物理歪の概念を用いた膜構造の非線形解析

鈴 木 俊 男 ※

概　　要

本報告は膜構造物の大変形挙動を精密に把握するための方法として、従来の幾何学的非線形解析で多用されている Green歪のかわりに、物理歪を用いた膜構造の非線形解析法について検討したものである。この物理歪は、 Green歪のように数学的に定義された歪でなく、物理的意味を考慮して定義されたものである。物理歪を用いた解析では、Green歪による解析と比較して非線形項の取扱いが容易となる。また物理歪の意味が、直感的な歪と合致しているので非常にわかり易い。しかし、物理歪による解と Green歪による解との差は、歪が大きくなると顕著になる。本論文では、まず一般曲率線座標で表現された物理歪を定義した後、物理歪と Green歪との関連性を調べた。次に仮想仕事の原理を用いて、非線形項の省略がない非線形釣合い方程式の誘導を試みた。また、本論の簡単な応用例として内圧を受ける完全球型膜構造の解析を行い、荷重－変形関係が Green歪を用いた場合と全く反対の傾向が生じることを示した。さらに、内圧を受ける部分球型膜の解析を、Rayleigh-Ritz 法を用い、Green歪による解および弾性膜模型を用いた実験値との比較を行うことから、その適合性を調べた。

1．はじめに

シェル構造および膜構造の幾何学的非線形解析では、Green歪[1)2)]が多用されているが、本報告では、物理的意味を考慮して定義された物理歪[3)4)]と呼ばれる歪を用いて球型膜の非線形解析を行なった。物理歪E_xとGreen歪ε_{xx}との違いは、デカルト座標系のx方向の面内歪の場合に、次式のように示されている。

物理歪　　$E_x=(d\bar{x}-dx)/dx$ ……(1)

Green歪　　$\varepsilon_{xx}=(d\bar{x}^2-dx^2)/2\ dx^2$ ……(2)

ここで、dx、$d\bar{x}$は変形前、後の線素の伸び率である。また、上式から物理歪E_xとGreen歪ε_{xx}とは、次の様に関連づけられている。

$$E_x=\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}-1 \quad \cdots\cdots(3)$$

従って、歪ε_{xx}が大きくなるとE_xとの差が生じてくるため、膜構造のように大変形が予想される場合にはGreen 歪のかわりに物理歪を用いる必要があると考えられる。

本報では、まず一般曲率線座標で表現された物理歪を定義し、 Green歪との関連性を調べた後、仮想仕事の原理を用いて非線形項の省略がない非線形釣合い方程式の誘導を試みる。また、本論の応用例として、内圧を受ける完全球型膜と部分球型膜の解析を行なった。

2．物理歪による非線形解析理論

2．1　記号の定義

本論文で用いる記号の定義を以下に示す。一般曲率線座標による曲面の定義に関する諸量の記号は、ほとんど文献[5)]によっている。英文字に対しては、原則的に、小文字は変形前の諸量を、大文字またはバー付文字は変形後の諸量を示す。また、文字の右下隅の記号（，i）は、α_i方向の偏微分操作を示す。

α_1, α_2	：直交曲率線座標
u	：変位ベクトル　$u=ut_1+vt_2+wn$
r（R）	：位置ベクトル
g_i（G_i）	：接線ベクトル
t_i	：単位接線ベクトル
n	：単位法線ベクトル
$\theta(\Theta)$	：接線ベクトルのなす角度

※　フジタ工業㈱　技術研究所特殊構造研究室　室長

ds_i ($d\bar{s}_i$)　：線素
da　：面素
e, f, g (E, F, G)　：曲面の第一基本計量

2．2　解析の仮定

本論における解析仮定は、シェルの幾何学的非線形理論において、Kirchhoff-Love仮定を修正したKoiter仮定[6]と呼ばれる次の基本仮定を採用する。

仮定1）シェルは薄肉である。

仮定2）歪は小さい。変位の大きさの制限はない。

仮定3）シェルの応力状態は、平面応力である。

2．3　物理歪の定義

本論で述べる膜構造の物理歪は、微小歪の仮定により、軸歪 ε_1、ε_2 については変形前後の変化率、せん断歪 γ_{12} については変形前後の角度の差として定義される。従って、物理歪は次の様になる。

$$\varepsilon_1=(d\bar{s}_1-ds_1)/ds_1=\sqrt{E}/\sqrt{e}-1 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\varepsilon_2=(d\bar{s}_2-ds_2)/ds_2=\sqrt{G}/\sqrt{g}-1 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\gamma_{12}=-(\bar{\theta}-\theta)=F/\sqrt{EG}-f/\sqrt{eg} \quad \cdots\cdots(6)$$

