膜構造の形態の統一理論について

安宅信行

梗　　概

膜構造の形状解析には初期の釣合形状を求める問題（ここでは、これを狭義の形状解析問題という）と、萎んだ風船などに空気を吹き込んで安定した形態を求める問題（ここでは、これを広義の形状解析問題という）の二種類の形状解析問題の存在が知られている。これらの問題はこれまで別々の問題として考えられてきたが、狭義の形状解析問題に「０次弾性体」の概念を導入することによって、これら二つの問題は解析上は単に材質的な違い、すなわち、前者は「０次弾性体」を対象としているのに対し、後者は「１次弾性体」を対象とした連続体の力学の枠の中で統一的に解析することが出来るようになってきた。これによって、これまで、統一性がなく断片的に知られていた形状解析問題をかなり見通しよく整理することができることが明かとなったので、これについて報告する。

1．はじめに

膜構造やケーブル構造などに代表される、いわゆるテンション構造の形状解析問題には次の二つがある。

(1) テンション構造物特有の初期の形状を定める、いわゆる形状解析問題、ここではこれを狭義の形状解析問題という。

(2) この構造特有の問題として、この構造は応力フリーの自然状態に於て、一般に不安定であり、この不安定な状態から、初期応力あるいは内圧によって安定するまでのプロセスを解析する形状解析問題、ここではこれを広義の形状解析問題という。

前者はこれまでに多くの研究者(cf. 2-10)によって研究され、現在では実用上あまり問題にならないほどに解かれるなってきている。しかし、その理論的な整備は遅れているようにに思われる。

一方、後者の問題(cf.11-15)についてはこれまであまり議論されておらず、一般に知られていないようである。しかし、この問題は裁断縫合された膜曲面の精度検定、あるいはデフレート状態（不安定状態）から安定した形態を決定する方法として重要である。

これらの問題はこれまで別々の問題として扱われてきているが、狭義の形状解析問題に０次弾性体の概念(cf.14-15)を導入することによって、統一的に扱えることが明らかになつてきたので、この理論について述べる。

