + \iint [z_x^2 + z_y^2] w dx dy \\ & = \int [q - q_0] w d\Gamma_2 \\ & - \int [z - z_0] (\partial w / \partial \nu) d\Gamma_1 \end{aligned} \quad \dots (2.8)$$

ここに、 w : 重み関数 ν : 境界での法線方向
 Γ_1 : z が規定されている境界
 Γ_2 : $q = \partial z / \partial \nu$ が規定されている境界

式 (2.8) の第二項を二回部分積分すると、

$$\begin{aligned} & - \iint (p/n) w dx dy \\ & + \iint [w_x^2 + w_y^2] z dx dy \\ & = - \int q_0 w d\Gamma_2 - \int q w d\Gamma_1 \\ & + \int z (\partial w / \partial \nu) d\Gamma_2 \\ & + \int z_0 (\partial w / \partial \nu) d\Gamma_1 \end{aligned} \quad \dots (2.8)$$

となる。ここで、次の方程式

$$\Delta z^* = \delta_i \quad \dots (2.9)$$

を満足する解を基本解 z^* とする、いま、重み関数 w の代わりにこの基本解 z^* を用いると、

$$\begin{aligned} & \iint [w_x^2 + w_y^2] z dx dy \\ & = - \iint \delta_i z dx dy = -z_i \end{aligned} \quad \dots (2.10)$$

ここに、 z_i は単位ポテンシャルを作用させた点における座標関数 z の値である。

ここで、基本解は次のようになる。

$$z^* = (1/2\pi) \ln(1/r) \quad \dots (2.11)$$

このようにすることによって、最終的には

$$\begin{aligned} & a_i z_i + \iint (p/n) w dx dy \\ & + \int z q \cdot d\Gamma_2 + \int z_0 q \cdot d\Gamma_1 \\ & = \int q_0 z \cdot d\Gamma_2 + \int q z \cdot d\Gamma_1 \end{aligned} \quad \dots (2.12)$$

ここで、

$$a_i = \begin{cases} 1 & : i \text{ が領域内のとき} \\ 1/2 & : i \text{ が境界上のとき} \\ 0 & : i \text{ が領域外のとき} \end{cases}$$

となる。これによって荷重項以外は全て境界の積分に変換されたことになる。これを用いて境界を要素分割することにより離散化される。すなわち、

$$\begin{aligned} & (1/2) z_i + \iint (p/n) w dx dy \\ & + \sum \int z q \cdot d\Gamma_2 + \sum \int z_0 q \cdot d\Gamma_1 \\ & = \sum \int q_0 z \cdot d\Gamma_2 + \sum \int q z \cdot d\Gamma_1 \end{aligned} \quad \dots (2.13)$$

となる。これを整理すると、各境界点 i に対して、次のようになる。

$$B_i + \sum_j H_{ij} z_j = \sum_j G_{ij} q_j \quad \dots (2.14)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 B_i &: \text{荷重項} \\
 H_{ij} &: H_{ij} = H_{0ij} \quad (i \neq j) \\
 H_{ii} &= H_{0ii} + (1/2) \quad (i = j)
 \end{aligned}$$

となる。未知量が全て左辺にくるように並べ換えて、

$$AX = F \quad \dots (2.15)$$

ここに、Fの項には荷重項Bを含んでいる。

なお、式(2.15)は線形の連立方程式になっている。このように境界上でz, qの値が定まると、領域内の任意の点iの座標値z_iは次式より決定される。

$$z_i = \sum_j G_{ij} q_j - \sum_j H_{ij} z_j - B_i \quad \dots (2.16)$$

2.2 一般曲面(膜構造)の線形理論

これまで述べられている形状解析の手法は簡便であり、容易に結果が得られる点で優れている。しかし、x, yは固定されており、もし、境界がこれらの方向に移動する場合、たとえば、境界にケーブルがは入っているような場合には、境界点はx, y方向に移動するので、上で説明したような手法は適用することはできない。このような問題にも広く適用できる一般的な手法を考えてみよう。

文献5の中で説明しているように、形状解析問題は0次弾性体の静的釣合問題あるいは定常問題に相当することがわかっているから、ここでは0次弾性の連続体の静的釣合問題として解析を進める。

0次弾性体の単位質量当りに蓄えられるひずみエネルギーWは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 W &= H^{ab} \gamma_{ab} \\
 &= H^{11} \gamma_{11} + H^{22} \gamma_{22} + 2 H^{12} \gamma_{12}
 \end{aligned} \quad \dots (2.17)$$