上式で表現された物理歪は、変形前後の曲面に関する幾何学量で完全に表されており、かつ物理的意味を持った精密な歪量を示している。

上式(4)～(6)の算出方法は以下の通りである。

① ε_1 は α_1 の方向の線素の伸び率として定義する。

変形前の α_1 方向の線素

$$ds_1=\sqrt{e}\ d\alpha_1 \quad \cdots\cdots(7)$$

変形後の α_1 方向の線素

$$d\bar{s}_1=\sqrt{E}\ d\alpha_1 \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\therefore \varepsilon_1=(d\bar{s}_1-ds_1)/ds_1 =(\sqrt{E}\,d\alpha_1-\sqrt{e}\,d\alpha_1)/\sqrt{e}\,d\alpha_1=\sqrt{E}/\sqrt{e}-1 \quad (9)$$

② ε_2 は ε_1 と同様

③ γ_{12} は微小歪の仮定により、α_1, α_2 曲線がなす角度の差として定義する。

変形前の $\alpha_1\alpha_2$ 曲線がなす角度 θ

$$\cos\theta=f/\sqrt{eg}=x \quad \cdots\cdots(10)$$

変形後の $\alpha_1\alpha_2$ 曲線がなす角度 $\bar{\theta}$

$$\cos\bar{\theta}=F/\sqrt{EG}=\bar{x} \quad \cdots\cdots(11)$$

また、

$$\theta=\cos^{-1}x=\pi/2-\sin^{-1}x\cong\pi/2-x \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\bar{\theta}=\cos^{-1}\bar{x}=\pi/2-\sin^{-1}\bar{x}\cong\pi/2-\bar{x} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\therefore \gamma_{12}=-(\bar{\theta}-\theta)\cong-\{(\pi/2-\bar{x})-(\pi/2-x)\} =\bar{x}-x=F/\sqrt{EG}-f/\sqrt{eg} \quad \cdots\cdots(14)$$

2．4　構成方程式

応力－歪関係式は、Koiterの仮定 2), 3)により次式で定義する。

$$N_1=K(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2) \quad \cdots\cdots(15)$$

$$N_2=K(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1) \quad \cdots\cdots(16)$$

$$N_{12}=N_{21}=K(1-\nu)/2\ \gamma_{12} \quad \cdots\cdots(17)$$

ここで、$K=Eh/(1-\nu^2)$ は面内剛性である。

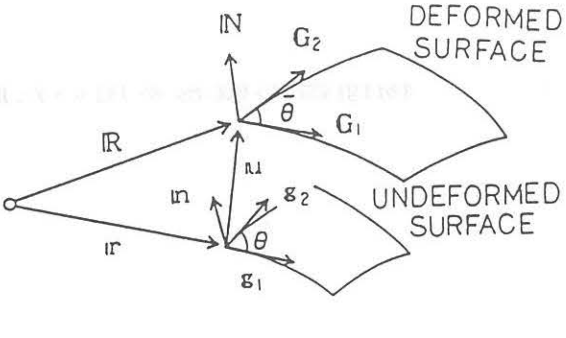


Fig. 1. Notation for surfaces.

2．5　仮想仕事式と非線形釣合い方程式

物理歪を用いて力の釣合い式を陽な形で導くことは、かなり繁雑となるので、ここでは仮想仕事式を使ったRayleigh-Ritz法を前提とした釣合式を求める。

まず、仮想仕事式を次の様に定義する。

$$\delta\pi=\int\{N_1\delta\varepsilon_1+N_2\delta\varepsilon_2+N_{12}\delta\gamma_{12}-Fi\delta ui\}da=0 \quad (18)$$

ここで、積分範囲は微小歪の仮定により、変形前の曲面に対して $da=\sqrt{eg-f^2}\,d\alpha_1 d\alpha_2$ とする。

次に、歪 {ε} と応力 {σ}

$$\{\varepsilon(C)\}=\{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_{12}\}^T,\ \{\sigma(C)\}=\{N_1\ N_2\ N_{12}\}^T \cdots\cdots(19)$$