2．形状解析問題の分類について

問題を明確にするために図１にシェルなどと比較して、その相違点を分かりやすく表現してある。

この図から狭義の形状解析、広義の形状解析、および応力変形解析などが明確に区別することができる。

3．形状解析と定式化の方針

3.1 形状解析と変形解析の相違点

形状解析問題は狭義、広義の区別なく、次の三組の

横浜国立大学　工学部　建設学科　助手

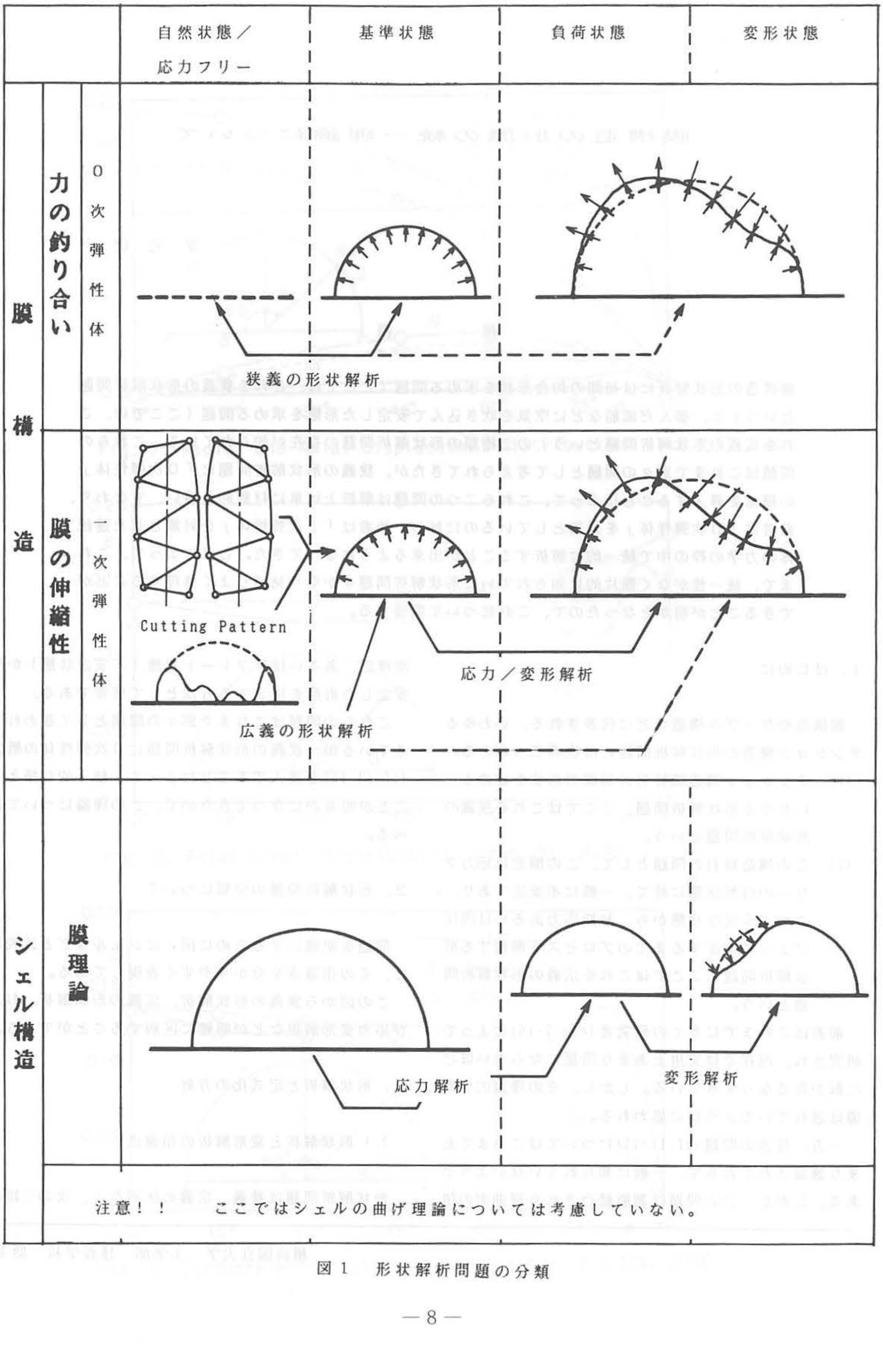


図1　形状解析問題の分類

方程式の系で完全に記述される

1. 釣合方程式

$$g(\sigma, x, f) = 0 \qquad (3.1)$$

2. ひずみ形状関係式

$$\gamma = \gamma(x) \qquad (3.2)$$

3. 構成方程式

$$\sigma = \sigma(\gamma) \qquad (3.3)$$

ここに、 σ : Stress Tensor
γ : Strain Tensor
x : Coordinate Vector
f : Initial load Vector

さて、応力・変形問題は一般によく知られているように、上述の関係で座標 x の代わりに変位 d を用いて記述されている。すなわち、応力・変形解析と形状解析の違いは、前者が変位を未知数にしているのに対して、後者は座標を未知数にしている点である。

3.2 狭義の形状解析

初期の釣合状態の形状を考える際に、これまで釣合方程式 (3.1)を主に考慮し、材質的な考慮は払われなかった、しかし、形状解析問題を統一的に扱うためには、ここに材質的な考え方を導入する必要がある。

その理論的根拠として、Oden, J.T. は cf.23 の中で 『連続体の静力学的な問題において、応力がひずみに対し解析的であるとすると、構成方程式は一般に次のように展開できる。

$$\sigma^{ij} = H^{ij} + H^{ijkl}\gamma_{kl} + 1/2H^{ijklmn}\gamma_{kl}\gamma_{mn} + \cdots\cdots \cdots\cdots(3.4)$$

ここで、H^{ij}, H^{ijkl}, H^{ijklmn}, …… は、それぞれ、0次、1次、2次、……… の弾性係数といわれ、材料固有のものと考えられる。

一方、ここで、$\gamma_{kl} = 0$ と置くと、式(3.4)は

$$\sigma^{ij} = H^{ij} \qquad (3.5)$$

となる。

それゆえ、0次の弾性係数H^{ij}は、ひずみ ゼロ の基準状態に存在する「初期応力」あるいは、「規定された応力」を表わしていると考えることも出来る。』といっている。

確かに、応力と弾性係数のディメンジョンは等しいから、H^{ij} を応力と考えることも、また、弾性係数であると考えることも可能である。すなわち、H^{ij}は「0次の弾性係数」という面 と「初期応力」という面を合わせもっている。

これまでの形状解析においては、これを「初期応力」あるいは、「既知の応力」という面からのみ捉えられており、領域内の連続体の材質的特性には、なんら注意が払われなかった。しかし、ここではこれを「0次の弾性係数」という面を中心に考えることにする。

このように考えることによって、これまで形状(狭義の)解析で、考慮されなかった、ひずみ形状関係式(3.2)や構成方程式(3.3) を考慮する必要がでてくる。すなわち、狭義の形状解析問題は弾性定数としては特殊なものを用いるとしても、通常の応力・変形解析等と同様の三つの系の方程式で完全に記述される。

結局、狭義の形状解析と応力・変形解析の相違点は一つには使用される三つの系の方程式の未知数が座標であるかあるいは変位であるかという点、二つとして、0次弾性係数を用いるか、あるいは、1次(通常の)弾性係数を用いるかの違いである。

3.3 広義の形状解析

この問題は次のような具体的な問題として問題の本質は容易に理解することができる。

(1) 萎んだ紙風船、アドバルーンあるいはデフレート状態の空気膜構造に空気を吹き込んで膨らませる場合の最終形態の決定
(2) 袋状のものに気体、あるいは液体を入れたときの最終的な形態の決定
(3) サスペンションタイプの膜構造で裁断縫合された膜面の初期応力導入以前の状態から初期応力導入後の安定した形態の決定

(4)　裁断図形（カッティング　パターン）からそれが縫合され、内圧あるいは初期応力が導入された後の形態を推定する方法

(5)　裁断図形（カッティング　パターン）は必ずしも初期の形状解析の結果得られた形態を忠実に再現できるものではなく、なんらかの誤差が混入することになる、これにともなって形態が当初のものと異なり、かつ、応力集中や予想形態からのずれを起こすおそれがある、このような問題に対して、これまでの応力・変形解析の手法ではこれらを評価することはできない。ここで示す手法はこれを可能にした。