ここに、 H^{ab} : 0次弾性係数(既知量)
 γ_{ab} : ひずみ

このとき、ひずみは形状(座標)を用いて次のように

表される。

$$\gamma_{ab} = (1/2) (A_{ab} - \delta_{ab}) \quad \dots (2.18)$$

ここに、 $\delta_{ab} = 1 \quad (a = b)$
 $= 0 \quad (a \neq b)$

はKronecker's Deltaである。また、 A_{ab} は最終的に安定した曲面の基本計量テンソルで、座標関数を用いて次のように表現される。

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 \\
 A_{22} &= X_y^2 + Y_y^2 + Z_y^2 \\
 A_{12} &= X_x X_y + Y_x Y_y + Z_x Z_y
 \end{aligned} \quad \dots (2.19)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 X_x &= (\partial X / \partial x) & X_y &= (\partial X / \partial y) \\
 Y_x &= (\partial Y / \partial x) & Y_y &= (\partial Y / \partial y) \\
 Z_x &= (\partial Z / \partial x) & Z_y &= (\partial Z / \partial y)
 \end{aligned} \quad \dots (2.20)$$

このとき、ひずみは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= (1/2) (X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 - 1) \\
 \gamma_{22} &= (1/2) (X_y^2 + Y_y^2 + Z_y^2 - 1) \\
 \gamma_{12} &= (1/2) (X_x X_y + Y_x Y_y + Z_x Z_y)
 \end{aligned} \quad \dots (2.21)$$

なお、このとき、初期の曲面は平面で、その位置ベクトルは次のように

$$r_0 = x e_{01} + y e_{02} \quad \dots (2.22)$$

表し、また、最終曲面は未知の形状(座標)X, Y, Zをパラメーターx, yを用いて表すとすると、そのときの位置ベクトルは次のようになっている。

$$r = X(x, y) e_1 + Y(x, y) e_2 + Z(x, y) e_3 \quad \dots (2.23)$$

このとき、最終曲面の面積要素は

$$\sqrt{A} = \sqrt{A_{11}A_{22} - (A_{12})^2} \quad \dots\dots(2.24)$$

ここで、式(2.19)を用いて計算すると、

$$A = (Y_x Z_v + Z_x Y_v)^2 + (Z_x X_v + X_x Z_v)^2 + (X_x Y_v + Y_x X_v)^2 \quad \dots\dots(2.25)$$

となる。それゆえ、式(2.17)で与えられる0次弾性体の単位質量当りに蓄えられるひずみエネルギー W は形状(座標)を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} W &= H^{ab} \gamma_{ab} \\ &= H^{11} \gamma_{11} + H^{22} \gamma_{22} + 2H^{12} \gamma_{12} \\ &= (1/2) \{ H^{11} (X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 - 1) \\ &\quad + H^{22} (X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 - 1) \\ &\quad + 2H^{12} (X_x X_v + Y_x Y_v + Z_x Z_v) \} \quad \dots\dots(2.26) \end{aligned}$$

さて、全ひずみエネルギーはこれを最終的に得られる曲面の全領域について積分することによって得られ、

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \iint W \sqrt{A} dx dy \\ &= \iint H^{ab} \gamma_{ab} \sqrt{A} dx dy \quad \dots\dots(2.27) \end{aligned}$$

一方、圧力ポテンシャルとして、

$$\Phi_p = \iint p \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sqrt{A} dx dy \quad \dots\dots(2.28)$$

を用いる、ここに、 \mathbf{n} は最終曲面の単位法線ベクトルを表している。これは内圧あるいは外圧を受ける膜構造、すなわち、空気膜構造の圧力ポテンシャルとして用いられる。

それゆえ、形状解析に用いる停留ポテンシャルエネルギーの原理は次のようになる。

$$\delta \Phi = 0 \quad \dots\dots(2.29)$$

ここに、全ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_s + \Phi_p \\ &= \iint H^{ab} \gamma_{ab} \sqrt{A} dx dy \\ &\quad + \iint p \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sqrt{A} dx dy \quad \dots\dots(2.30) \end{aligned}$$

として表される。ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{ab} および A に含まれる形状(座標) X, Y, Z である。