とすると、(18)は次式となる。

$$\delta\pi=\int(\{\delta\varepsilon(C)\}^T\{\sigma\}-\{\delta\}-\{\delta C\}^T\{f\})\,da=0 \quad (20)$$

ここで、{C} は一般化変位で未知量 {f} は一般化外力である。

また、歪の変分 {δε(C)} は、本報告で提案した物理歪を用いて、未知量の変分 {δC} で次式のように表すことができる。

$$\{\delta\varepsilon(C)\}=[B(C)]\{\delta C\} \quad \cdots\cdots(21)$$

従って、(21)を(20)に代入して最終的には

$$\phi(C)=\int[B(C)]^T\{\sigma(C)\}da-\int\{f\}\,da=0 \quad \cdots\cdots(22)$$

となる。

上式が、未知量 {C} に関する非線形釣合い方程式であり、式(21)の導出過程で近似化を全くしなければ、物理歪を考慮した精密な方程式となっている。

２．６　Green歪との比較

ここでは物理歪から何等かの近似を行なうことにより Green歪を導くことを試みる。

物理歪は、線素の長さの変化率を表しているのに対して、 Green歪はその定義式

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{ij}\, d\alpha_i\, d\alpha_j \qquad \cdots\cdots(23)$$

から容易にわかるように、変形前後の線素の長さの２乗、すなわち面積の変化率を表している。

一般に Green歪 ε_{11} は次式で定義される。

$$\varepsilon_{11} = (g_1\cdot u_{,1} + 1/2\, u_{,1}\cdot u_{,1})/e \qquad \cdots\cdots(24)$$

次に物理歪から上式を導出する。式(4)より

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sqrt{E}/\sqrt{e} - 1 = \sqrt{G_1\cdot G_1}/\sqrt{e} - 1\\ &= \sqrt{(g_1 + u_{,1})\cdot(g_1 + u_{,1})}/\sqrt{e} - 1\\ &= \sqrt{1 + (2g_1\cdot u_{,1} + u_{,1}\cdot u_{,1})/e} - 1\end{aligned}$$

更に、上式をTayler展開して第２項までとると

$$= (g_1\cdot u_{,1} + 1/2\, u_{,1}\cdot u_{,1})/e \qquad \cdots\cdots(25)$$

となり、これは(24)と一致する。

３．解析例

３．１　完全球型膜の解析

完全球型膜が内圧を受けた非線形解析を行なう。座標系は図２に示すような球座標系を用いる。内圧と変位の関係式は次式となる。

物理歪による解

$$\mathrm{P} = x/(1+x) \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

Green歪による解

$$\mathrm{P} = x/(1 + 3/2x^2 + 1/2x^3) \qquad \cdots(27)$$

ここで、

$$\mathrm{P} = ap/2k(1+\nu),\quad x = w/a \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

図３は、上式(26)，(27)を図示したものである。図より、内圧が増すに従って物理歪による解(26)はソフトニングの傾向を示すが Green歪による解(27)はハードニングとなっている。これは、 Green歪の場合は、歪の非線形項の影響が形状変化による内圧の増加よりも大きいためと考えられる。

３．２　部分球型膜の解析

内圧を受けるピン支持部分球型膜の解析を行なった。解析パラメータは内圧 P_1， 半開角 ϕ とし、変位・歪及び応力について、物理歪による解と Green歪による解とを比較検討した。 また、半径 18cm，厚さ 0.1mm，$\mathrm{E\,h} = 91.33$g/cm，$\nu = 0.49$ の弾性膜模型による実験値との比較も行なった。

なお、Rayleigh-Ritz法を適用する時の変位関数は次の様においた。。

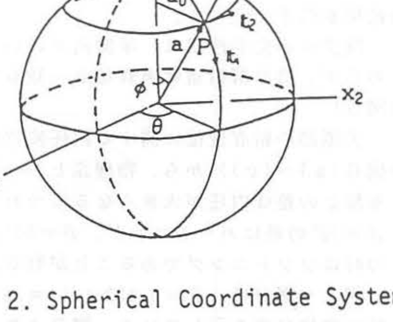


Fig. 2. Spherical Coordinate System.