この問題は膜構造を構成する材質は明かであり、一見、応力・変形解析問題に似ている、しかし、応力・変形問題と異なる点は応力・変形問題では応力フリーの自然状態において、変位を評価し得る安定した基準状態が存在するが、広義の形状解析においてはこれがなく、応力フリーの自然状態においては一般に不安定である。そのため、変数は内圧、あるいは、初期応力導入後の安定した形態の座標値となる。

結局、広義の形状解析と応力・変形解析との相違点は上述の三つの系の方程式において、前者は未知数に座標を用い。後者は変位を用いている点である。

さらに、狭義の形状解析と広義の形状解析との相違点は前者が材料定数として、０次弾性係数を用いるのに対し、後者は１次（通常の）弾性係数を用いている点である。

3.4　形状解析問題の名称について

上に述べてきた議論に基ずいて、狭義の形状解析問題と広義の形状解析問題を考えるとき、この二つの解析問題での相違点がたんに弾性係数のみに関係していることから、前者を０次弾性体の形状解析、また、後者を１次弾性体の形状解析といってもよい、また、これらの外にも材質の違いによる形状解析が考えられる、例えば、伸びないケーブル、や伸びない膜の形状解析などがあるが、これらを明確に区別するためには材質を明確にした、上で説明した表現の方がよいと思われるので、以下ではこの表現を用いることもある。

4.　形状解析問題の定式化

4.1　基礎方程式

２．３．節において狭義、広義の形状解析問題と応力・変形問題との関係が明かになつたので、ここではこれを具体的に求めることを考えよう。

4.1.1　二次元連続体の平衡方程式

三次元の連続体平衡方程式を板厚方向に積分することによつて、二次元の連続体の平衡方程式がえられる。すなわち、

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial}{\partial \Lambda^{a}}\left(\sqrt{A}\ n^{a}\right)+\left(q+b\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.1)$$

ここに、

$\sqrt{A}$　：　曲面の微小面積要素

n^{a}　：　応力ベクトル

q　：　表面力

b　：　物体力

Λ^{a}　：　一般座標系

添え字　a　：　$a=1,2$　である。

また、これをテンソルで表現すれば、

$$n^{ab}{}_{;a}A_{b}+b_{ab}n^{ab}A_{3}+\left(q+b\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.2)$$

ここに、$(\ )_{;a}$　：　$(\ )$ の Λ^{a} に関する共変微分

b_{ab}　：　曲面の第二計量テンソル

n^{ab}　：　応力テンソル

A_{b}　：　曲面の基底ベクトル

A_{3}　：　曲面の単位法線

なお、これらの式は式(3.1)の内容を具体的に表現したものである。

4.1.2　ひずみ・形状関係式

上述の式(3.2)に対応するひずみ・形状関係式を具体的に表現しておこう。ひずみは曲面の基本計量テンソ

ルを用いて次のように表される。

$$\gamma_{ab}=\frac{1}{2}\left(A_{ab}-a_{ab}\right) \quad \cdots\cdots(4.3)$$

ここに、

γ_{ab}：ひずみテンソル

A_{ab}：形態安定後の曲面の基本計量テンソル

a_{ab}：形態安定前の曲面の基本計量テンソル

さて、これら基本計量テンソルは次のように表される。すなわち、形態安定後の曲面の任意の点の位置ベクトルを次のように表す。

$$\mathbf{r}=z^k(\Lambda^a)\,\mathbf{e}_k \quad \cdots\cdots\cdots(4.4)$$

ここに、

z^k：形態安定後の曲面の任意の点の座標値

添え字は（a=1,2　k=1,2,3）とする。

このとき、基底ベクトルは

$$A_a=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda^a} \quad \cdots\cdots\cdots(4.5)$$

となり、また、基本計量テンソルは

$$A_{ab}(z^k)=\frac{\partial z^k}{\partial \Lambda^a}\frac{\partial z^k}{\partial \Lambda^b} \quad \cdots\cdots(4.6)$$

となる。また、微小面積要素は

$$\sqrt{A}=\sqrt{A_{11}A_{22}-(A_{12})^2} \quad \cdots(4.7)$$

となる。また、反変の基本計量テンソルは次のように定義される。

$$A^{11}=A_{22}/A \qquad A^{22}=A_{11}/A$$
$$A^{12}=-A_{12}/A$$
$$\cdots\cdots(4.8)$$

これらと同様の関係が形態安定前の曲面に対しても求めることができる。

さらに具体的に表現するために、通常の記号、すなわち、z^k の代わりに X、Y、Z また Λ^a の代わりに x、y とし、この x、y は形態安定前の曲面の座標を表すとすると、このときの位置ベクトルは次のようになる。(1) 形態安定前の曲面に対しては

$$\mathbf{r}_0=x\,\mathbf{e}_{01}+y\,\mathbf{e}_{02} \quad \cdots\cdots\cdots(4.9)$$