さて、式(2.30)から導かれる基本方程式はいずれも非線形方程式となるが、ここで、固体の力学でよく用いられる簡略化の手法を用いる。すなわち、

$$h^{ab} = H^{ab} \sqrt{A} \quad \dots\dots(2.31)$$

$$p_a = p \sqrt{A} \quad \dots\dots(2.32)$$

と置く、この置き換えは 2nd. kind Piola-Kirchhoff 応力の定義に対応するものである。また、最終曲面の単位法線ベクトルを次のように置く、

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_3 \quad \dots\dots(2.33)$$

このような置き換えによって、式(2.30)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint h^{ab} \gamma_{ab} dx dy \\ &\quad + \iint p_a Z dx dy \quad \dots\dots(2.34) \end{aligned}$$

ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{ab} に含まれる形状(座標) X, Y, Z である。

さて、式(2.34)から導かれる基本方程式はいずれも線形方程式となる。

2.3 一般曲線（ケーブル構造）の線形理論

一般曲面の場合と同様にして、一般曲線の線形理論を導いておこう

初期の曲線は直線で、その位置ベクトルを次のように表す、

$$\mathbf{r}_0 = x \mathbf{e}_1 \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

また、最終曲線は未知の形状（座標） X, Y, Z をパラメーター x を用いて表すとすると、そのときの位置ベクトルは次のようになっている。

$$\mathbf{r} = X(x) \mathbf{e}_1 + Y(x) \mathbf{e}_2 + Z(x) \mathbf{e}_3 \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

このとき、最終的に安定した曲面の基本計量テンソル L_{11} は、座標関数を用いて次のように表現される。

$$L_{11} = X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

ここに、 X_x, Y_x, Z_x は式(2.20)で与えられる。また、最終曲線の線素は

$$\sqrt{L} = \sqrt{L_{11}} \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

となる。このとき、ひずみは形状（座標）を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= (1/2) (A_{11} - \delta_{11}) \\ &= (1/2) (X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 - 1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

それゆえ、0次弾性体の単位質量当りに蓄えられるひずみエネルギー W は形状（座標）を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} W &= {}_0H^{11} \gamma_{11} \\ &= (1/2) \{ {}_0H^{11} (X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2 - 1) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

ここに、 ${}_0H^{11}$ は空間曲線（ケーブル）の0じ弾性係数である。

さて、全ひずみエネルギーはこれを最終的な曲線の全領域について積分することによって得られ、

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int W \sqrt{L} dx \\ &= \int {}_0H^{11} \gamma_{11} \sqrt{L} dx \end{aligned} \quad \dots\dots (2.41)$$

ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{11} および L に含まれる形状（座標） X, Y, Z である。

さて、式(2.41)から導かれる基本方程式はいずれも非線形の方程式となる。ここでも、曲面の場合と同様に、

$$h^{ab} = {}_0H^{ab} \sqrt{L} \quad \dots\dots (2.42)$$

の置き換えを行えば、式(2.41)は次のようになる。

$$\Phi_0 = \int {}_0h^{11} \gamma_{11} dx \quad \dots\dots (2.43)$$

ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{11} に含まれる形状（座標） X, Y, Z である。

さて、式(2.41)から導かれる基本方程式はいずれも線形の方程式となる。

2.4 一般の曲線と曲面からなる複合曲面の線形理論

ケーブル補強の膜構造の形状解析に用いる汎関数は上述の二つの汎関数 Φ_L, Φ_0 を合成することによって得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_L + \Phi_0 \\ &= \iint h^{ab} \gamma_{ab} dx dy \\ &\quad + \iint p_0 Z dx dy \\ &\quad + \int {}_0h^{11} \gamma_{11} dx \end{aligned} \quad \dots\dots (2.44)$$

ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{ab} に含まれる形状 (座標) $X Y Z$ である。

さて、式(2.44)から導かれる基本方程式はいずれも線形の方程式となる。これがケーブル補強の膜構造の形状解析に用いる基本方程式になる。

3. 線形理論の離散化とその定式

3.1 汎関数の離散化

汎関数が決定されたので、その離散化は通常有限要素法に準じた手法で定式化される。まず、式(2.44)は次のように離散化される。なお、節点外力による外力ポテンシャルを付加する。

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum \int \int h^{ab} \gamma_{ab} \, dx \, dy \\ & + \sum \int \int c \, h^{11} \gamma_{11} \, dx \\ & + \sum \int \int p_0 Z \, dx \, dy \\ & - \sum (F_x^n X_m + F_y^n Y_m + F_z^n Z_m) \end{aligned} \quad \dots (3.1)$$