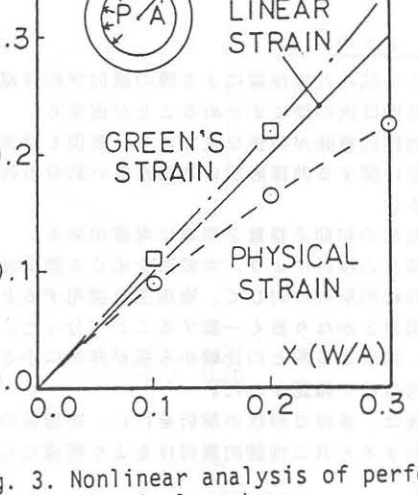


Fig. 3. Nonlinear analysis of perfect spherical membrane.

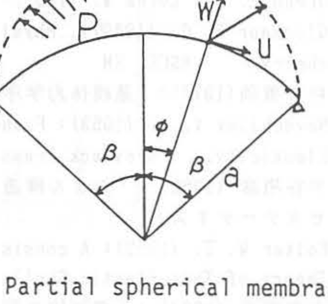


Fig. 4. Partial spherical membrane structure.

$$u = \Sigma a_m \sin(m\varphi\pi/\beta) \quad \cdots\cdots\cdots(29)$$
$$w = \Sigma b_n \cos((n-1/2)\varphi\pi/\beta) \quad \cdots\cdots\cdots(30)$$

解析結果を以下に述べる。

（1） 膜全体の変形性状は、半開角βのいかんに拘わらず、概ね解析値は実験値と一致している。（図5）

（2） 天頂部の鉛直変位に関する内圧変位曲線（図6(a)～(c)）から、物理歪と Green歪による解との差は内圧が大きくなるにつれて増大し、$\beta=30°$の時にハードニング、$\beta=60°$，$\beta=90°$の時はソフトニングであることが判る。

（3） 図7～図9は、P=0.123 (P_1=25mmAq) の時の変位分布を示している。図7より、線形解と非線形解との差が大きいことがわかる。図8～図9より線形解と非線形解との差は支持点近傍で大きいが、物理歪と Green歪による解との差はあまり顕著ではないことがわかった。

4．まとめ

ここで試みた物理歪による膜の幾何学的非線形解析法の特徴は次の様にまとめることが出来る。

1） 物理的意味が明快な歪であり、表現も簡潔である。

2） 歪に関する非線形項の省略がない釣合方程式を導ける。

3） 曲面の初期不整量を簡単に考慮出来る。

本論文の検討により、大変形を生じる膜構造の幾何学的非線形解析に対して、物理歪を適用すると、実験的な現象とかなり良く一致することが分った。また、Green 歪による解との比較から歪が非常に小さい範囲での適合性が確認された。