(2) 形態安定後の曲面に対しては

$$\mathbf{r}=X(x,y)\,\mathbf{e}_1+Y(x,y)\,\mathbf{e}_2+Z(x,y)\,\mathbf{e}_3 \quad \cdots\cdots(4.10)$$

このとき、ひずみは次のようになる。

$$\gamma_{11}=(1/2)\left(X_x{}^2+Y_x{}^2+Z_x{}^2-1\right)$$
$$\gamma_{22}=(1/2)\left(X_y{}^2+Y_y{}^2+Z_y{}^2-1\right)$$
$$\gamma_{12}=(1/2)\left(X_xX_y+Y_xY_y+Z_xZ_y\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

ここに、

$$X_x=(\partial X/\partial x) \qquad X_y=(\partial X/\partial y)$$
$$Y_x=(\partial Y/\partial x) \qquad Y_y=(\partial Y/\partial y)$$
$$Z_x=(\partial Z/\partial x) \qquad Z_y=(\partial Z/\partial y)$$
$$\cdots\cdots\cdots(4.12)$$

3.1.3　構成方程式

さて、材質の特性を表す構成方程式としてはここでは次の二つの場合を考える。すなわち、

(1) 0次弾性体に対しては

$$\eta^{ab}=H^{ab} \quad \cdots\cdots\cdots(4.13)$$

(2) 1次（通常の）弾性体に対しては

$$\eta^{ab}=H^{abcd}\gamma_{cd} \quad \cdots\cdots\cdots(4.14)$$

を用いる。ここに、η^{ab} はオイラーの応力表示である。

4.2　形状解析と仮想仕事の原理

4.2.1　仮想仕事の原理

ここでは、前節で規定した諸式と、次の境界条件

(1)　力学的境界

$$n = n_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.15)$$

(2)　幾何学的境界

$$\delta r = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.16)$$

とを導入する、これに対する一般的な仮想仕事の原理は次のように書かれる。

$$-\iint\left[\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial}{\partial \Lambda^a}(\sqrt{A}\ n^a) + (q+b)\right]\delta r\,dv + \iint (n - n_0)\,\delta r\,dv = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.17)$$

部分積分と Green-Gauss の定理を用いて変形すると

$$\iint\left[\frac{1}{2}(\eta^{ab}\delta A_{ab}) + (q+b)\,\delta r\right]dv + \iint n_0\,\delta r\,dv = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.18)$$

ここに、仮想ひずみはひずみ形状関係式から、

$$\delta\gamma_{ab} = \frac{1}{2}\delta A_{ab} \qquad \cdots\cdots\cdots(4.19)$$

となる。最終的な仮想仕事の式は次のようになる、

$$\iint \eta^{ab}\delta\gamma_{ab}\,ds + \iint (q+b)\,\delta R\,ds + \int n_0\,\delta R\,dc = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.20)$$

となる。これは一般的な膜の仮想仕事の原理である。さて、ここで注意すべき点は η^{ab} は オイラー座標系における膜応力であり、ds や dc は最終的な釣り合状態での物体の微小面素と微小線素で変分を受ける関数を含んでいる。

一方、固体の力学、特に、通常の応力・変形解析においては、これを極めて巧妙な手法を用いて初期の（変形前の）釣り合状態での物体の微小面素と微小線素に置き換えている。ここでは必要に応じて、この置き換え手法を利用するものとし、当面はこのままの形で検討する。

また、この段階までは、材質の特性に無関係で、式(4.20)はどのような媒体に対しても適用することができる。この一般式に対して、次に材質的特性を考慮した変分の原理を導いておこう。

4.2.2　0次弾性体の変分の原理

式(4.13)で規定される材質について検討する。なお、この際、式(4.20)の第一項が問題となるのでこの項を中心に以後の話を進める。

式(4.13)を用いると、式(4.20)の第一項は次のようになる

$$\iint \eta^{ab}\delta\gamma_{ab}\,ds = \iint H^{ab}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.21)$$

ここに、

$$ds = \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2$$

さて、式(4.21)において H^{ab} は0次弾性係数として与えられる。ここで、注意すべき点は面積要素 $\sqrt{A}$ は形態安定後（応力・変形解析では変形後）の面積要素で変数を含んでいる。

この式(4.21)は特殊な場合として次の二つの場合がある。

(1) 等方性０次弾性体の場合

等方性０次弾性体の弾性定数は次のように表される。

$$H^{ab}=\eta_0 A^{ab} \qquad \cdots\cdots\cdots(4.22)$$

ここに、 η_0 ： 定数（等応力）

A^{ab} ： 形態安定後の曲面の反変基本計量テンソル

このとき、式(4.21)は式(4.19)を用いて、次のようになる。

$$\iint H^{ab}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2$$

$$=\iint \eta_0\ \frac{1}{2}A^{ab}\delta A_{ab}\sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2$$

$$=\delta\iint \eta_0\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.23)$$

ここに、

$$\delta\ \sqrt{A}=\frac{1}{2}A^{ab}\delta A_{ab}\sqrt{A} \qquad \cdots\cdot(4.24)$$