ここで、変分を受ける独立な関数は γ_{ab} に含まれる要素節点の形状 (座標) $X_k Y_k Z_k$ である。

ここで、

3.2 三角形膜要素

要素内の任意の点を全体座標系から測ったときの座標を $(X Y Z)$ とする。これを要素に埋め込まれた局所座標系 $(x y)$ の線形関数として次のように表す。

$$\begin{aligned} X &= \alpha^1 + \alpha^2 x + \alpha^3 y \\ Y &= \alpha^4 + \alpha^5 x + \alpha^6 y \\ Z &= \alpha^7 + \alpha^8 x + \alpha^9 y \end{aligned} \quad \dots (3.2)$$

$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^9$ は三角形要素の節点番号 m の座標値 $X_m Y_m Z_m$ ($m=i, j, k$) を用いて次のように定義される。

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= (a^1 X_i + a^2 X_j + a^3 X_k) / 2s \\ \alpha^2 &= (b^1 X_i + b^2 X_j + b^3 X_k) / 2s \\ \alpha^3 &= (c^1 X_i + c^2 X_j + c^3 X_k) / 2s \\ \alpha^4 &= (a^1 Y_i + a^2 Y_j + a^3 Y_k) / 2s \\ \alpha^5 &= (b^1 Y_i + b^2 Y_j + b^3 Y_k) / 2s \\ \alpha^6 &= (c^1 Y_i + c^2 Y_j + c^3 Y_k) / 2s \\ \alpha^7 &= (a^1 Z_i + a^2 Z_j + a^3 Z_k) / 2s \\ \alpha^8 &= (b^1 Z_i + b^2 Z_j + b^3 Z_k) / 2s \\ \alpha^9 &= (c^1 Z_i + c^2 Z_j + c^3 Z_k) / 2s \end{aligned} \quad \dots (3.3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a^1 &= x_j y_k - x_k y_j \\ a^2 &= x_k y_i - x_i y_k \\ a^3 &= x_i y_j - x_j y_i \\ b^1 &= y_i - y_k & c^1 &= x_k - x_i \\ b^2 &= y_k - y_j & c^2 &= x_i - x_k \\ b^3 &= y_j - y_i & c^3 &= x_j - x_i \end{aligned} \quad \dots (3.4)$$

ここに、 x_m, y_m ($m=1, 2, 3$) は初期の三角形要素の節点座標値である。また、 s は次式で定義される三角形要素の面積である。

$$\begin{aligned} 2s &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \\ &= a^1 + a^2 + a^3 \end{aligned} \quad \dots (3.5)$$

このように定義すると、 XYZ の $x y$ についての偏微分は次のように定義される。

$$\begin{aligned} X_x &= (\partial X / \partial x) = \alpha^2 \\ Y_x &= (\partial Y / \partial x) = \alpha^5 \\ Z_x &= (\partial Z / \partial x) = \alpha^8 \\ X_y &= (\partial X / \partial y) = \alpha^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_v &= (\partial Y / \partial y) = \alpha^6 \\
 Z_v &= (\partial Z / \partial y) = \alpha^9 \\
 &\dots\dots\dots (3.6)
 \end{aligned}$$

それゆえ、式(2.21)のひずみは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= (1/2) (\alpha^2 \alpha^2 + \alpha^5 \alpha^5 + \alpha^8 \alpha^8 - 1) \\
 \gamma_{22} &= (1/2) (\alpha^3 \alpha^3 + \alpha^6 \alpha^6 + \alpha^9 \alpha^9 - 1) \\
 \gamma_{12} &= (1/2) (\alpha^2 \alpha^3 + \alpha^5 \alpha^6 + \alpha^8 \alpha^9) \\
 &\dots\dots\dots (3.7)
 \end{aligned}$$

3.3 二節点ケーブル要素

三角形膜要素と同様に、要素内の任意の点を全体座標系から測ったときの座標を (X Y Z) とする。これを要素に埋め込まれた局所座標系 (x) の線形関数として次のように表す。

$$\begin{aligned}
 X &= \beta^1 + \beta^2 x \\
 Y &= \beta^3 + \beta^4 x \\
 Z &= \beta^5 + \beta^6 x \\
 &\dots\dots\dots (3.8)
 \end{aligned}$$