今後は、多様な形状の解析を行い、物理歪の有効性を検討すると共に理論的裏付けをより明確にしていきたい。

謝辞　本論文をまとめるにあたって貴重なご意見を頂いた横浜国立大学石井一夫教授に感謝致します。

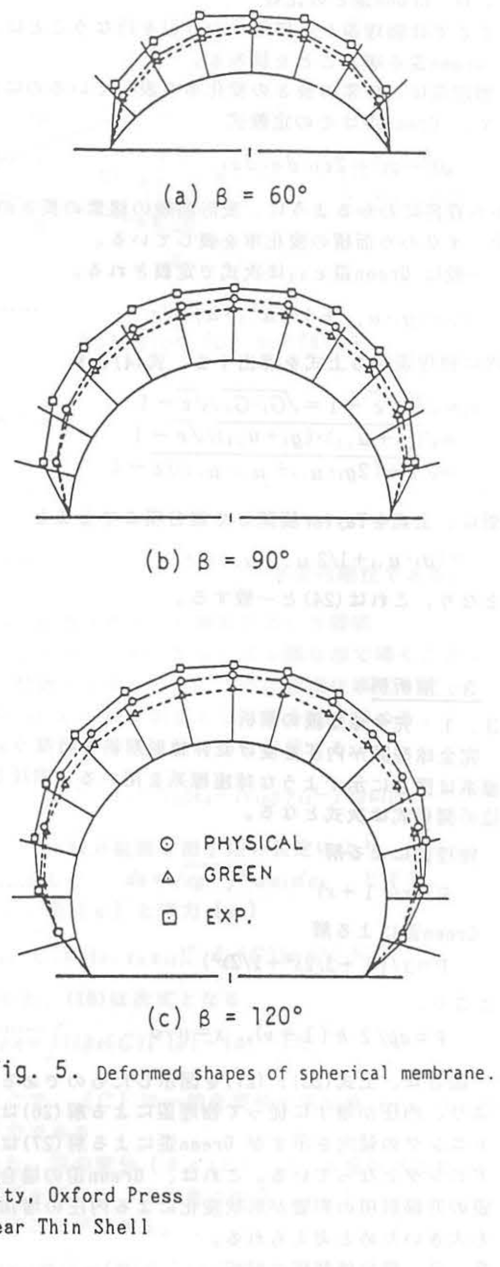


Fig. 5. Deformed shapes of spherical membrane.

参考文献

1） Green A. E., Zerna W. (1953): Theoretical Elasticity, Oxford Press

2） Glockner P. G. (1969): Physical Strain in Nonlinear Thin Shell theory: ASCE, EM

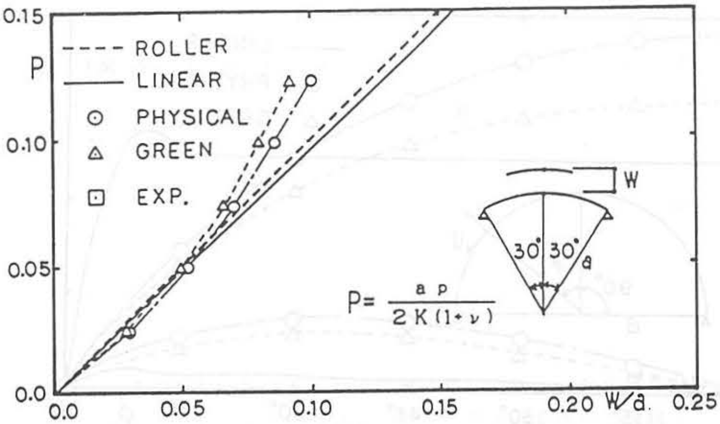
3） 坪井善勝(1977):「連続体力学序説」,産業 図書

4） Novochilov V. V. (1953): Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylack Press

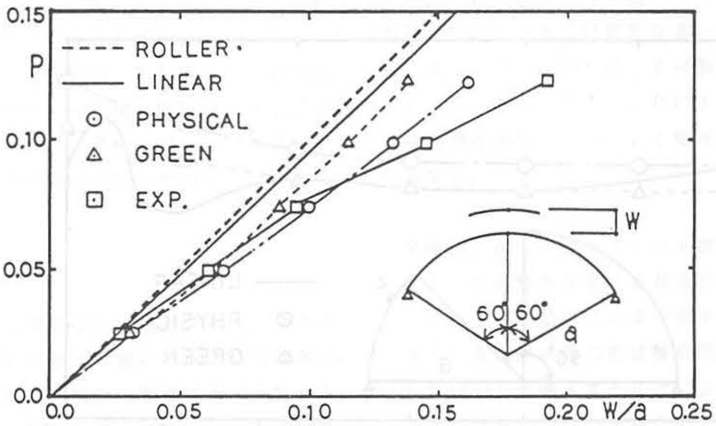
5） 半谷裕彦 (1962) :「シェル構造の基礎と応用」，東京大学生研セミナーテキスト

6） Koiter W. T. (1959): A consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells , Proc. of IUTAM

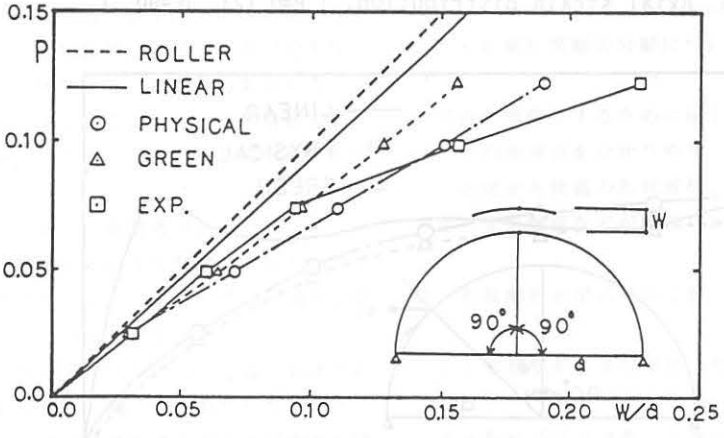
7） 大森博司 (1982) :「変形依存型外荷重による弾性体の安定問題」東京大学工学博士論文



(a) β = 30°



(b) β = 60°



(c) β = 90°

Fig. 6. Pressure-Deflection curve at the apex for linear and nonlinear solution.