の関係を用いている。

さて、式(4.23)はこれまで表面張力によるエネルギーとしてその導入方法が明確に示されないまま広く使われてきており、現在、膜構造の初期形状解析における等張力曲面の基本式は全てこれより誘導される。

例えば、形態安定後の曲面が次式で表されるとき

$$r=xe_1+ye_2+z(x\ y)e_3 \qquad (4.25)$$

このとき、基底ベクトルは次のように定義される。

$$A_1=\partial r/\partial x=e_1+z_x e_3 \qquad (4.26)^1$$
$$A_2=\partial r/\partial x=e_2+z_y e_3 \qquad (4.26)^2$$

ここに、

$$z_x=\partial z/\partial x \quad z_y=\partial z/\partial y \qquad (4.27)$$

この曲面の共変計量テンソルは次のようになる。

$$A_{11}=1+z_x^2$$
$$A_{22}=1+z_y^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.28)$$
$$A_{12}=z_x z_y$$

$$A=A_{11}A_{22}-A_{12}^2=1+z_x^2+z_y^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(4.29)$$

それゆえ、面積要素は

$$\sqrt{A}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.30)$$

式(4.20)、式(4.23) および 式(4.30)から内圧 p を受ける０次弾性膜の停留ポテンシャルエネルギーの原理は次のようになる。

$$\delta\Phi_f=0 \qquad \cdots\cdots\cdot(4.31)$$

ここに、

$$\Phi=\iint\left\{\eta_0\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}+pz(x,y)\right\}dx\,dy \qquad \cdots\cdots\cdot(4.32)$$

ここで変分を受ける独立の量は z である。

さて、この汎関数を停留にする z は次の Euler-Lagrange の方程式を満足する。

$$\eta_0\frac{\triangle z+L(z)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}^{\,3}}=p \qquad \cdots\cdots\cdot(4.33)$$

ここに、

$$\triangle z\ =z_x^2+z_y^2 \qquad \cdots\cdots\cdot(4.34)$$

$$L(z)=z_x^2 z_{yy}-2z_x z_y z_{xy}+z_y^2 z_{xx} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.35)$$

$$z_{xx}=\partial^2 z/\partial x\partial x$$
$$z_{yy}=\partial^2 z/\partial y\partial y \qquad \cdots\cdot(4.36)$$

$$z_{xy} = \partial^2 z / \partial x \partial y$$

これは、等張力曲面の釣合方程式であり、文献18 とも完全に一致している。なお、この方程式は非線形の方程式となる。文献 9) ではこれを差分法を用いて解いている。

さて、次に上述の膜の自重を考慮した場合を考えよう。 この場合物体力（自重）に対しては次のようなポテンシャル関数の存在が知られている。

$$\Phi_1 = \iint g z \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy \qquad \cdots\cdots(4.37)$$

これを式(4.32)に加えると、膜自重を考慮した汎関数は次のように表される。

$$\Phi = \iint \left\{ (\eta_0 + g z) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} + p z(x, y) \right\} dx\, dy \qquad \cdots\cdots\cdot(4.38)$$

ここに、gは曲面の単位面積当りの自重で定数とする。

ここで変分を受ける独立の量は z である。

さて、この汎関数を停留にする z は次の Euler-Lagrange の方程式を満足する。

$$(\eta_0 + g z) \frac{\Delta z + L(z)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}^{\,3}} = p + \frac{g}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}^{\,3}} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.39)$$

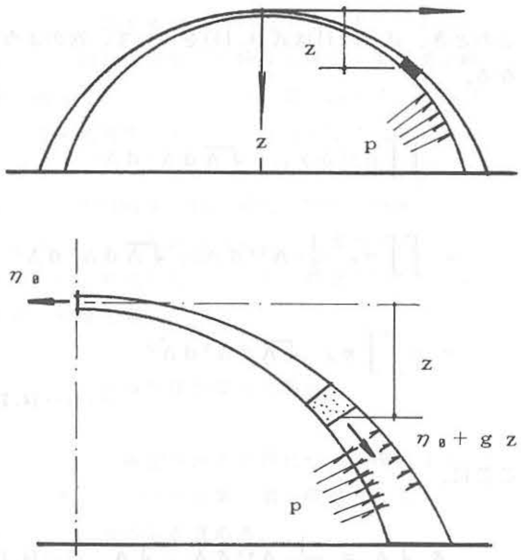
これは、自重を考慮した局所的等応力曲面（一種の静水圧）の釣合方程式であり、文献18 とも完全に一致している。なお、この方程式も非線形の方程式となる。

さて、ここで、式(4.38)の第一項を検討しておこう、（$\eta_0 + g z$） は応力と考えられるが、これはさらさらした流体（理想流体）の静水圧に相当する。またさらに、この式は理想流体のエネルギー収支を表した、

Bernoulli 定理

$$p + \rho g h + (1/2) \rho v^2 = \text{constant} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.40)$$

に基ずく、前二項を表していると見ることができる。すなわち、圧力と位置のエネルギーを表していると考えられる。



［これは一種の Bernoulli の定理と考えられる。
ただし、ここでは静止した理想流体を考えている。］

図2　自重を考慮した理想流体の膜

このように、これまで一般に言われている形状解析問題は0次弾性体の特殊な場合の形状解析であると言える。また、逆にここで説明した手法に従って、これまでに定式化されている形状解析問題を完全に説明することができる。