$\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^6$ はケーブル要素の節点番号 m の座標値 X_m, Y_m, Z_m ($m=i, j$) を用いて次のように定義される。

$$\begin{aligned}
 \beta^1 &= (a^1 X_i + a^2 X_j) / L \\
 \beta^2 &= (b^1 X_i + b^2 X_j) / L \\
 \beta^3 &= (a^1 Y_i + a^2 Y_j) / L \\
 \beta^4 &= (b^1 Y_i + b^2 Y_j) / L \\
 \beta^5 &= (a^1 Z_i + a^2 Z_j) / L \\
 \beta^6 &= (b^1 Z_i + b^2 Z_j) / L \\
 &\dots\dots\dots (3.9)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 a^1 &= x_j & a^2 &= -x_i \\
 b^1 &= -1 & b^2 &= 1 \\
 &\dots\dots\dots (3.10)
 \end{aligned}$$

ここに、 x_m, y_m ($m = 1, 2, 3$) は初期のケーブル要

素の節点座標値である。また、 L は次式で定義されるケーブルの長さである。

$$L = x_j - x_i = a^1 + a^2 \dots\dots\dots (3.11)$$

このように定義すると、 X, Y, Z の x についての偏微分は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
 X_x &= (\partial X / \partial x) = \beta^2 \\
 Y_x &= (\partial Y / \partial x) = \beta^4 \\
 Z_x &= (\partial Z / \partial x) = \beta^6 \\
 &\dots\dots\dots (3.12)
 \end{aligned}$$

それゆえ、式(2.39)のひずみは次のようになる。

$$\gamma_{11} = (1/2) (\beta^2 \beta^2 + \beta^4 \beta^4 + \beta^6 \beta^6 - 1) \dots\dots\dots (3.13)$$

4. 線形理論の基本方程式

離散系の汎関数(3.1)に式(3.7)および(3.13)を代入して得られる汎関数は節点座標を未知数とした二次関数となっている。基本方程式はこの汎関数を節点座標に関する停留条件より得られる。すなわち、

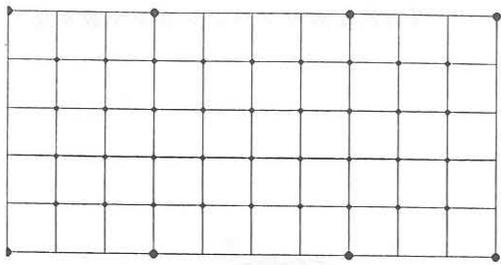
$$\begin{aligned}
 f_{x^q} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X^q} = 0 \\
 f_{y^q} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Y^q} = 0 \\
 f_{z^q} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Z^q} = 0 \\
 &\dots\dots\dots (4.1)
 \end{aligned}$$

ここに、添え字 ($q = 1, 2, 3, \dots, \dots$, 総節点数) これらの方程式はいずれも節点座標についての線形方程式となっている。

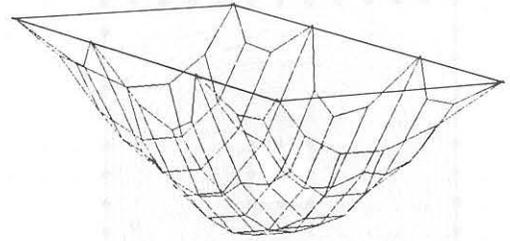
5. 数値計算例

ここに、数値計算例として、上述 2.4 節で説明した手法による解法で解いた例を示す。

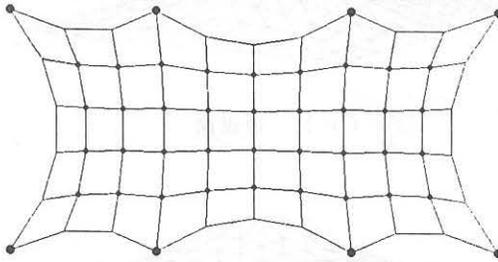
なお、使用した計算機は NEC-9801vm2 を用いた。また、使用言語は MS-DOS 上の N88basic である。