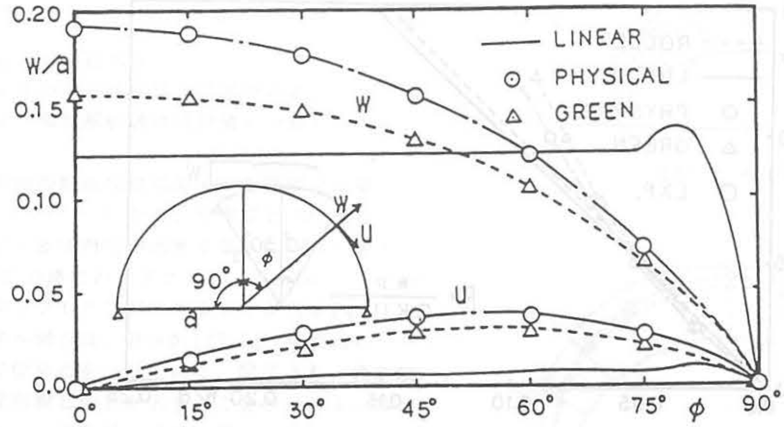


Fig. 7. Radial and Axial displacement distribution. (P=0.123, β=90°)

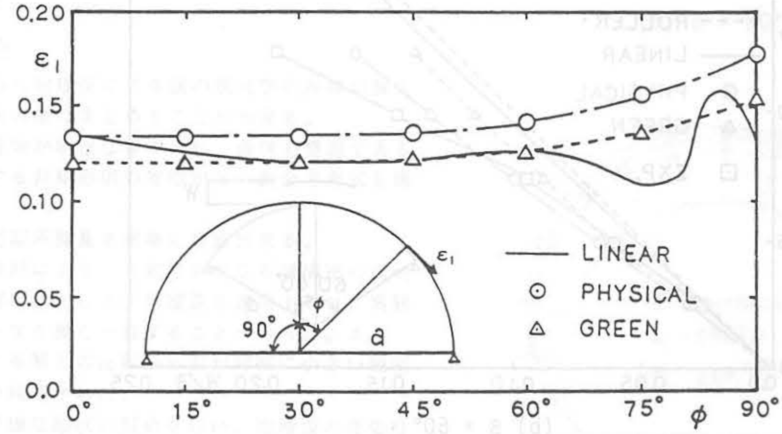


Fig. 8. Axial strain distribution. (P=0.123, β=90°)

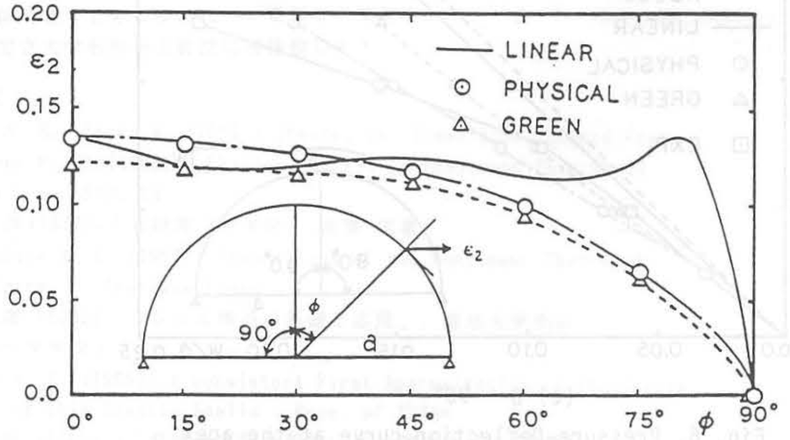


Fig. 9. Circumferential strain distribution (P=0.123, β=90°)