(2)　Second Piola-kirchhoff 応力的な意味での等方性0次弾性体の場合

固体の力学では Second Piola-kirchhoff 応力を用いることにより体積要素、あるいは面積要素をなどを変形前のものに変換し、以後の演算を極めて簡単に表

現できることが知られている。そこで、この手法を形状解析の場合にも適用する。このときの０次弾性係数を次のように定義する。

$$H^{ab}=\sqrt{a/A}\ h^{ab} \quad \cdots\cdots\cdots(4.41)$$

ここに、$\sqrt{a}$ ： 形態安定前の曲面の面積要素
h^{ab} ： Second Piola-kirchhoff 応力に相当する０次弾性係数

式(4.37)を式(4.21)に適用すると、

$$\iint H^{ab}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2$$

$$=\iint h^{ab}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{a}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2 \quad \cdots\cdots\cdots(4.42)$$

となる。境界応力や物体力についても同様の変換を行うことによって、完全に形態安定前の面積要素などに置き換えることができる。なお、h^{ab} は定数として扱われるから変分を受ける独立量はひずみ γ_{ab} に含まれる z である。ひずみには z が二次の項として含まれるから、この式より導かれる基礎方程式は線形方程式となる。

4.2.3　１次弾性体の変分の原理

式(4.14)で規定される通常の弾性体の形状解析問題について検討する。この問題は上述の広義の形状解析問題に相当する。

なお、この場合にも、式(4.20)の第一項が問題となるのでこの項を中心に以後の話を進める。

式(4.14)を用いると、式(4.20)の第一項は次のようになる

$$\iint \eta^{ab}\delta\gamma_{ab}\,ds$$

$$=\iint H^{abcd}\gamma_{cd}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2 \quad \cdots\cdots\cdots(4.43)$$

さて、ここで、弾性係数 H^{abcd} と次の関係で結ばれる新たな弾性係数 h^{abcd} を導入する。

$$H^{abcd}=\sqrt{a/A}\ h^{abcd} \quad \cdots\cdots\cdots(4.44)$$

いま、新らたな構成方程式

$$n^{ab}=h^{abcd}\gamma_{cd} \quad \cdots\cdots\cdots(4.45)$$

を導入する。このとき、式(4.14)より、

$$\eta^{ab}=\sqrt{a/A}\quad n^{ab} \quad \cdots\cdots\cdots(4.46)$$

ここに、n^{ab} は Second Kind Piola-Kirchhoff 応力である。

これらの関係式を用いると、式(3.39)は次のように形態安定前（応力・変形解析的な言い方をすれば、変形前）の曲面全域にわたる積分に変換される。

$$\iint \eta^{ab}\delta\gamma_{ab}\,ds$$

$$=\iint H^{abcd}\gamma_{cd}\delta\gamma_{ab}\ \sqrt{A}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2$$

$$=\delta\iint (1/2)\,h^{abcd}\gamma_{cd}\gamma_{ab}\ \sqrt{a}\,d\Lambda^1 d\Lambda^2 \quad \cdots\cdots\cdots(4.47)$$

となる。
たとえば、さきに述べた直交座標系の場合を考える。このとき、空気膜構造の変分の原理は次のように記述される。

$$\delta\Phi\ =0 \quad \cdots\cdots\cdots(4.48)$$

ここに、

$$\Phi=\iint\left\{(1/2)\,h^{abcd}\gamma_{cd}\gamma_{ab}\right.$$

$$\left.+\ p z\,(x,y)\right\}dx\,dy \quad \cdots\cdots\cdots(4.49)$$

この場合には

$$\sqrt{a} = 1 \qquad \cdots\cdots(4.50)$$

および、

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= (1/2) z_x^2 \\ \gamma_{22} &= (1/2) z_y^2 \qquad \cdots(4.51) \\ \gamma_{12} &= (1/2) z_x z_y \end{aligned}$$

である。ここで、変分を受ける独立な量は z である。

ここに示した例では、元の（変形前）の形として平面の膜に内圧をかけて膨らませたときの最終形態を決定する問題で、これは形状解析というよりは、むしろ変形解析に近い。

そこで、もう少し形状解析らしい例を考えよう。形態安定後の曲面の任意の点の位置ベクトルが式(4.10)で与えられ、形態安定前の曲面の任意の点の位置ベクトルは曲面全体として、一意的に表示することはできないが、局部的に平面に展開して、局所的直交座標系 x, yを用いて、式(4.9) で与えられるとする。ひずみは式(4.11)で与えられる。このとき、停留ポテンシャルエネルギーの原理の離散系表示は次のように表される。

$$\delta \Phi = 0 \qquad \cdots\cdots(4.52)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Phi = &\sum \iint (1/2) h^{abcd} \gamma_{cd} \gamma_{ab} \, dx\,dy \\ &- \sum (F_x^k X_k + F_y^k Y_k + F_z^k Z_k) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.53)$$