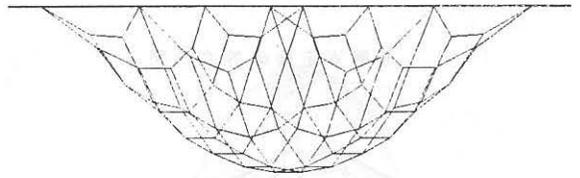
(a) 初期の平面ネットおよび境界条件



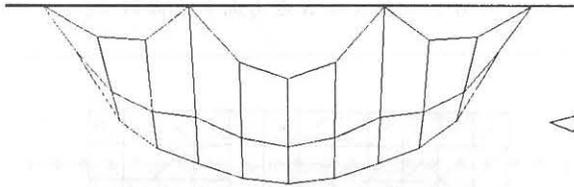
(d) 透視図



(b) 形態安定後のネット曲面



(e) 斜立面図



(c) 正立面図

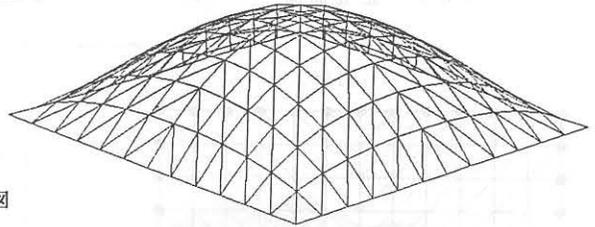
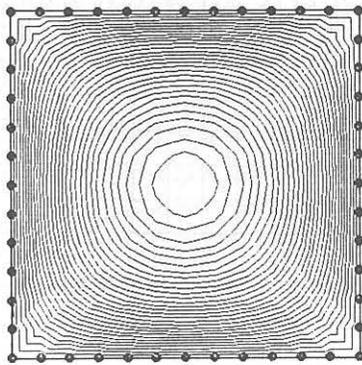
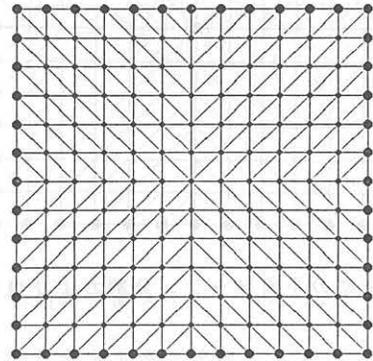


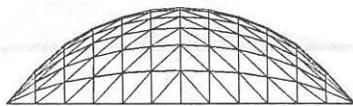
Fig. 1 ケーブルネット構造



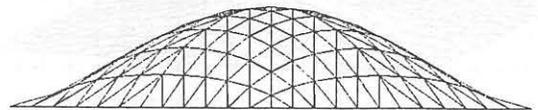
(a) 形態安定後の等高線図



(c) 初期の平面メッシュ分割および境界条件



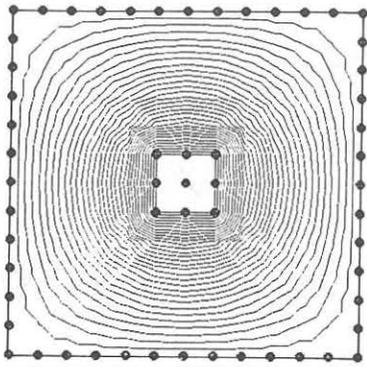
(b) 正立面図



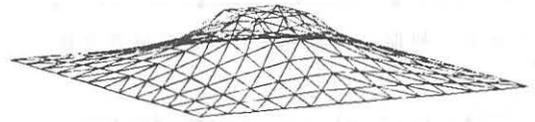
(e) 斜(45度方向)立面図

Fig. 2 周辺固定の空気膜構造

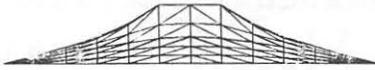
Fig. 3 周辺固定のサスペンション型膜構造



(a) 形態安定後の等高線図



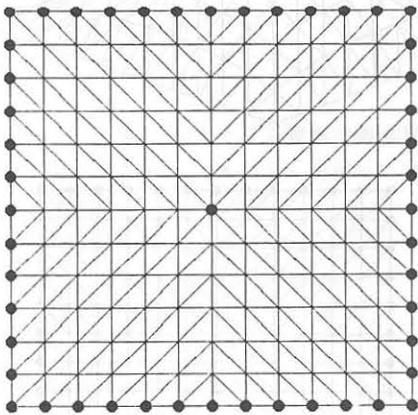
(c) 透視図



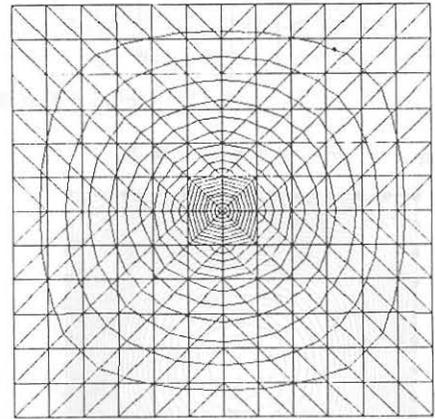
(b) 正立面図



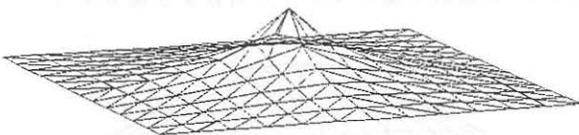
(d) 斜(45度方向)立面図



(e) 初期の平面メッシュ分割および境界条件



(a) 形態安定後の等高線図



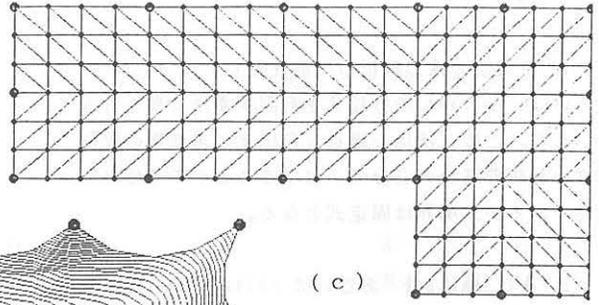
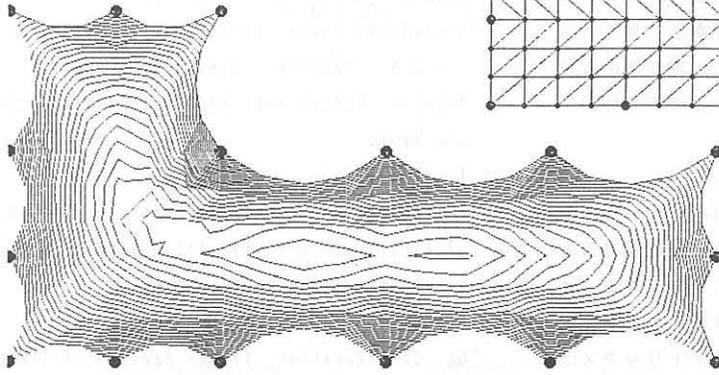
(d) 透視図



(b) 正立面図

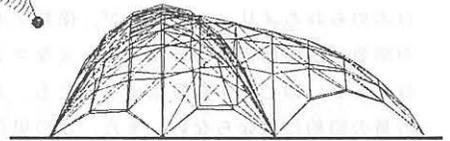
Fig. 4 周辺固定のサスペンション型膜構造

(a) 形態安定後の等高線図

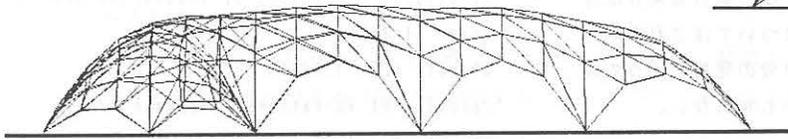


(c)