ここに、

F_x^k　F_y^k　F_z^k ：それぞれ節点kの x y z 方向荷重、

X_k　Y_k　Z_k ：それぞれ節点kの x y z の座標値

ここで、変分を受ける独立な量は節点の座標値である。さて、式(4.53)は未知数が座標で表現されている以外は通常の応力・変形解析における停留ポテンシャルエネルギーの原理と同じ表現になつている。しかし、ここでは初期の形態は必ずしも安定でないことを前提にしている点が応力・変形解析と大きく異なる点である。

そのためには、ひずみの具体的な表現が必要となる以下その具体的な導き方を示す。

構造全体として不安定な初期の形態の局所的な位置ベクトルは平面に展開された三角形要素にたいして、式(4.9) で与えられる、一方、内圧などによって初期応力が導入され、構造全体として安定な最終形態の対応する要素の全体座標系に対する位置ベクトルは式(4.10)で与えられる。このとき、これらの座標は

$$\begin{aligned} X &= \alpha^1{}_0 + \alpha^1{}_1 x + \alpha^1{}_2 y \\ &= \beta^1 (x, y) X_1 + \beta^2 (x, y) X_2 \\ &\qquad + \beta^3 (x, y) X_3 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.54)$$

ここで、X_k： k節点のX座標値 (k=1,2,3)

また、$\alpha^1{}_0$　$\alpha^1{}_1$　$\alpha^1{}_2$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \alpha^1{}_0 &= (a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3) / 2s \\ \alpha^1{}_1 &= (b^1 X_1 + b^2 X_2 + b^3 X_3) / 2s \\ \alpha^1{}_2 &= (c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3) / 2s \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.55)$$

また、β^k は次のように書ける。

$$\beta^k = (a^k + b^k x + c^k y) / 2s \qquad \cdots\cdots(4.56)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a^2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ a^3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^1 &= y_2 - y_3 \qquad & c^1 &= x_3 - x_2 \\ b^2 &= y_3 - y_1 \qquad & c^2 &= x_1 - {}_3 \\ b^3 &= y_1 - y_3 \qquad & c^3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.57)$$

ここに、x_k　y_k は初期の曲面の局部的展開によって作られる平面内の三角形要素の節点座標値である。また、sは次式で定義される三角形要素の面積である。

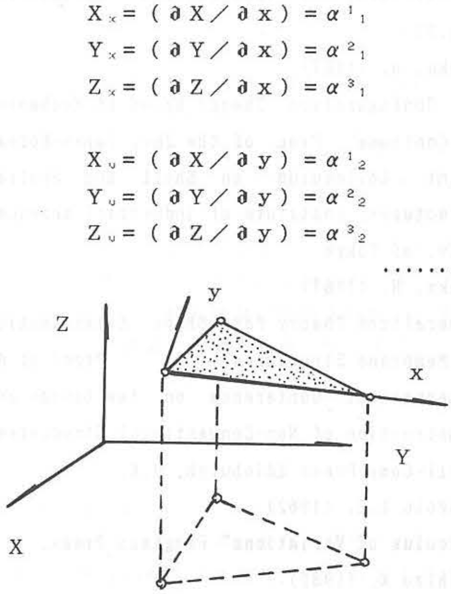
$$2s = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= a^1 + a^2 + a^3 \qquad \cdots\cdots(4.58)$$

同様の関係が座標 Y Z についても成り立つから、これを用いて

$$X_x = (\partial X / \partial x) = \alpha^1{}_1$$
$$Y_x = (\partial Y / \partial x) = \alpha^2{}_1$$
$$Z_x = (\partial Z / \partial x) = \alpha^3{}_1$$

$$X_y = (\partial X / \partial y) = \alpha^1{}_2$$
$$Y_y = (\partial Y / \partial y) = \alpha^2{}_2$$
$$Z_y = (\partial Z / \partial y) = \alpha^3{}_2 \qquad \cdots\cdots(4.59)$$



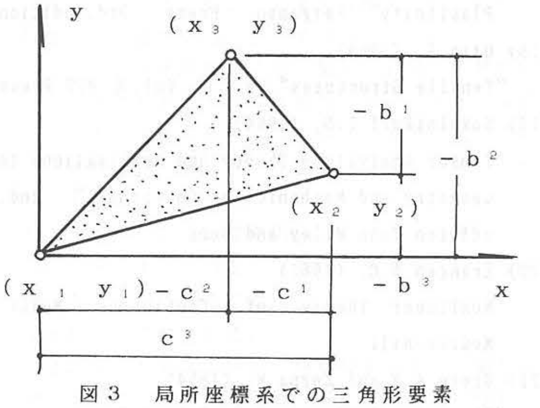


図３　局所座標系での三角形要素

それゆえ、式(4.11)のひずみは次のようになる。

$$\gamma_{11} = (1/2)(\alpha^1{}_1\alpha^1{}_1 + \alpha^2{}_1\alpha^2{}_1 + \alpha^3{}_1\alpha^3{}_1 - 1)$$
$$\gamma_{22} = (1/2)(\alpha^1{}_2\alpha^1{}_2 + \alpha^2{}_2\alpha^2{}_2 + \alpha^3{}_2\alpha^3{}_2 - 1)$$
$$\gamma_{12} = (1/2)(\alpha^1{}_1\alpha^1{}_2 + \alpha^2{}_1\alpha^2{}_2 + \alpha^3{}_1\alpha^3{}_2 \quad) \qquad \cdots\cdots(4.60)$$