初期の平面メッシュ分割
および境界条件

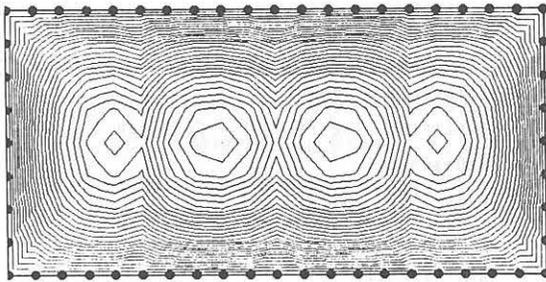


(d) 側面図

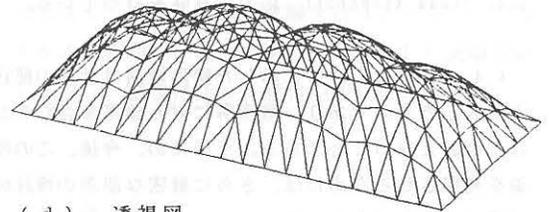


(b) 正立面図

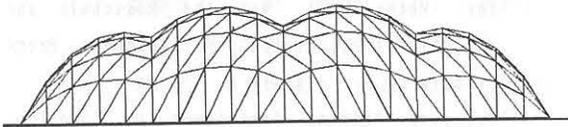
Fig. 5 周辺ケーブルの空気膜構造



(a) 形態安定後の等高線図

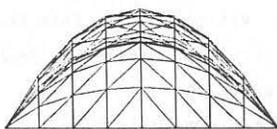


(d) 透視図



(b) 正立面図

(e) 初期の平面メッシュ分割および境界条件



(c) 側面図

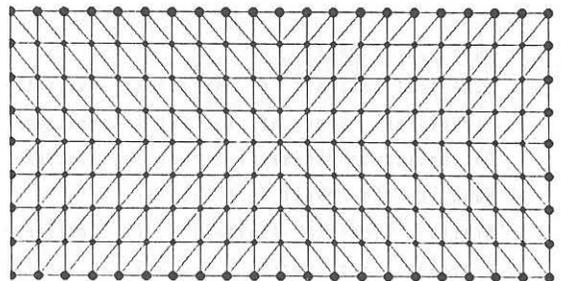


Fig. 6 周辺固定ケーブル補強の空気膜構造

6. まとめ

6.1 膜構造の線形解析の可能性として、Laplace あるいは Poisson の方程式を有限要素法で解く方法を示した。この方法は一節点一自由度と未知数の数を通常の有限要素法の三分の一にすることができ極めて有効であるが、境界は固定式となる。

6.2 次に Laplace あるいは Poisson の方程式を境界要素法で解く方法を示した。この手法は境界のみを要素分割すればよく未知数は極端に少なくすることができる、また、領域の任意の点の座標値を必要なだけ求められるメリットがあるが、係数マトリックスは有限要素法の場合のようにスパースなマトリックスとはならないので、未知数は少なくとも、実質的な記憶容量の節約にはならない。また、この場合も境界は固定である。しかし、この手法についてはこれまであまり議論されておらず、今後の研究の発展によってはもっと広い可能性を含んでいるかも知れない。

6.3 一節点三自由度を持つ一般的な形状解析の線形理論を示した。この手法は線形なので解は確実に求めることができる。ここで導入される0次弾性係数は 2nd. Piola Kirchhoff 応力の意味を持つている。

6.4 最後に、ここに示した線形理論は計算の便宜上導入したものであり、厳密解に対し誤差を含むことはやむおえないことである。そのため、今後、この理論を発展させるためには、さらに厳密な誤差の検討が必要であると考えている。

REFERENCES

- 1) Oden J. T. (1967)
"Numerical Analysis of Nonlinear Pneumatic Structures" Proc. of the 1st International Colloquium on Pneumatic Structures Stuttgart
- 2) Haug, E. and Powell, G. H. (1971)
"Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures" I. A. S. S. Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames. Tokyo and Kyoto,
- 3) Haug, E. and Powell, G. H. (1971)
"Analytical Shape Finding for Cable Nets" I. A. S. S. Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames. Tokyo and Kyoto
- 4) Ishii, K. (1982)
"Structural Design of Air-Supported Structure" Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National University, Vol. 31
- 5) Ataka, N. (1987)
"On Configuration Theory Based on Mechanics of Continua", Proc. of the 2nd. Japan-Korean Joint Colloquium on Shell and Spatial Structures, Institute of industrial science, Univ. of Tokyo
- 6) Elsgolc L. E. (1962)
"Calculus of Variations" Pergamon Press.
- 7) Washizu K. (1982)
"Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press 3rd. edition
- 8) Otto F. (1969)
"Tensile Structures" Vol. I, Vol. II MIT Press
- 9) Eringen A. C. (1962)
"Nonlinear Theory of Continuous Media" McGraw-Hill
- 10) Oden J. T. (1972)
"Finite Elements of Nonlinear Continua" McGraw-Hill
- 11) Finlayson B. A. (1972)
"The Method of Weighted Residuals and Variational Principles" Academic Press
- 12) Brebbia C. A. (1984)
"Boundary Element Techniques in Computer-Aided Engineering" Martinus Nijhoff Publishers
- 13) Jaswon M. A. and Symm G. T. (1977)
"Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics" Academic Press
- 14) Brebbia C. A. and Walker S.
田中正隆 田中喜久昭 共訳 (1981)
"境界要素法基礎と応用" 培風館