さて、ひずみに関与する $\alpha^k{}_1$ $\alpha^k{}_2$ (k=1,2,3)は式(4.55) において k=2 のときにはXをYで置き換え、k=3 のときにはXをZで置き換えたものであるが、その内容が形態安定以前の座標に関係するものは $\alpha^k{}_1$ $\alpha^k{}_2$ に含まれる b^k c^k (k=1,2,3) であるが、これは式(4.57)で与えられるように座標値そのものに関係するのではなく、節点座標値の差に関係している。

これは初期の形態が全体的に安定した状態での座標を必要とするのではなく、膜面にそう相対的な位置関係が えられればよいことを示唆している。それゆえ、入力データとして、曲面を部分的に平面に展開しその平面内の三角形要素に対し、各節点の局所的な座標値もしくは下の図に示す b^k c^k の値を直接入力データとしてもよい。

なお、この問題に付いては文献11-15 に詳細に述べられている。

５．結論

5.1 これまで別の問題して考えられてきた狭義の形状解析問題と広義の形状解析問題とはたんに、材質の違いとして捉えることができ、その解析手法は座標を未知数としたいわゆる形状解析の手法で統一することができる。

5.2 これまで等張力曲面などとして断片的に解析され ていた手法を連続体の力学の中で的確に位置ずけることができた、これによつて形状解析の理論はかなり見通しよく整備されてきたように思われる。

REFERENCES

1) Oden J.T. (1967)
"Numerical Analysis of Nonlinear Pneumatic Structures" Proc. of the 1st International Colloquium on Pneumatic Structures Stuttgart

2) Haug, E. and Powell. G.H. (1971)
"Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures" I.A.S.S. Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames. Tokyo and Kyoto,

3) Haug, E. and Powell. G.H. (1971)
"Analytical Shape Finding for Cable Nets" I.A.S.S Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames. Tokyo and Kyoto
4) Haug, E. (1972)
"Finite Element Analysis of Pneumatic Structures" I.A.S.S International Symposium on Pneumatic Structues, Delft
5) Kawamata S. Magara E. and Kunita J. (1973)
"Analysis of Cable Nets in Mixed Formulation" Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis Proc. of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis Univ. of Tokyo Press
6) Ishii,k.(1976)
"Analytical Shape Determination for Membrane Structures" I.A.S.S World Congress on Space Enclosures. Montreal
7) Ishii,k.(1982)
"Structural Design of Air-Supported Structure" Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National University. Vol.31
8) Barnes,M.R (1976)
"Form-Finding of Minimum Surface Membranes" I.A.S.S. World Congress on Space Enclosures. Montreal
9) Ishii,K. (1971)
"Shape of Membrane Structures" Proc. of I.A.S.S. Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames. Tokyo, and kyoto
10) Ishii,K.(1972)
"On Developing of Curved Surface of Pneumatic Structures" Proc. f I.A.S.S International Symposium on Pneumatic Structures, Delft
11) Ataka,N. (1984)
"The Form-Finding Analysis of Membrane Structures using Characteristic Length of Surface" Proc. of the Annual Meeting of The Architectural Institute of Japan.
12) Ataka,N. (1985)
"A Form-Finding Method of Reference (Balanced) State from Natural (Unbalanced) State of Membrane Structures" Proc. of Annual Meeting of Architectural Institute of Japan.
13) Tubota,H.,Yoshida,A.,and Kurokawa,Y. (1987)
"Theoretical Analysis of Actual Initial Equilibrium State for Membrane Structues based on Cutting Patterns" Joun. of Archtectural and Construction Engineering Vol.373
14) Ataka, N. (1987)
"On Configuration Theory Based on Mechanics of Continua", Proc. of the 2nd. Japan-Korean Joint Colloquium on Shell and Spatial Structures, Institute of industrial science, Univ. of Tokyo
15) Ataka, N. (1987)
"Generalized Theory for Shape Determination of Membrane Structures", Proc. of An Internatinal Conference on the Design and Construction of Non-Conventional Structures, Civil-Comp Press Edinburgh, U.K.
16) Elsgolc L.E. (1962)
"Calculus of Variations" Pregamon Press.
17) Washizu K. (1982)
"Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press 3rd. edition
18) Otto F. (1969)
"Tensile Structures" Vol. I , Vol. II MIT Press
19) Sokolnikoff I.S. (1964)
"Tensor Analysis --Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua--" 2nd. edition John Wiley and Sons
20) Eringen A.C. (1962)
"Nonlinear Theory of Continuous Media" McGraw-Hill
21) Green A.E.and Zerna W. (1954)
"Theoretical Elasticity" Oxford Press
22) Green A.E.and Adkins J.E. (1960)
"Large Elastic Deformations" Oxford Press
23) Oden J.T. (1972)
"Finite Elements of Nonlinear Continua" McGraw-Hill